Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. С. Шаров, Струнная модель бариона “треугольник”, *ТМФ*, 1997, том 113, номер 1, 68–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1066>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 16:13:19

Г. С. Шаров*

СТРУННАЯ МОДЕЛЬ БАРИОНА “ТРЕУГОЛЬНИК”

Рассматривается модель бариона, в которой три материальные точки (три кварка) соединены попарно релятивистскими струнами, образующими криволинейный треугольник. Для этой модели найдены и исследованы классические решения, отвечающие равномерному вращению системы относительно центра масс в некоторой плоскости. Наряду с простейшим состоянием – вращающимся криволинейным треугольником с гладкими сторонами – возможны более сложные конфигурации, характеризующиеся движением ряда внутренних безмассовых точек струны со световыми скоростями. В пределе, когда массы кварков стремятся к нулю, замкнутая струна имеет форму вращающейся гипоциклоиды.

Анализируются возможности описания с помощью данных решений барионных состояний на реджевских траекториях.

ВВЕДЕНИЕ

Модель релятивистской струны с массами на концах изначально была создана для описания мезонного состояния – двухчастичной (из кварка и антикварка) системы, связанной сильным взаимодействием [1, 2]. Интерес к струнным моделям адронов обусловлен как впечатляющей аналогией между характером сильного взаимодействия и связью посредством струны, так и недостаточными возможностями прямого применения КХД на современном этапе. При этом некоторые проблемы в теории релятивистской струны с массивными концами (например, переход к квантованию [1, 3]) ждут своего решения.

Создание струнных моделей бариона – трехкваркового связанного состояния – было сопряжено с рядом дополнительных трудностей. В частности, при построении модели бариона на классическом уровне необходимо выбрать геометрический характер соединения трех материальных точек релятивистскими струнами. Были разработаны две модели – модель с соединением данных точек двумя отрезками струны, связывающими соответственно первый кварк со вторым и второй с третьим [4], и модель, в которой три идущие от кварков струны соединяются в четвертой (безмассовой) точке [1, 5].

В настоящей работе рассматривается струнная модель бариона “треугольник”, которая практически еще не исследована. В этой модели три материальные точки (три кварка) соединены попарно релятивистскими струнами, образуя в каждый момент времени криволинейный треугольник в пространстве. Этот же объект можно воспринимать как замкнутую струну, нагруженную тремя точечными массами. С точки зрения

*Тверской государственный университет, Тверь, Россия. E-mail: sharov@tversu.ac.ru

Рис. 1

описания взаимодействия кварков в барионе данная модель выглядит более естественно по сравнению с упомянутыми выше.

Дополнительные трудности, возникающие при переходе от струнной модели мезона к модели бариона, в основном сводятся к следующим трем: а) мировая поверхность струны в модели “треугольник” имеет разрывы производных на траекториях кварков; б) невозможно для произвольного движения задать параметризацию, в которой все эти траектории являются координатными линиями, а индуцированная метрика на мировой поверхности – конформно-плоской; в) пространственноподобные координатные линии, вообще говоря, не замкнуты.

Эти вопросы рассмотрены в разделе 1, в котором выведены уравнения движения и краевые условия для данной модели. В разделе 2 найдены и исследованы решения этих уравнений, отвечающие равномерному вращению системы относительно центра масс в некоторой плоскости. При этом основное внимание уделено случаю одинаковых масс кварков. Менее подробно рассмотрен случай, когда эти массы различны. Предел нулевых масс, приводящий к решениям, которые имеют вид вращающихся гипотиклоид, описан в приложении. В разделе 3 с помощью вычисленных для найденных движений энергии и момента исследуются возможности описания барионных состояний на реджевских траекториях.

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ НА ТРАЕКТОРИЯХ КВАРКОВ

Модель бариона “треугольник” будем рассматривать как замкнутую релятивистскую струну с натяжением γ , нагруженную тремя точечными массами m_1, m_2, m_3 . Действие для этой системы, учитывая генетическую связь со струнной моделью мезона [1–3], запишем в виде

$$S = - \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left\{ \gamma \int_{\sigma_0(\tau)}^{\sigma_3(\tau)} [(\dot{X} X')^2 - \dot{X}^2 X'^2]^{\frac{1}{2}} d\sigma + \sum_{i=1}^3 m_i \sqrt{X_i^{*2}(\tau)} \right\}. \quad (1.1)$$

Здесь $X^\mu(\tau, \sigma)$ – координаты точки струны в D -мерном пространстве Минковского, скорость света $c = 1$; $(\tau, \sigma) \in \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ (см. рис. 1), $(ab) = a^\mu b_\mu$ – (псевдо)скалярное произведение, $\dot{X}^\mu = \partial_\tau X^\mu$, $X'^\mu = \partial_\sigma X^\mu$, $X_i^{*\mu}(\tau) = \frac{d}{d\tau} X^\mu(\tau, \sigma_i(\tau))$; $\sigma_i(\tau)$, $i = 0, 1, 2, 3$, – внутренние координаты мировых линий кварков. Уравнения $\sigma = \sigma_0(\tau)$ и $\sigma = \sigma_3(\tau)$ определяют траекторию одного и того же (третьего по счету)

кварка, что отражает факт замкнутости струны, и в общем виде условие замыкания может быть записано следующим образом:

$$X^\mu(\tau, \sigma_0(\tau)) = X^\mu(\tau^*, \sigma_3(\tau^*)). \quad (1.2)$$

Подчеркнем, что параметры τ и τ^* , фигурирующие в этих двух параметризациях одной и той же линии, не обязательно совпадают. Однако, пользуясь инвариантностью действия (1.1) относительно гладкой невырожденной репараметризации $\tau, \sigma \rightarrow \tilde{\tau}, \tilde{\sigma}$, можно добиться более простого вида для условия замыкания:

$$X^\mu(\tau, \sigma_0(\tau)) = X^\mu(\tau, \sigma_3(\tau)). \quad (1.3)$$

Для этого достаточно, например, положить $\tau = t \equiv X^0$. Условие замыкания имеет вид (1.3) только в том случае, когда координатные линии $\tau = \text{const}$ на замкнутой мировой поверхности начинаются (при $\sigma = \sigma_0$) и заканчиваются (при $\sigma = \sigma_3$) в одной и той же точке пространства Минковского. Такие координатные линии $\tau = \text{const}$ будем называть замкнутыми.

