Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Васильев, М. И. Вязовский, Доказательство незамкнутости модели Гросса–Нэве в размерной регуляризации $d = 2 + 2\varepsilon$, *ТМФ*, 1997, том 113, номер 1, 85–99

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1067>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 08:09:49

А. Н. Васильев*, М. И. Вязовский*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕЗАМКНУТОСТИ МОДЕЛИ ГРОССА–НЭВЕ В РАЗМЕРНОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ $d = 2 + 2\varepsilon$

Показано, что простейшая четырехфермионная модель Гросса–Нэве с размерной регуляризацией $d = 2 + 2\varepsilon$ не является внутренне замкнутой, так как ее трехпетлевые вершинные диаграммы генерируют в качестве контрчлена “старшее” (“evanescent” [1]) взаимодействие $V_3 = (\bar{\psi}\gamma_{ikl}^{(3)}\psi)^2/2$, где $\gamma_{i_1\dots i_n}^{(n)}$ – полностью антисимметризованное по индексам $i_1\dots i_n$ произведение γ -матриц, которое должно считаться отличным от нуля в нецелой размерности. Поэтому расчеты $(2 + \varepsilon)$ -разложений критических индексов η и ν в рамках простой модели Гросса–Нэве справедливы лишь с точностью до ε^4 для η и ε^3 для ν . В более высоких порядках по ε уже необходимо учитывать генерацию новых вершин, причем не только V_3 , но и других V_n , возникающих от интерференции V_3 с основным взаимодействием V_0 модели.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследованию кирального фазового перехода в U_N -симметричной безмассовой модели Гросса–Нэве (ГН) [2] посвящено много работ. Соответствующие критические индексы η и ν ($\Delta_\psi = (d - 1 + \eta)$ и $\Delta_\tau = 1/\nu$ – критические размерности поля и температуры) вычисляются в форме разложений: $(2 + \varepsilon)$ [3–6], $(4 - \varepsilon)$ [7] и $1/n$ [8–11]. Для расчетов в $(2 + \varepsilon)$ -схеме используется ГН-модель с размерной регуляризацией $d = 2 + 2\varepsilon$. Ее неренормированное действие в евклидовом случае имеет вид (при записи $\exp S$ в функциональных интегралах)

$$S(\phi) = \bar{\psi}\hat{\partial}\psi + \frac{g_0}{2}(\bar{\psi}\psi)^2, \quad (1)$$

где g_0 – затравочный заряд ГН-модели, а интегрирование по d -мерной координате x и суммирование по “изотопическому индексу” $a = 1, \dots, N$ евклидовых спиноров $\phi \equiv \{\bar{\psi}_a, \psi_a, a = 1, \dots, N\}$ во всех квадратичных формах типа $\bar{\psi} \dots \psi$ (U_N -симметрия) подразумевается.

ГН-модель (1) логарифмична при $d = 2$ и предполагается мультипликативно ренормируемой в размерности $d = 2 + 2\varepsilon$. На этом предположении основаны все расчеты ее ренормгрупповых (РГ) функций и $(2 + \varepsilon)$ -разложений соответствующих критических индексов [3–6].

В целой размерности $d = 2$ с не выводящей из этой размерности регуляризацией мультипликативная ренормируемость ГН-модели гарантирована ее специфической

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

U_{2N} -симметрией [1]. Но в размерной регуляризации $d = 2 + 2\varepsilon$ проблема нетривиальна, так как для алгебры γ -матриц (евклидовых) тогда сохраняется лишь основное коммутационное соотношение $\gamma_i \gamma_k + \gamma_k \gamma_i = 2\delta_{ik}$, а все полностью антисимметризованные (As) по индексам произведения γ -матриц

$$\gamma_A^{(n)} = \text{As}[\gamma_{i_1} \cdot \dots \cdot \gamma_{i_n}], \quad A \equiv i_1 \dots i_n, \quad (2)$$

приходится считать отличными от нуля независимыми объектами [12]. Поэтому в нецелой размерности существует бесконечное число U_N -симметричных независимых четырехфермионных (4F) взаимодействий

$$V = \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma_A^{(n)} \psi \cdot \bar{\psi} \gamma_A^{(n)} \psi, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

(по векторным индексам $A \equiv i_1 \dots i_n$ осуществляется свертка, коэффициент $1/2$ введен для удобства). Все взаимодействия (3) логарифмичны при $d = 2$ и могут смешиваться при ренормировке в размерной регуляризации. В целой размерности $d = 2$ отличны от нуля лишь три “младших” вершины (3) с $n = 0, 1, 2$ (в такой терминологии ГН-модели (1) соответствует взаимодействию V_0), но при $d = 2 + 2\varepsilon$ все вершины (3) следует считать независимыми и отличными от нуля.