Задающая параметризацию мировой поверхности струны функция $X^\mu(\tau, \sigma)$ непрерывна на Ω , однако на линиях $\sigma_i(\tau)$ ее производные могут иметь разрывы I рода. При этом непрерывными остаются производные по касательному к линии направлению – не только первая $X_i^{*\mu} = \frac{d}{d\tau} X^\mu(\tau, \sigma_i(\tau))$, связанная со скоростью, но и вторая, характеризующая ускорение массивной материальной точки. Кроме этого, локальным выбором параметров τ и σ всегда можно обеспечить при $\sigma = \sigma_i(\tau)$ непрерывность индуцированной метрики

$$ds^2 = \dot{X}^2(\tau, \sigma) d\tau^2 + 2(\dot{X} X') d\tau d\sigma + X'^2 d\sigma^2. \quad (1.4)$$

Уравнения движения и краевые условия для данной модели выводятся путем варьирования и минимизации действия (1.1). Введя обозначения

$$L(\dot{X}, X') = -\gamma \sqrt{(\dot{X} X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}, \quad \Lambda_i(X_i^*) = -m_i \sqrt{X_i^{*2}},$$

варьируя обычным образом [1] действие (1.1) и приравнивая вариацию $\delta S[X]$ к нулю, получим уравнения движения

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial L}{\partial X'^\mu} = 0, \quad (\tau, \sigma) \in \Omega. \quad (1.5)$$

Нестандартным является то, что при сведении слагаемого

$$\iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} \delta X^\mu \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial X'^\mu} \delta X^\mu \right) \right] d\tau d\sigma$$

в δS с помощью формулы Стокса к криволинейному интегралу по границе Ω следует учитывать разрывность производных L на линиях $\sigma_1(\tau)$ и $\sigma_2(\tau)$ (см. рис. 1). В результате данное выражение сводится к сумме трех интегралов по границам областей Ω_1, Ω_2

и Ω_3 , причем в подынтегральных выражениях стоят внутренние предельные значения. Вследствие этого краевые условия имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \Lambda_i}{\partial X_i^{*\mu}} + \left[\frac{\partial L}{\partial X'^\mu} - \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} \sigma'_i(\tau) \right] \Big|_{\sigma=\sigma_i(\tau)-0} - \\ - \left[\frac{\partial L}{\partial X'^\mu} - \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} \sigma'_i(\tau) \right] \Big|_{\sigma=\sigma_i(\tau)+0} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Для третьего кварка ($i = 3$) в последнем слагаемом условия (1.6) следует положить $\sigma = \sigma_0(\tau)$, а во втором $-\sigma = \sigma_3(\tau^*)$ и заменить τ на τ^* , если условие замыкания имеет вид (1.2).

Аналогичное (1.6) выражение было получено в работе [6] для бесконечной струны, нагруженной точечной массой.

С помощью невырожденной замены координат $\tau = \tau(\tilde{\tau}, \tilde{\sigma})$, $\sigma = \sigma(\tilde{\tau}, \tilde{\sigma})$ непрерывную метрику (1.4) всегда можно привести к конформно-плоскому виду. Для доказательства этого утверждения заметим, что новые координатные линии $\tilde{\tau} \pm \tilde{\sigma} = \text{const}$ метрики искомого типа являются интегральными кривыми дифференциальных уравнений

$$\dot{X}^2 d\tau + \left[(\dot{X} X') \pm \sqrt{(\dot{X} X')^2 - \dot{X}^2 X'^2} \right] d\sigma = 0.$$

Итак, перейдем к новым координатам (обозначая их по-прежнему τ и σ), в которых метрика (1.4) является конформно-плоской, другими словами, выполняются условия ортонормальности

$$\dot{X}^2 + X'^2 = 0, \quad (\dot{X} X') = 0. \quad (1.7)$$

В этих координатах уравнения движения (1.5) и краевые условия (1.6) принимают простейший вид

$$\ddot{X}^\mu - X''^\mu = 0, \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} m_i \frac{d}{d\tau} \frac{\dot{X}^\mu + \sigma'_i(\tau) X'^\mu}{\sqrt{\dot{X}^2 \cdot (1 - \sigma_i'^2)}} \Big|_{\sigma=\sigma_i(\tau)} + \gamma (X'^\mu + \sigma'_i \dot{X}^\mu) \Big|_{\sigma=\sigma_i-0} - \\ - \gamma (X'^\mu + \sigma'_i \dot{X}^\mu) \Big|_{\sigma=\sigma_i+0} = 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Пояснения, сделанные к (1.6) для случая $i = 3$, остаются в силе.

По своему физическому смыслу краевые условия (1.6) или (1.9) являются уравнениями движения (вторым законом Ньютона) для каждой из трех материальных точек. После перехода к натуральному параметру

$$s = \int \sqrt{X_i^{*2}} d\tau$$

уравнения (1.9) примут вид

$$m_i d^2 X^\mu / ds^2 = F_1^\mu + F_2^\mu,$$

причем силы натяжения F_1^μ и F_2^μ со стороны двух отрезков струны по модулю равны γ .

С помощью невырожденной замены координат [1]

$$\tau \pm \sigma = f_\pm(\tilde{\tau} \pm \tilde{\sigma}), \quad (1.10)$$

оставляющей инвариантными условия (1.7) и уравнения (1.8), (1.9), можно зафиксировать две из четырех функций $\sigma_i(\tau)$, положив, например,

$$\sigma_1(\tau) = 0, \quad \sigma_2(\tau) = \pi. \quad (1.11)$$

Первое из условий (1.11) будет выполнено, если, записав в эквивалентном виде уравнение $\sigma = \sigma_1(\tau) \iff \tau + \sigma = \xi_1(\tau - \sigma)$, выбрать следующие функции (1.10): $f_+(\eta) = \xi_1(\eta)$, $f_-(\eta) = \eta$. Сделав еще одну замену (1.10) с $f_+ = f_-$, можно добиться выполнения второго из условий (1.11) при сохранении первого.

Функции $f_\pm$ после этого будут зафиксированы не окончательно – останутся сохраняющие (1.11) репараметризации (1.10) [3], в которых

$$f_+(\eta) = f_-(\eta) = \eta + \phi(\eta), \quad \phi(\eta + 2\pi) = \phi(\eta), \quad |\phi'(\eta)| < 1.$$

Однако с их помощью для мировой поверхности с произвольными $\sigma_0(\tau)$ и $\sigma_3(\tau)$ невозможно получить равенство $\sigma_3 = \text{const}$ (и $\sigma_0 = \text{const}$) при всех τ .

Кроме того, если зафиксированы ограничения (1.11), то, вообще говоря, невозможно добиться замкнутости линий $\tau = \text{const}$ (1.3).

Итак, при анализе произвольного движения данной системы после наложения условий (1.7) и (1.11) возникает проблема определения трех функций $\sigma_0(\tau)$, $\sigma_3(\tau)$ и $\tau^*(\tau)$. Если, например, поставлена начально-краевая задача, то эти функции должны быть вычислены на основании начальных данных, что усложняет ситуацию по сравнению с аналогичной задачей для струны, моделирующей мезон [7].

В настоящей работе рассмотрен класс простейших движений системы (равномерные вращения), для которых вид упомянутых трех функций определяется соображениями симметрии.

2. РЕШЕНИЯ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ПЛОСКИМ РАВНОМЕРНЫМ ВРАЩЕНИЯМ

Пусть три материальные точки вместе со связывающей их релятивистской струной равномерно вращаются в плоскости xy . Форма замкнутой кривой (криволинейного треугольника) одинакова во все моменты времени. Траектории кварков в $(2+1)$ -мерном пространстве Минковского являются винтовыми линиями.

Введем на мировой поверхности струны координаты τ и σ так, чтобы все линии $\sigma = \text{const}$ были винтовыми (естественный способ “нумерации” точек струны), а параметр τ менялся бы вдоль них равномерно, т.е. пропорционально натуральному параметру. При таком выборе координат на траекториях кварков выполнены соотношения

$$\sigma_i(\tau) = \text{const}, \quad i = 0, 1, 2, 3; \quad \sqrt{\dot{X}^2} \Big|_{\sigma=\sigma_i} = C_i = \text{const}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.1)$$

Фиксируются одновременно все четыре функции $\sigma_i(\tau) = \text{const}$. Без ограничения общности будем считать выполненными условия (1.11).

В качестве координатных линий $\tau = \text{const}$ возьмем ортогональные траектории к указанному семейству $\sigma = \text{const}$ и введем параметр σ таким образом, чтобы выполнялись условия ортонормальной калибровки (1.7).

При этом линии $\tau = \text{const}$ не будут совпадать с сечениями $t = \text{const}$, так как касательный вектор к последним не ортогонален касательному вектору к винтовым линиям для участков струны, направленных не радиально. Такие участки обязательно существуют, если треугольная конфигурация струны не вырождается до прямолинейного отрезка (этот частный случай здесь рассматриваться не будет, так как он сводится к хорошо известному равномерному вращению прямолинейной “мезонной” струны с массивными концами [1, 3, 8, 9]).

Во введенной указанным образом координатной сети линии $\tau = \text{const}$ не замкнуты, т.е. имеет место условие замыкания общего вида (1.2). Впрочем, из свойств симметрии мировой поверхности (она переходит в себя при повороте и одновременной трансляции вдоль своей оси, которую мы совместим с осью $t = x^0$) следует простая связь между τ и τ^* : $\tau^* = \tau + \text{const}$.

В описанной выше параметризации краевые условия (1.9) для первого и второго кварков примут вид

$$\ddot{X}^\mu(\tau, \sigma_i) + Q_i [X'^\mu(\tau, \sigma_i - 0) - X'^\mu(\tau, \sigma_i + 0)] = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.2)$$

Здесь $Q_i = \gamma C_i / m_i$, $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \pi$. Аналогичное условие для третьего кварка и условие замыкания (1.2) выглядят следующим образом:

$$\ddot{X}^\mu(\tau, \sigma_0) + Q_3 [X'^\mu(\tau^*, \sigma_3 - 0) - X'^\mu(\tau, \sigma_0 + 0)] = 0, \quad (2.3)$$

$$X^\mu(\tau, \sigma_0) = X^\mu(\tau^*, \sigma_3), \quad \tau^* - \tau = \text{const}. \quad (2.4)$$

Ищем решения уравнения (1.8), удовлетворяющие условиям (1.7), (2.1)–(2.4), с помощью метода Фурье:

$$X^\mu = \sum \alpha^\mu u(\sigma) T(\tau).$$

Функции $u(\sigma)$ и $T(\tau)$ вследствие (1.8) являются решениями уравнений

$$u''(\sigma) + \omega^2 u = 0, \quad T''(\tau) + \omega^2 T = 0. \quad (2.5)$$

Мировая поверхность в $(2 + 1)$ -мерном пространстве Минковского, соответствующая равномерному вращению рассматриваемой замкнутой струны, с учетом изложенных выше особенностей координатной сети строится из решений уравнений (2.5) следующим образом:

$$X^\mu = \{t_0 + a\tau + b\sigma; u(\sigma) \cos \omega\tau - \tilde{u}(\sigma) \sin \omega\tau; u(\sigma) \sin \omega\tau + \tilde{u}(\sigma) \cos \omega\tau\}. \quad (2.6)$$

В это выражение входит, естественно, единственная ненулевая частота ω ; $X^0(\tau, \sigma)$ определяется решениями (2.5) при $\omega = 0$.

Функции $u(\sigma)$ и $\tilde{u}(\sigma)$ непрерывны на $[\sigma_0, \sigma_3]$, могут иметь разрывы производной при $\sigma = 0$, $\sigma = \pi$ и на отрезках $[\sigma_{i-1}, \sigma_i]$ являются гармониками (решениями (2.5)):

$$u(\sigma) = \begin{cases} A_0 \cos \omega\sigma + B_0 \sin \omega\sigma, & \sigma \in [\sigma_0, 0], \\ A_1 \cos \omega\sigma + B_1 \sin \omega\sigma, & \sigma \in [0, \pi], \\ A_2 \cos \omega\sigma + B_2 \sin \omega\sigma, & \sigma \in [\pi, \sigma_3]; \end{cases} \quad \begin{matrix} A_1 \equiv A, \\ B_1 \equiv B. \end{matrix} \quad (2.7)$$

Функция $\tilde{u}(\sigma)$ устроена так же, с заменой A_i, B_i на $\tilde{A}_i, \tilde{B}_i$ и использованием эквивалентных обозначений $\tilde{A}_1 \equiv \tilde{A}, \tilde{B}_1 \equiv \tilde{B}$.

Потребуем, чтобы функции $\alpha^\mu u(\sigma) T(\tau)$ и $\alpha^\mu \tilde{u}(\sigma) T(\tau)$ независимо друг от друга удовлетворяли двум краевым условиям (2.2). В совокупности с условиями непрерывности при $\sigma = 0$ и $\sigma = \pi$ это дает по 4 уравнения для u и $\tilde{u}$, позволяющих выразить все A_i, B_i через A и B (и по этим же формулам $\tilde{A}_i, \tilde{B}_i$ через $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$),

$$\begin{aligned} A_0 &= A, & A_2 &= \left(1 + \frac{\omega}{Q_2} cs\right) A + \frac{\omega}{Q_2} s^2 B, \\ B_0 &= \frac{\omega}{Q_1} A + B, & B_2 &= -\frac{\omega}{Q_2} c^2 A + \left(1 - \frac{\omega}{Q_2} cs\right) B. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь введены обозначения $c = \cos \pi\omega$, $s = \sin \pi\omega$.

Соотношения (2.8) приводят к тому, что решение (2.6) удовлетворяет условиям (2.2). Потребуем выполнения условий ортонормальности (1.7). Подстановка (2.6) и (2.7) в два уравнения (1.7) дает два набора условий

$$A_i^2 + B_i^2 + \tilde{A}_i^2 + \tilde{B}_i^2 = (a^2 + b^2)/\omega^2, \quad i = 0, 1, 2; \quad (2.9)$$

$$A_i \tilde{B}_i - \tilde{A}_i B_i = ab/\omega^2, \quad i = 0, 1, 2. \quad (2.10)$$

Из трех соотношений (2.10) в качестве независимого можно оставить только одно, отвечающее $i = 1$. Если оно выполнено, то остальные два удовлетворяются автоматически в том случае, когда выполняются условия (2.8).

Три соотношения (2.9), напротив, являются независимыми. Перепишем эту систему в эквивалентном виде, взяв линейную комбинацию уравнений и подставив в них выражения (2.8):

$$A^2 + B^2 + \tilde{A}^2 + \tilde{B}^2 = (a^2 + b^2)/\omega^2, \quad (2.11)$$

$$\omega Q_1^{-1} (A^2 + \tilde{A}^2) + 2(AB + \tilde{A}\tilde{B}) = 0, \quad (2.12)$$

$$\Delta \cdot (A^2 + \tilde{A}^2) + \tilde{g}_2 [s(B^2 + \tilde{B}^2 - A^2 - \tilde{A}^2) + 2c(AB + \tilde{A}\tilde{B})] = 0. \quad (2.13)$$

Здесь $\Delta = \omega/Q_2 - \omega/Q_1$, $\tilde{g}_2 = \omega s/Q_2 - 2c$.