Поэтому мультипликативная ренормируемость в $(2 + \varepsilon)$ -схеме будет заведомо выполняться только для “полной 4F-модели” [1] с неренормированным действием

$$S(\phi) = \bar{\psi} \hat{\partial} \psi + \sum_{n=0}^{\infty} g_{0n} V_n, \quad (4)$$

содержащим бесконечное число независимых затравочных зарядов $g_0 = \{g_{0n}, n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Соответствующее функционалу (4) базовое действие в размерности $d = 2 + 2\varepsilon$ имеет следующий вид:

$$S_B(\phi) = \bar{\psi} \hat{\partial} \psi + \mu^{-2\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} g_n V_n, \quad (5)$$

где μ – ренормировочная масса, $g = \{g_n, n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$ – бесконечный набор независимых безразмерных ренормированных зарядов. Ренормированное действие получается введением в (5) независимых констант ренормировки при всех слагаемых, а именно:

$$S_R(\phi) = Z \bar{\psi} \hat{\partial} \psi + \mu^{-2\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} Z_n g_n V_n, \quad (6)$$

где $Z = Z_\psi^2$, $Z_n = Z_\psi^4 Z_{g_n}$, Z_ψ – константа ренормировки поля ψ , Z_{g_n} – константа ренормировки заряда g_n . Такая “полная 4F-модель” обсуждалась в работах [1, 13, 14].

До сих пор во всех конкретных расчетах РГ-функций ГН-модели считалось, что она является мультипликативно ренормируемой (тем самым внутренне замкнутой) в $(2 + \varepsilon)$ -схеме, т.е. во всех функционалах (4)–(6) можно ограничиться лишь вкладом ГН-взаимодействия V_0 . Это эквивалентно предположению, что взаимодействие V_0 не

порождает других взаимодействий (3) в качестве контрчленов. До двух петель включительно это действительно правильно: однопетлевые и двухпетлевые вершинные диаграммы ГН-модели в совокупности порождают лишь контрчлены, кратные V_0 .

Трехпетлевой расчет вершинных контрчленов ГН-модели и соответствующего вклада в β -функцию ее заряда был выполнен в работах [4, 5]. В принципе по формальному подсчету числа γ -матриц трехпетлевые вершинные диаграммы ГН-модели могут порождать все контрчлены от V_0 до V_3 включительно, причем особую роль играют $4! = 24$ диаграммы типа “лестницы с четырьмя перекладинами”, которые дают лишь контрчлены типа V_1 или V_3 . В работах [4, 5] мультипликативность ренормировки ГН-модели на трехпетлевом уровне не подвергалась сомнению: автор [4] просто исходил из этого предположения, поэтому игнорировал указанные выше 24 лестничные диаграммы, которые не могут порождать контрчлены типа V_0 . Авторы работы [5] утверждали лишь то, что они проверили явным вычислением отсутствие контрчленов типа V_1 , не упоминая при этом о возможности появления контрчлена типа V_3 , который мог бы порождаться указанными выше 24 лестничными диаграммами. Более подробных пояснений по этому поводу в [5] нет.

Основным результатом данной работы является следующее утверждение: вопреки предположению автора [4] (и утверждениям авторов [5]) ГН-модель в $(2 + \varepsilon)$ -схеме уже на трехпетлевом уровне не является внутренне замкнутой, так как ее трехпетлевые вершинные диаграммы типа “лестницы с четырьмя перекладинами” (и только они) порождают дополнительный вершинный контрчлен $\sim V_3$. Это утверждение доказывается в работе прямым расчетом контрчленных вкладов этих диаграмм (п. 2, 3).