Для того чтобы выражение (2.6) было решением поставленной задачи, осталось потребовать выполнения двух условий (2.3) и (2.4) на траектории третьего кварка. Обозначим через $-\theta/\omega$ константу, фигурирующую в этих условиях:

$$\tau^* = \tau - \theta/\omega, \quad \theta = (\sigma_3 - \sigma_0) \omega b/a. \quad (2.14)$$

Выражение для θ получено подстановкой $X^0 = t_0 + a\tau + b\sigma$ в условие замыкания (2.4). Угол θ имеет следующий геометрический смысл: если провести на мировой поверхности линию $\tau = \text{const}$, $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_3$, то θ есть разность фаз между началом этой линии (при $\sigma = \sigma_0$) и ее концом (при $\sigma = \sigma_3$) на винтовой траектории третьего кварка.

На первом этапе реализацию условий (2.3), (2.4) проведем для случая, когда массы кварков равны, следовательно, совпадают параметры их траекторий, и при этом конфигурация струны симметрична относительно поворотов на угол $2\pi/3$:

$$m_1 = m_2 = m_3 = m, \quad C_i = C, \quad Q_i = Q \quad \forall i; \quad \sigma_0 = -\pi, \quad \sigma_3 = 2\pi. \quad (2.15)$$

Для случая (2.15) подставим выражения (2.6)–(2.8) в краевое условие (2.3) и условие замыкания (2.4) при $\mu = 1, 2$. Значения функций $u(\sigma)$, $\tilde{u}(\sigma)$ и их производных в точках $\sigma = -\pi$ и $\sigma = 2\pi$ выразим с помощью (2.8) через $A, B, \tilde{A}, \tilde{B}$, например:

$$u(2\pi) = \left(2c^2 + \frac{\omega}{Q}cs - 1\right) A + \left(2c - \frac{\omega}{Q}s\right) sB.$$

В четырех уравнениях (2.3) и (2.4) с $\mu = 1, 2$, которые должны выполняться при всех τ , выразим τ^* с помощью (2.14) и приравняем подобные члены при $\cos \omega\tau$ и $\sin \omega\tau$. Восемь получившихся равенств разбиваются на четыре пары совпадающих уравнений.

Итак, условия (2.3) и (2.4) для движения (2.6) – (2.8), (2.14), (2.15) эквивалентны линейной однородной системе из 4 уравнений с четырьмя неизвестными амплитудами $A, B, \tilde{A}, \tilde{B}$. Для упрощения записи и выявления структуры этой системы обозначим

$$r = \omega/Q, \quad g = rs - 2c = \omega Q^{-1} \sin \pi\omega - 2 \cos \pi\omega \quad (2.16)$$

и введем матричные обозначения

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A \\ \tilde{A} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} B \\ \tilde{B} \end{pmatrix}, \quad U = U(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

в которых данная система будет состоять из двух уравнений (каждое из них – столбец):

$$\begin{aligned} (g + c) \mathcal{A} + s\mathcal{B} &= (gc + 1) U\mathcal{A} + gsU\mathcal{B}, \\ (rg - s) \mathcal{A} + (g + c) \mathcal{B} &= (rc + 2s) cU\mathcal{A} + (gc + 1) U\mathcal{B}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Первое из этих уравнений – следствие (2.4), второе – следствие (2.3).

Систему (2.17) можно записать в виде $M_1\mathcal{A} = M_2\mathcal{B}$, $M_1\mathcal{B} = M_3\mathcal{A}$, где взаимно коммутативные матрицы M_k являются линейными комбинациями U и единичной матрицы E . Исключая из этой системы $\mathcal{A}$ или $\mathcal{B}$, видим, что эти столбцы аннулируются одной и той же матрицей:

$$M\mathcal{A} = 0, \quad M\mathcal{B} = 0, \quad (2.18)$$

где

$$M = M_1^2 - M_2M_3 = E - g(3 - g^2)U + U^2 = [2 \cos \theta - g(3 - g^2)]U$$

(здесь использовано тождество $E + U^2(\theta) = 2 \cos \theta \cdot U$).

Однородные системы (2.18) имеют интересующее нас нетривиальное решение тогда и только тогда, когда $\det M = 0$, что с учетом равенства $\det U = 1$ равносильно выражению

$$2 \cos \theta = g(3 - g^2). \quad (2.19)$$

Оно ставит в соответствие каждому значению θ (при $\sin \theta \neq 0$) три различных значения g – три корня кубического относительно g уравнения (2.19), которые лежат соответственно в интервалах $-2 < g < -1$, $-1 < g < 1$ и $1 < g < 2$. Вся область допустимых значений этого параметра, определяемого равенством (2.16), есть $-2 \leq g \leq 2$.

Выполнение (2.19) обращает в нуль матрицу M . Поэтому в качестве собственного можно выбрать произвольный ненулевой “вектор” $\mathcal{A}$ (или $\mathcal{B}$), в частности, как в изложенных ниже примерах, можно положить $A = 0$ (при этом $\tilde{A}, B, \tilde{B}$ отличны от нуля). Этот факт связан с поворотной симметрией мировой поверхности (2.6), (2.7).

При выполнении условия (2.19) два уравнения системы (2.17) становятся равносильными, и с помощью любого из них можно определить, например, B по заданному A или $\tilde{A}, \tilde{B}$ по заданным произвольно A и B :

$$\tilde{A} = -Ks \cdot (rA + 2B), \quad \tilde{B} = K \cdot [2(rc + s)A + rsB], \quad (2.20)$$

где

$$K = K(g, \theta) = \frac{g^2 - 1}{2 \sin \theta} = Z \cdot (4 - g^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad Z = \text{sign}((g^2 - 1) \sin \theta).$$

Выражение $2 \sin \theta = \pm(g^2 - 1)\sqrt{4 - g^2}$ следует из (2.19).

Полученные решения имеют физический смысл, если выполнены условия ортонормальной калибровки (1.7), записанные в эквивалентном виде (2.10)–(2.13). Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что в случае (2.19), (2.20) как условие (2.12), так и условие (2.13) выполняются тождественно. Подставив (2.20) в (2.11) и в уравнение (2.10) с $i = 1$, а также выразив с помощью (2.15) параметр $b = a\theta/(3\pi\omega)$, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{\theta^2}{(3\pi\omega)^2} \right) &= \frac{4(gc + 2)}{(4 - g^2)s} [(rc + s)A^2 + rsAB + sB^2], \\ a^2\theta/(3\pi\omega^3) &= 2K(g, \theta) [(rc + s)A^2 + rsAB + sB^2]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Отсюда следует не содержащее амплитуд соотношение

$$\frac{3\pi\omega\theta}{9\pi^2\omega^2 + \theta^2} = \text{sign}((g^2 - 1) \sin \theta) \cdot \frac{\sqrt{4 - g^2}}{2} \frac{\sin \pi\omega}{2 + g \cos \pi\omega}. \quad (2.22)$$

Это трансцендентное уравнение определяет для рассматриваемых движений набор допустимых частот ω , если заданы параметры g и θ , которые, напомним, связаны соотношением (2.19). Величины g и θ можно выразить через ω с помощью (2.16), (2.19) и подставить в (2.22), однако это не облегчает анализ данных уравнений.

Простейшая схема построения решений поставленной задачи выглядит следующим образом. Задается величина g в одном из трех интервалов I_j : $(-2, -1)$, $(-1, 1)$ или $(1, 2)$. С помощью (2.19) определяется однозначно $\cos \theta$, что соответствует счетному набору значений угла θ_k . Для каждого из них уравнение (2.22) позволяет найти частоту ω , выбрав один из счетного множества корней ω_n (правая часть (2.22) – периодическая функция, значения которой лежат на отрезке $[-1/2; 1/2]$). Зная ω , с помощью (2.16) можно найти Q . Таким образом, три дискретных параметра j, k и n , выбираемые произвольно, обеспечивают богатый спектр возможных решений.