Таким образом, уже на трехпетлевом уровне понятие “ГН-модель в $(2 + \varepsilon)$ -схеме” теряет смысл – ее можно рассматривать только в рамках полной модели (4) с бесконечным числом вершин и соответствующих зарядов. Но это не лишает смысла понятие “ГН-фиксированная точка” в этой полной модели [14]. Данная точка g_* в бесконечномерном пространстве всех ее зарядов выделена тем, что в ней g_{0*} – величина порядка ε , а все другие g_{n*} с $n > 0$ – величины более высокого порядка по ε (ε^3 или выше, подробнее см. в п. 4). Поэтому выполненные ранее расчеты критических индексов в низких порядках по ε (до ε^4 включительно для η и до ε^3 для $1/\nu$) в рамках самой ГН-модели с одним зарядом g_0 сохраняют смысл, но уже в следующем порядке по ε необходимо учитывать генерацию новых вершин.

В п. 4 доказывается, что для новых зарядов вклады порядка ε^3 присутствуют лишь в g_{3*} и в g_{4*} , а все прочие g_{n*} с $n \neq 0, 3, 4$ – величины порядка ε^4 или выше. Там же явно вычислены β -функции новых зарядов $g_{3,4}$ в простейшем нетривиальном приближении.

2. ГЕНЕРАЦИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ V_3 В ТРЕХПЕТЛЕВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Контрчлен $\sim V_3$ может порождаться лишь 24 диаграммами типа “лестницы с четырьмя перекладинами” базовой теории:

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 2 & 3 & 4 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 1 & 2 & 3 & 4
 \end{array}
 + \text{еще } 23. \quad (7)$$

Обозначение “+ еще 23” означает суммирование по всем 24 перестановкам номеров вершин 1, 2, 3, 4 на нижней линии при сохранении их канонического порядка 1234 на верхней (штриховые “линии взаимодействия”, пропорциональные δ -символу совпадения координат их концов, соединяют верхние и нижние вершины с одинаковыми номерами, координаты которых отождествляются). Кроме δ -символа совпадения координат, каждая линия взаимодействия содержит множитель $g_0 \mu^{-2\varepsilon}$, где g_0 – безразмерный ренормированный заряд ГН-модели в обозначениях (5), (6). Фермионным ψ -линиям в евклидовой безмассовой модели соответствуют в импульсном представлении пропагаторы $\langle \psi \bar{\psi} \rangle = i \hat{k} / k^2$, а в координатном –

$$\begin{aligned} \langle \psi(y) \bar{\psi}(z) \rangle &= A \hat{x} \cdot |x|^{-d}, \quad x \equiv z - y, \quad \hat{x} \equiv \gamma_i x^i, \\ d &= 2 + 2\varepsilon, \quad A = \Gamma(1 + \varepsilon) / 2\pi^{1+\varepsilon}, \end{aligned} \quad (8)$$

здесь и далее $\Gamma(z)$ – гамма-функция.

В размерности $d = 2 + 2\varepsilon$ все вершинные диаграммы ГН-модели расходятся логарифмически, и для расчета контрчленов нужны лишь их “УФ-расходящиеся части” (полюсы по ε). Их вычисление удобно производить в безмассовой модели с простой “протечкой” одного внешнего импульса p , втекающего в вершину 1 и вытекающего из вершины 4 на верхней линии (они показаны в (7) жирными точками). Отметим, что эти две выделенные вершины обязательно должны быть одинаковыми для всех 24 графиков (7). Это необходимо потому, что мы собираемся на первом этапе вычислять сами расходящиеся части $K\gamma$, а не прямо контрчлены $KR'\gamma$ индивидуальных диаграмм γ (K – стандартная операция вычитания схемы MS, отбирающая только полюсы по ε , а R' – неполная R -операция, устраняющая УФ-расходимости подграфов). Отметим также, что при указанном выше выборе протечки импульса ни в одной из 24 безмассовых диаграмм (7) не возникают ИК-расходимости – это необходимое условие законности вычисления УФ-контрчленов в рамках безмассовой модели (ИК-расходимости могут порождаться цепочками из двух и более безмассовых фермионных линий $\sim \hat{k}/k^2$ с одинаковым импульсом интегрирования k).

Переходя к анализу диаграмм (7), прежде всего покажем, что они могут порождать лишь контрчлен типа V_3 . Каждую из этих диаграмм задает указание конкретной перестановки номеров вершин 1234 на нижней линии. Сгруппировав эти 24 перестановки по принципу “некоторая перестановка + перестановка в обратном порядке” (например, [1234] + [4321] или [2143] + [3412]), получим 12 независимых пар.

Рассмотрим любую из таких пар, например [1234] + [4321]. В координатном представлении множители $\hat{x}$ пропагаторов (8) для данной пары группируются в выражение

$$\hat{x}_{12} \hat{x}_{23} \hat{x}_{34} \otimes [\hat{x}_{12} \hat{x}_{23} \hat{x}_{34} + \hat{x}_{43} \hat{x}_{32} \hat{x}_{21}], \quad (9)$$

в котором $x_{ik} = x_k - x_i$ – разности координат вершин с номерами k, i . Левые множители (9) (перед знаком $\otimes$) соответствуют верхней линии диаграмм (7), а правые (после знака $\otimes$) – нижней. В силу очевидного равенства $x_{ik} = -x_{ki}$ второе слагаемое в правой части (9) отличается от первого лишь знаком минус и перестановкой трех сомножителей $\hat{x}_{ik}$ в обратном порядке. Важно также, что не указанные в (9) скалярные множители $|x_{ik}|^{-d}$ пропагаторов (8) для двух слагаемых в правой части (9) одинаковы.

При подстановке сверток $\hat{x} = \gamma_i x^i$ в (9) будем обозначать векторные индексы трех левых сомножителей через ikl , а трех правых – через abc . Тогда вклад рассмотренной выше пары диаграмм (и любой другой аналогичной пары) можно представить в виде

$$\gamma_i \gamma_k \gamma_l \otimes [\gamma_a \gamma_b \gamma_c - \gamma_c \gamma_b \gamma_a] \cdot I_{abc}^{ikl}, \quad (10)$$

где I_{abc}^{ikl} – “импульсный интеграл” первой диаграммы данной пары, уже не содержащей γ -матриц. При нашем выборе (см. выше) протечки импульса он получается интегрированием по координатам $x_{2,3}$ двух внутренних вершин диаграмм (7) и последующим преобразованием Фурье по разности координат $x_1 - x_4$ двух внешних вершин, показанных в (7) жирными точками. Величина (9) порождает в подынтегральном выражении для I “числитель”

$$x_{12}^i x_{23}^k x_{34}^l \cdot x_{12}^a x_{23}^b x_{34}^c, \quad (11)$$

к которому нужно добавить “знаменатели” $|x_{ik}|^{-d}$ пропагаторов (8) для всех сомножителей (11).

Рассмотрим теперь γ -структуру в (10). С помощью стандартного коммутационного соотношения $\gamma_a \gamma_b + \gamma_b \gamma_a = 2\delta_{ab}$ нетрудно получить следующее равенство:

$$\gamma_a \gamma_b \gamma_c = \text{As}[\gamma_a \gamma_b \gamma_c] + \delta_{ab} \gamma_c - \delta_{ac} \gamma_b + \delta_{bc} \gamma_a \quad (12)$$

(такие выкладки проще всего выполняются с помощью сформулированной в работе [15] “теоремы Вика для γ -символов”). Вычитая из (12) аналогичное выражение для $\gamma_c \gamma_b \gamma_a$, получим

$$\gamma_a \gamma_b \gamma_c - \gamma_c \gamma_b \gamma_a = 2\gamma_{abc}^{(3)} \quad (13)$$

в обозначениях (2) с $A = abc$.