Задав амплитуды A и B (можно положить $A = 0, B \neq 0$), определяем, используя любое из уравнений (2.21), величины a и $b = a\theta/(3\pi\omega)$, а с помощью (2.20) и (2.8) – остальные значения $A_i, B_i, \tilde{A}_i, \tilde{B}_i$. После этого функции (2.7) и мировая поверхность (2.6) будут окончательно определены.

Чтобы иметь представление о построенной мировой поверхности, достаточно рассмотреть ее сечение плоскостью $t = t_0 = \text{const}$ (криволинейный треугольник). Непросто получить явный вид этого сечения, например, в “калибровке” $A = 0$ (этот выбор, подразумеваемый здесь и ниже, влияет на ориентацию, но не на форму кривой) при

$\sigma \in [0, \pi]$:

$$\begin{aligned} x &= B \left(\sin \omega \sigma \cdot \cos \frac{\theta}{3\pi} \sigma + K [g \sin \omega \sigma - 2 \sin \omega (\pi - \sigma)] \sin \frac{\theta}{3\pi} \sigma \right), \\ y &= B \left(-\sin \omega \sigma \cdot \sin \frac{\theta}{3\pi} \sigma + K [g \sin \omega \sigma - 2 \sin \omega (\pi - \sigma)] \cos \frac{\theta}{3\pi} \sigma \right). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Используя (2.8), аналогичные выражения можно получить и для двух других сторон криволинейного треугольника. Так, в частности, при $\sigma \in [-\pi, 0]$ в (2.23) достаточно заменить $\tilde{u}(\sigma)$ на $\tilde{u} = BK [-g \sin \omega \sigma - 2 \sin \omega (\pi + \sigma)]$, сохранив $u(\sigma) = B \sin \omega \sigma$.

Рис. 2

Характерный вид данных сечений мировой поверхности показан на рис. 2 и 3 (на рисунках в целях экономии места изображено по несколько кривых, “вложенных” одна в другую за счет выбора амплитуды B).

Эти криволинейные треугольники вращаются в плоскости xu с угловой частотой $\Omega = \omega/a$. При этом кварки движутся по окружности радиуса R со скоростью v , где

$$R = \frac{2|B \sin \pi \omega|}{\sqrt{4 - g^2}}, \quad v = \Omega R = \left| \frac{\theta}{3\pi \omega} \frac{2 \sin \pi \omega}{\sqrt{4 - g^2}} \right|^{\frac{1}{2}}. \quad (2.24)$$

Если $A \neq 0$, то здесь и ниже следует заменить sB^2 на выражение в квадратных скобках в (2.21). Частота ω , определяемая уравнением (2.22), должна удовлетворять условию $v \leq 1$, которое равносильно требованию неотрицательности квадрата введенной в (2.1) величины $C = Qm/\gamma$:

$$C^2 = \dot{X}^2|_{\sigma=\sigma_i} = a^2(1 - v^2) = \omega^2 R^2(v^{-2} - 1) \geq 0.$$

Проводя классификацию движений, отметим, что замена θ на $-\theta$ меняет направление обхода криволинейного треугольника при изменении σ от $-\pi$ до 2π , а замена ω на $-\omega$ меняет направление вращения (если θ и ω удовлетворяют (2.22), то этому уравнению удовлетворяют и $-\theta$, и $-\omega$).

Стороны полученного криволинейного треугольника являются гладкими кривыми без особенностей (рис. 2) в том и только том случае, когда после выбора упоминавшихся j, k, n соответствующие параметры заключены в пределах $1 < g \leq 2$, $0 < |\theta| \leq \pi$,

$0 < |\omega| \leq 1$, и при этом ω – минимальный по модулю ненулевой корень (2.22), что отвечает условию $Q > 0$. Такие движения системы будем называть простыми.

На рис. 2 для простых движений системы с фиксированным значением $B = 1$ показана зависимость формы криволинейного треугольника от параметра, характеризующего скорость вращения. В качестве такового можно взять v , g , $|\theta|$ или $|\omega|$ – все четыре величины для простых движений связаны взаимно однозначно (вообще говоря, эта взаимосвязь зависит от выбора j , k , n). Внутренний (малый) треугольник на рисунке характеризуется значением $g = 1.05$, следующие в порядке возрастания – $g = 1.3$, 1.6 и 1.95 . В том же порядке перечислим соответствующие значения $v \simeq 0.183, 0.462, 0.685, 0.953$; $\theta \simeq 0.087, 0.552, 1.21, 2.74$ и $\omega \simeq 0.102, 0.275, 0.451, 0.791$. Нетрудно построить и аналогичное семейство треугольников с фиксированным значением m (точнее, $m/\gamma = \text{const}$). Соответствующая картинка будет отличаться более сильной зависимостью размера треугольника R от скорости v : если $v \rightarrow 1$ при условии $m/\gamma = \text{const}$, то величина $R \rightarrow \infty$.

В пределе $v \rightarrow 0$, что для простых движений равносильно $g \rightarrow 1 + 0$, $\theta \rightarrow 0$ или $\omega \rightarrow 0$ (при этом также $Q = \omega s/(g + 2c) \rightarrow 0$, а при фиксированном значении C масса $m \rightarrow \infty$), криволинейный треугольник стремится к прямолинейному.

Рис. 3

В противоположном пределе $v \rightarrow 1$, $g \rightarrow 2$, $|\theta| \rightarrow \pi - 0$, $|\omega| \rightarrow 1 - 0$ при фиксированном значении B или R (этому соответствует масса $m \rightarrow 0$) предельным положением данного криволинейного треугольника будет трехзвенная гипоциклоида

$$x = B \left(2 \sin \frac{2}{3} \sigma - \sin \frac{4}{3} \sigma \right), \quad y = -B \left(2 \cos \frac{2}{3} \sigma + \cos \frac{4}{3} \sigma \right), \quad \sigma \in [-\pi, 2\pi]. \quad (2.25)$$

Гипоциклоида – траектория точки окружности, катящейся внутри неподвижной окружности большего радиуса. В случае (2.25) отношение этих радиусов равно 3.

Предельный переход к (2.25), а также движения замкнутых безмассовых струн, являющиеся вращениями гипоциклоид, рассмотрены в приложении. Здесь же отметим, что кривые вида (2.23), изображенные на рис. 2 и 3, также составлены из фрагментов гипоциклоид. Любопытно, что линия с параметризацией (2.23) при $\sigma \in \mathbb{R}$ является гипоциклоидой тогда и только тогда, когда параметры ω , θ и g связаны условием (2.22). Для этой гипоциклоиды отношение радиусов окружностей $2(1 - |\theta/(3\pi\omega)|)^{-1}$ не обязательно рационально.

На рис. 3 приведены примеры движений системы, не относящиеся к категории простых (аналогичные движения имеют место и для струны, моделирующей мезон [3, 9]).

Они характеризуются наличием внутренних точек струны, движущихся со скоростью света. На мировых линиях этих точек метрика имеет особенности вида $\dot{X}^2 = X'^2 = 0$. Число таких особенностей на каждой из сторон криволинейного треугольника при $m > 0$ равно целой части $|\omega|$. На рис. 3 эти особенности, являющиеся точками возврата гипциклоид, не следует путать с материальными точками (положениями кварков). В последних фрагменты струны соединены под ненулевым углом.

Внутренний “треугольник” с самопересечениями на рис. 3 характеризуется значениями параметров $g = 0$, $\theta = \pi/2$, $\omega \simeq 1.096$. Он представляет класс топологически родственных мировых поверхностей с $-1 < g < 1$, $|\theta| < \pi$, $1 < |\omega| < 2$. К другому классу относятся средний ($g = 1.5$, $\theta \simeq 5.31$, $\omega \simeq 1.12$) и внешний ($g = 0$, $\theta = 5\pi/2$, $\omega \simeq 1.35$) “треугольники” на рис. 3. Амплитуды B выбраны из соображений удобства.

Остальные классы движений модели содержат две и более особых точек на каждой из сторон криволинейного “треугольника”, составленного из трех отрезков одной и той же гипциклоиды. При этом следует учесть, что физически допустимые частоты ω (корни уравнения (2.22)) чередуются с теми, которые соответствуют отрицательным значениям масс m .

Проведенная классификация равномерных вращений системы с $m_1 = m_2 = m_3 = m$ проясняет ситуацию и для общего случая произвольных масс кварков. В частности, следует ожидать (и анализ это подтверждает), что равномерно вращающаяся струна, нагруженная тремя различными массами, представляет собой криволинейный треугольник, составленный, как и ранее, из отрезков гипциклоиды, однако в данном случае эти отрезки различны. Очертим кратко изменения, которые нужно внести в изложенную выше схему описания модели в случае, когда условия (2.15) не выполнены.

Система (2.17) при этом примет вид

$$M_1 \mathcal{A} = M_2 \mathcal{B}, \quad M_3 \mathcal{A} = M_4 \mathcal{B}, \quad (2.26)$$

где

$$\begin{aligned} M_1 &= (r_1 s_0 - c_0) E + (c_3 - r_2 c s_2) U, \\ M_2 &= -s_0 E - (s_3 - r_2 s s_2) U, \\ M_3 &= [(1 - r_1 r_3) s_0 + (r_1 + r_3) c_0] E + (s_3 + r_2 c c_2) U, \\ M_4 &= (r_3 s_0 - c_0) E + (c_3 - r_2 s c_2) U, \\ r_i &= \omega / Q_i, \quad \delta_0 = -\sigma_0, \quad \delta_2 = \sigma_3 - \pi, \\ \delta_3 &= \sigma_3, \quad c_i = \cos \omega \delta_i, \quad s_i = \sin \omega \delta_i. \end{aligned}$$

Из (2.26) по-прежнему следует (2.18), причем матрица $M = M_1 M_4 - M_2 M_3$ пропорциональна U . Приравняв коэффициент пропорциональности к нулю, получим после преобразований обобщение условия (2.19):

$$2 \cos \theta = g_1 + g_2 + g_3 - g_1 g_2 g_3, \quad (2.27)$$

где

$$g_1 = \frac{r_1 s_0 s - s_0 c - s c_0}{s_2}, \quad g_2 = \frac{r_2 s s_2 - s c_2 - s_2 c}{s_0}, \quad g_3 = \frac{r_3 s_0 s_2 - s_0 c_2 - s_2 c_0}{s}.$$

Если условие (2.27) выполнено, то с помощью любого из уравнений (2.26) можно выразить $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ через заданные произвольно A и B . Эти величины следует подставить в уравнения (2.10)–(2.13), порождаемые условиями ортонормальности (1.7). При этом соотношения (2.12) и (2.13) (обращавшиеся в случае (2.15) в тождества) выполняются только тогда, когда параметры ω , δ_i и g_i связаны следующим образом:

$$\frac{g_3 - g_2}{g_2 g_3 - 1} = \frac{s c_0 - s_0 c}{s_2}, \quad \frac{g_1 - g_3}{g_1 g_3 - 1} = \frac{s_2 c - s c_2}{s_0}, \quad \frac{g_2 - g_1}{g_1 g_2 - 1} = \frac{s_0 c_2 - s_2 c_0}{s}. \quad (2.28)$$

Первое из этих условий следует из (2.12), второе – из (2.13), третье – следствие первых двух.

При выполнении (2.28) выражения для $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ принимают вид, подобный (2.20):

$$\tilde{A} = -K^*(r_1 A + 2B), \quad \tilde{B} = K^* \left[2s^{-2} \left(r_1 s c - c^2 + \frac{r_1 s - 2c}{r_2 s - 2c} \right) A + r_1 B \right],$$

где $K^* = s_0 s (g_2 g_3 - 1) / (2s_2 \sin \theta)$. Подставив эти выражения в (2.11) и (2.10), найдем с учетом (2.14) обобщение условия (2.22):

$$\frac{\Delta_\sigma \omega \theta}{\Delta_\sigma^2 \omega^2 + \theta^2} = \frac{4s_0 s s_2 (g_2 g_3 - 1) \sin \theta}{4s_2^2 \sin^2 \theta + (4 + r_1^2) s_0^2 s^2 (g_2 g_3 - 1)^2}, \quad (2.29)$$

где $\Delta_\sigma = \sigma_3 - \sigma_0$, а также (для случая $A = 0$) значения

$$a = \sqrt{\omega^3 \Delta_\sigma s_0 s (g_2 g_3 - 1) (s_2 \theta \sin \theta)^{-1} B^2}, \quad b = a \theta / (\Delta_\sigma \omega).$$

Параметры ω , θ , δ_i и g_i определяются как решения системы трансцендентных уравнений (2.27), (2.28) и (2.29). Классификация соответствующих движений по сравнению со случаем (2.15) усложняется; в частности, возможны конфигурации с различным числом особенностей на сторонах криволинейного “треугольника”. Вынося за рамки данной работы подробный анализ ситуации, отметим, что среди этих движений можно выделить простые – не содержащие особенностей $\dot{X}^2 = 0$. В важном для приложений, например для описания нуклонов, случае, когда массы двух кварков из трех совпадают (удобно положить $m_1 \neq m_2 = m_3$, при этом $\sigma_0 = -\pi$, $g_1 \neq g_2 = g_3$), простые движения характеризуются следующей областью изменения параметров модели: $0 < |\theta| \leq \pi$, ω – минимальный по модулю ненулевой корень (2.29), $1 < g_1$, $1 < g_2 = g_3 < 1 + 2/g_1$.

3. ЭНЕРГИЯ И МОМЕНТ РАССМАТРИВАЕМЫХ СОСТОЯНИЙ

Приложение струнной модели “треугольник” к описанию барионов дает возможность установить соответствие между решениями вида (2.6) и барионными состояниями с одинаковым кварковым составом, лежащими на некоторой траектории Редже. Ставя целью краткое обсуждение здесь этой возможности, найдем связь между энергией E и угловым моментом J состояния (2.6). Подобная задача для струнной модели мезона решена в [8].

Следуя [1, 8], введем параметризацию, в которой $\tau = t$, и лагранжиан в (1.1) запишется в виде

$$\mathcal{L} = -\gamma \int_{\sigma_0}^{\sigma_3} \tilde{L}(\bar{X}_t, \bar{X}_\sigma) d\sigma - \sum_{i=1}^3 m_i \sqrt{1 - \bar{X}_t^2(t, \sigma_i)},$$

где

$$\tilde{L} = [(\overline{X}_t \overline{X}_\sigma)^2 + \overline{X}_\sigma^2 (1 - \overline{X}_t^2)]^{\frac{1}{2}},$$

$$\overline{X} = \{X(t, \sigma), Y(t, \sigma)\}, \quad \overline{X}_t = \partial_t \overline{X}, \quad \overline{X}_\sigma = \partial_\sigma \overline{X},$$

скалярное произведение евклидово.