Таким образом, γ -матрицы на нижней линии данной пары диаграмм (7) группируются в полностью антисимметричную по индексам abc структуру $\gamma_{abc}^{(3)}$, что приводит к соответствующей антисимметризации по этим индексам импульсного интеграла I_{abc}^{ikl} в (10). Нетрудно показать, что при вычислении контрчленов и левый сомножитель $\gamma_i \gamma_k \gamma_l$ в (10) можно заменить на $\gamma_{ikl}^{(3)}$, что приведет к антисимметризации импульсного интеграла I_{abc}^{ikl} и по этим индексам. Для доказательства этого утверждения напомним для $\gamma_i \gamma_k \gamma_l$ аналогичное (12) представление и рассмотрим любой из вкладов с δ -символами, например $\delta_{ik} \gamma_l$. Свертка δ_{ik} с I_{abc}^{ikl} порождает выражение с четырьмя индексами $labc$. Это выражение должно зависеть только от одного протекающего внешнего импульса p , т.е. должно быть построено из δ -символов и компонент p_i . Анализируя возможные варианты, нетрудно убедиться, что полностью антисимметричных по индексам abc конструкций такого типа не существует. Отсюда следует, что от произведения $\gamma_i \gamma_k \gamma_l$ в (10) остается лишь вклад полностью антисимметричного по индексам ikl слагаемого $\gamma_{ikl}^{(3)}$.

Таким образом, выражение (10) для рассматриваемой пары диаграмм можно заменить на

$$\gamma_{ikl}^{(3)} \otimes \gamma_{abc}^{(3)} \cdot 2 \text{As} I_{abc}^{ikl}, \quad (14)$$

где “As” обозначает полную антисимметризацию по тройкам индексов ikl и abc . Ясно, что представление (14) справедливо и для любой другой пары диаграмм, сгруппированных по принципу “прямой + обратный порядок номеров на нижней линии”. Из (14)

следует, что диаграммы (7) могут порождать лишь контрчлен типа V_3 и обязательно порождают его, если в сумме вкладов всех этих диаграмм есть УФ-расходимости – полюсы по ε .

3. РАСЧЕТ ИМПУЛЬСНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Таким образом, задача сводится к расчету суммы вкладов “УФ-расходящихся частей” $K\gamma$ для 12 диаграмм γ , представляющих первое слагаемое в каждой из выбранных 12 пар. Пары можно классифицировать, условившись, что их первые слагаемые содержат “4” в перестановках номеров вершин 1234 на последнем или предпоследнем месте. Тогда для вторых слагаемых пар этот номер “4” всегда будет на первом или втором месте, и тем самым мы переберем все перестановки. Для удобства ссылок введем следующую нумерацию первых диаграмм в каждой паре (указывается конкретная перестановка номеров вершин на нижней линии):

$$\begin{array}{llll} \text{№ 1 [1234],} & \text{№ 4 [2134],} & \text{№ 7 [1243],} & \text{№ 10 [2143],} \\ \text{№ 2 [2314],} & \text{№ 5 [1324],} & \text{№ 8 [2341],} & \text{№ 11 [1342],} \\ \text{№ 3 [3124],} & \text{№ 6 [3214],} & \text{№ 9 [3142],} & \text{№ 12 [3241].} \end{array} \quad (15)$$

По указанной перестановке номеров вершин для любой из диаграмм (15) легко восстановить обычное изображение типа первого графика (7) (что нужно для идентификации расходящихся подграфов).

Нас интересуют лишь УФ-расходящиеся части должным образом антисимметризованных по индексам (см. (14)) импульсных интегралов I_{abc}^{ikl} для всех диаграмм (15) с простой протечкой одного внешнего импульса p через указанные жирными точками в (7) вершины. Отметим, что подразумеваемое наличие символа As (антисимметризация) перед всеми выражениями существенно упрощает расчеты, позволяя сразу отбрасывать вклады, заведомо исчезающие под знаком As.