Стремясь к простейшему способу вычислений, оставим прежний параметр σ на мировой поверхности (2.6). В координатах t, σ условия ортонормальной калибровки (1.7) не выполнены, поэтому канонический импульс выражается через $\overline{X}_t$ нелинейно:

$$\begin{aligned} \overline{P}(t, \sigma) = \delta \mathcal{L} / \delta \overline{X}_t = & -\gamma [(\overline{X}_t \overline{X}_\sigma) \overline{X}_\sigma - \overline{X}_\sigma^2 \overline{X}_t] / \tilde{L} + \\ & + \sum_{i=1}^3 m_i \overline{X}_t (1 - \overline{X}_t^2)^{-1/2} \delta(\sigma - \sigma_i). \end{aligned}$$

Энергия системы имеет вид

$$E = \int_{\sigma_0}^{\sigma_3} (\overline{X}_t \overline{P}) d\sigma - \mathcal{L} = \gamma \int_{\sigma_0}^{\sigma_3} \frac{\overline{X}_\sigma^2 d\sigma}{\sqrt{(\overline{X}_t \overline{X}_\sigma)^2 + \overline{X}_\sigma^2 (1 - \overline{X}_t^2)}} + \sum_{i=1}^3 \frac{m_i}{\sqrt{1 - \overline{X}_t^2(t, \sigma_i)}}.$$

Подстановка в эту формулу решения (2.6) с учетом (2.9) и (2.10) приводит к соотношениям

$$\overline{X}_\sigma^2 = (a^2 - b^2) (1 - \overline{X}_t^2) = (a^2 - b^2) b^{-1} (\overline{X}_t \overline{X}_\sigma), \quad \tilde{L} = \frac{a}{a^2 - b^2} \overline{X}_\sigma^2$$

и следующему выражению для энергии:

$$E = \gamma \Delta_\sigma \frac{a^2 - b^2}{a} + \sum_{i=1}^3 \frac{m_i}{\sqrt{1 - v_i^2}} = \gamma \Delta_\sigma a \left[1 - \left(\frac{\theta}{\Delta_\sigma \omega} \right)^2 \right] + \sum_{i=1}^3 \frac{m_i}{\sqrt{1 - v_i^2}}, \quad (3.1)$$

где $v_i^2 = \overline{X}_t^2(t, \sigma_i)$ в частном случае определяется формулой (2.24).

Аналогичным образом находится угловой момент состояния (2.6):

$$J = \int_{\sigma_0}^{\sigma_3} (X P_y - Y P_x) d\sigma = \gamma \omega \int_{\sigma_0}^{\sigma_3} \left[u^2(\sigma) + \tilde{u}^2(\sigma) - \frac{b^2}{\omega^2} \right] d\sigma + \frac{a}{\omega} \sum_{i=1}^3 m_i v_i^2 (1 - v_i^2)^{-1/2}.$$

Здесь учтено, что

$$X Y_\sigma - Y X_\sigma = \frac{ab}{\omega} (1 - \overline{X}_t^2), \quad X Y_t - Y X_t = \frac{a}{\omega} \overline{X}_t^2 = \frac{\omega}{a} (u^2 + \tilde{u}^2).$$

Вычисляя интеграл от $u^2 + \tilde{u}^2$ и используя при этом (2.6)–(2.10), получим следующее выражение для момента:

$$J = \frac{a}{2\omega} \left(\gamma \Delta_\sigma \frac{a^2 - b^2}{a} + \sum_{i=1}^3 \frac{m_i v_i^2}{\sqrt{1 - v_i^2}} \right) = \frac{1}{2\Omega} \left(E - \sum_{i=1}^3 m_i \sqrt{1 - v_i^2} \right). \quad (3.2)$$

Последнее соотношение, связывающее E , J и частоту вращения $\Omega = \omega/a$, имеет практически тот же вид, что и в струнной модели мезона [8].

Выражения (3.1) и (3.2) неявным образом задают нелинейную связь между энергией и моментом рассматриваемой системы. При этом состояние системы зависит не только от непрерывного параметра Ω , ω или θ , характеризующего скорость вращения, но и от набора дискретных параметров, определяющих число особенностей и конфигурацию “треугольника”.

Полученная в результате численного анализа выражений (3.1) и (3.2) зависимость момента J от квадрата энергии E^2 (другими словами, от квадрата массы $M^2 = E^2$ составной частицы) показана на рис. 4 для случая простых движений системы. Три кривые соответствуют трем различным значениям массы m_1 : кривая 1 – $m_1 = 0.05$, 2 – $m_1 = 0.3$ и 3 – $m_1 = 0.6$. Для всех трех графиков значения $m_2 = m_3 = 0.3$, $\gamma = 3/(16\pi)$.

Рис. 4

Рассмотрим с помощью асимптотик связь между E и J для простых движений. Исследуем два предела – нерелятивистский и ультрарелятивистский. Первый характеризуется неравенствами $v_i \ll 1$, $|\omega| \ll 1$, $|\theta| \ll 1$. Выбрав в качестве малого параметра ω , найдем с помощью (2.27), (2.28), что при $\omega \rightarrow 0$ величины $g_i \rightarrow 1 + 0$, и предельные значения параметров δ_i соотносятся следующим образом: $m_1/\delta_2 = m_2/\delta_0 = m_3/\pi$. В этом пределе треугольник стремится по форме к прямолинейному, а энергия системы (3.1) имеет вид

$$E - \sum_{i=1}^3 m_i = \frac{3}{2} m_1 m_2 m_3^{-1} \pi^2 \omega^2 + o(\omega^2),$$

причем в кинетической энергии кварков сосредоточена третья часть этого выражения. Исключая ω в (3.1) и (3.2), получим соотношение

$$J \simeq \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{m_1 m_2 m_3}}{\gamma (m_1 + m_2 + m_3)} \left(E - \sum_{i=1}^3 m_i\right)^{\frac{3}{2}}, \quad v_i \ll 1, \quad |\omega| \ll 1. \quad (3.3)$$

В ультрарелятивистском пределе $v_i \rightarrow 1$, $|\omega| \rightarrow 1 - 0$, $|\theta| \rightarrow \pi - 0$ поведение E и J для случая одинаковых масс кварков можно исследовать с помощью (П.1) (см. ниже). При $\varepsilon_g \rightarrow 0$ имеет место предельное соотношение

$$J \simeq \frac{3}{16\pi\gamma} E^2 + \alpha_0, \quad v_i \rightarrow 1. \quad (3.4)$$

Как видим, в этом пределе зависимость принимает стандартный вид $J \simeq \alpha' E^2 + \alpha_0$, причем коэффициент наклона реджевских траекторий для простых движений модели отличается от значения Намбу $\alpha' = 1/(2\pi\gamma)$ множителем $3/8$. Аналогичный предельный множитель для струнной модели бариона “звездочка” [5] равен $2/3$. Необходимость соответствия экспериментальному значению α' приводит к тому, что в модели бариона “треугольник” эффективное значение натяжения струны γ должно быть примерно вдвое меньше, чем в модели “звездочка” [5] или в струнной модели мезона [2, 8]. На рис. 4 выбор $\gamma = 3/(16\pi)$ соответствует наблюдаемому значению $\alpha' \simeq 1 \text{ ГэВ}^{-2}$ для барионных траекторий Редже, что с некоторой долей условности позволяет считать, что m_i и E для приведенных кривых измеряются в ГэВ, а J – в единицах $\hbar$.

В пределе $v_i \rightarrow 1$ при любом конечном отношении масс кварков криволинейный треугольник стремится к гипоциклоиде (2.25), доля кинетической энергии кварков в (3.1) стремится к нулю и по-прежнему справедлива асимптотика (3.4).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Ввиду дефицита места автор в ряде случаев ограничивался демонстрацией возможностей модели, не углубляясь в подробности. В частности, более обстоятельного изложения требует классификация различных содержащих особенности состояний системы с произвольным отношением масс кварков, а также анализ зависимости углового момента (3.2) от энергии (3.1) для таких состояний. Заметим, что при переходе от одного состояния к другому, т.е. при переходе к иной (в топологическом смысле) конфигурации струны момент и энергия меняются скачкообразно.

Соотношения (3.1)–(3.4) имеют близкие аналоги в струнной модели мезона, исследованные в работе [8]. Анализ этих соотношений дает возможность модельной оценки значений масс кварков m_i .

ПРИЛОЖЕНИЕ

Предельный переход к безмассовой замкнутой струне

Для простых движений (рис. 2) осуществление предельного перехода $v \rightarrow 1$, $g \rightarrow 2$, $|\theta| \rightarrow \pi - 0$, $|\omega| \rightarrow 1 - 0$, $m \rightarrow 0$ требует раскрытия неопределенности в правой части (2.22). Введя малые отклонения ε_ω , ε_g , подставив в это соотношение $\omega = 1 - \varepsilon_\omega$, $g = 2 - \varepsilon_g$, получим в пределе

$$\frac{3}{10} = \lim_{\varepsilon_g \rightarrow 0} \pi \varepsilon_\omega \sqrt{\varepsilon_g} (\varepsilon_g + \pi^2 \varepsilon_\omega^2)^{-1}.$$

Случаю $m > 0$ отвечает $\lim_{\varepsilon_g \rightarrow 0} \pi \varepsilon_\omega / \sqrt{\varepsilon_g} = 3$. С помощью следующих членов разложения ω и θ в (2.22) получим более точную оценку:

$$\omega = 1 - \frac{3}{\pi} \varepsilon_g^{1/2} + \frac{15}{8\pi} \varepsilon_g^{3/2} + o(\varepsilon_g^2), \quad \theta = \pi - 3\varepsilon_g^{1/2} + o(\varepsilon_g), \quad \varepsilon_g \rightarrow +0. \quad (\text{П.1})$$

Подстановка (П.1) в (2.20), (2.8) дает предельные выражения при $\varepsilon_g \rightarrow +0$ (в случае $A = 0$): $u(\sigma) = B \sin \sigma$, $\tilde{u}(\sigma) = -3B \cos \sigma$, $\sigma \in [-\pi, 2\pi]$, приводящие к мировой поверхности (2.6)

$$X^\mu = B \{ t_0 + 3\tau + \sigma; \sin \sigma \cos \tau + 3 \cos \sigma \sin \tau; \sin \sigma \sin \tau - 3 \cos \sigma \cos \tau \}. \quad (\text{П.2})$$

Сечение этой поверхности плоскостью $t = \text{const}$ — гипоциклоида вида (2.25).

Для более сложных движений системы можно получить в качестве предельных положений криволинейных треугольников при $m \rightarrow 0$ гипоциклоиды с отношением радиусов окружностей 6 (см. рис. 3), 9, 9/2 и т.д. Абстрагируясь от исходной модели, будем рассматривать эти состояния как движения замкнутой безмассовой релятивистской струны. Для этого случая нетрудно составить обобщающее (П.2) выражение, характеризующее вращение гипоциклоиды n -го порядка:

$$X^\mu = B\{n\tau + k\sigma; k \sin \sigma \cos \tau + n \cos \sigma \sin \tau; k \sin \sigma \sin \tau - n \cos \sigma \cos \tau\}, \quad (\text{П.3})$$

где n, k целые, $n \geq 2$, $|k| \leq n - 2$, $n - k$ четно, $\sigma \in [0, \pi n]$.

Это решение уравнения (1.8) удовлетворяет условиям ортонормальности (1.7) и условию замыкания вида (1.2): $X^\mu(\tau, 0) = X^\mu(\tau - \pi k, \pi n)$. Особые точки $\sigma = \pi j$ движутся со световой скоростью. Решение (П.3) допускает обобщения, связанные с движениями в пространстве Минковского.

Сечение поверхности (П.3) плоскостью $t = \text{const}$ — гипоциклоида с отношением радиусов неподвижной и подвижной окружностей $2n/(n - |k|)$. В случае $|k| = n - 2$ это отношение равно n и кривая не имеет самопересечений. Случаю $|k| \leq n - 4$ соответствует звездобразная гипоциклоида с самопересечениями.

Список литературы

- [1] *B. M. Barbashov, V. V. Nesterenko.* Introduction to the relativistic string theory. Singapore: World Scientific, 1990; *Б. М. Барбашов, В. В. Нестеренко.* Модель релятивистской струны в физике адронов. М.: Энергоатомиздат, 1987.
- [2] *A. Chodos, C. B. Thorn.* Nucl. Phys. B. 1974. V. 72. № 3. P. 509–522.
- [3] *Г. С. Шаров.* ТМФ. 1996. Т. 107. № 1. С. 86–99.
- [4] *X. Artru.* Phys. Rep. C. 1983. V. 97. № 2, 3. P. 147–171.
- [5] *М. С. Плющай, Г. П. Пронько, А. В. Разумов.* ТМФ. 1985. Т. 63. № 1. С. 97–112; *С. В. Клименко, В. Н. Кочин, М. С. Плющай и др.* ТМФ. 1985. Т. 64. № 2. С. 245–258.
- [6] *B. M. Barbashov, V. V. Nesterenko, A. M. Chervyakov.* Lett. Math. Phys. 1978. V. 2. P. 291–295.
- [7] *Б. М. Барбашов, Г. С. Шаров.* ТМФ. 1994. Т. 101. № 2. С. 253–271.
- [8] *B. M. Barbashov.* Classical dynamics of rotating string with massive ends. Preprint E2-94-444. Dubna: JINR, 1994.
- [9] *В. П. Петров, Г. С. Шаров.* ТМФ. 1996. Т. 109. № 2. С. 187–201.

Поступила в редакцию 14.I.1997 г.,
после доработки 3.VI.1997 г.

G. S. Sharov

STRING BARIONIC MODEL “TRIANGLE”

A considered barionic model consists of three point-like masses (quarks) bounded pairwise by relativistic strings that form a curvilinear triangle. Classical solutions for this model, corresponding to a planar uniform rotation about the system center of mass, are found and investigated. Together with the simplest state—rotating the curvilinear triangle—more complicated configurations are possible, which contain a set of internal massless points moving with the speed of light. In the zero quark mass limit the closed string has a form of a rotating hypocycloid.

The possibility of describing barionic states on the Regge trajectories by these solutions is considered.