Все эти трехпетлевые вершинные диаграммы расходятся логарифмически и могут содержать в качестве подрасходимостей лишь 1- и 2-петлевые вершинные подграфы. Поэтому в общем случае расходящиеся части $K\gamma$ данных диаграмм γ могут содержать полюсы $\sim 1/\varepsilon^3$, $1/\varepsilon^2$ и $1/\varepsilon$. Но в сумме вкладов всех диаграмм (15) старшие полюсы $\sim 1/\varepsilon^3$ и $1/\varepsilon^2$ должны взаимно сокращаться. Действительно, присутствие старших полюсов объясняется расходимостями подграфов, которые нужно предварительно устранять при вычислении собственных контрчленов трехпетлевых диаграмм (именно они нас интересуют). Устранение подрасходимостей, т.е. “учет контрчленов на подграфы”, можно выполнить двумя способами: либо действием R' -операции на каждую индивидуальную трехпетлевую диаграмму γ , либо добавкой к их сумме аналогичных выражений для сумм 1- и 2-петлевых вершинных диаграмм с известными УФ-расходящимися коэффициентами от 1- и 2-петлевых вкладов в константах ренормировки Z . При втором способе учета “контрчленов на подграфы” очевидно (в силу внутренней замкнутости ГН-модели в двухпетлевом приближении), что они вообще не могут порождать вклады со структурой V_3 . Отсюда следует, что для суммы импульсных интегралов диаграмм (15) под знаком As вклады всех “контрчленов на подграфы” должны взаимно сокращаться, так что в ней должен остаться только простой полюс $\sim 1/\varepsilon$. Именно поэтому мы предпочитаем вычислять сумму вкладов $K\gamma$ для всех диаграмм (15), а не сумму

их контрчленов $KR'\gamma$ (хотя именно они нам нужны). Расчет $KR'\gamma$ потребовал бы явного вычисления контрчленов расходящихся подграфов всех диаграмм, сумма вкладов которых должна взаимно сократиться (см. выше). Но зато при нашем способе расчета нужно, чтобы протечка импульса во всех диаграммах была одинаковой, что создает определенные неудобства при вычислениях (см. ниже). Это, однако, удобнее, чем расчет вкладов всех “контрчленов на подграфы” для каждой диаграммы.

Не вдаваясь в подробности, опишем кратко процедуру расчета. Из 12 диаграмм (15) восемь являются “простыми”, так как сводятся к цепочкам и петлям и вычисляются элементарно (причем точно, а не только их расходящиеся части). Исключение составляют диаграммы № 3, 5, 9, 11, которые в дальнейшем будем называть “сложными”.

Кратко поясним технику расчета простых диаграмм на примере диаграммы № 1 из (15). В координатном представлении после выделения из нее известного множителя $(g\mu^{-2\varepsilon})^4 A^6$ с амплитудой A из (8) получим

$$N^2 f = \frac{ia}{2+2\varepsilon} \frac{kb}{2+2\varepsilon} \frac{lc}{2+2\varepsilon} \quad (16)$$

Здесь использованы следующие графические обозначения:

$$\text{---} \alpha \text{---} \equiv |x|^{-2\alpha}, \quad \text{---} \overset{ik\dots}{\curvearrowright} \alpha \text{---} \equiv |x|^{-2\alpha} \cdot x_i x_k \dots, \quad (17)$$

где z, y – координаты концов линии, число α – ее “индекс”, $x = z - y$, $ik\dots$ – любой набор векторных индексов.

Внешним концам цепочки (16) соответствуют фиксированные “наружные вершины” $x_{1,4}$ в (7), внутренним точкам сочленения – вершины интегрирования $x_{2,3}$. Множители типа $x^i x^a$ в (16) нетрудно преобразовать в действующие на скалярные линии производные, после чего можно воспользоваться известным правилом интегрирования простых цепочек:

$$\text{---} \alpha \text{---} \bullet \text{---} \beta \text{---} = \pi^{d/2} H(\alpha, \beta, d - \alpha - \beta) \text{---} \alpha + \beta - d/2 \text{---} \quad (18)$$

где α, β – произвольные индексы, $H(\alpha, \beta, \dots) \equiv H(\alpha) \cdot H(\beta) \cdot \dots$ и $H(\alpha) \equiv \Gamma(d/2 - \alpha)/\Gamma(\alpha)$. Правило (18) остается справедливым и при наличии на линиях в левой части (18) любых производных, которые просто переносятся без изменения на результирующую линию в правой части.

С помощью этих приемов выражение (16) под знаком As (и аналогично вклады всех прочих простых диаграмм (15)) можно привести к виду

$$k \cdot As \left[\delta_{ia} \delta_{kb} \frac{lc}{2+4\varepsilon} \right] \quad (19)$$

с известным коэффициентом k . После этого остается лишь превратить “стрелки” lc в (19) в производные и выполнить преобразование Фурье координатной линии. Результаты такого расчета для всех 8 простых диаграмм (15) приведены в приложении.

Переходим теперь к расчету “сложных” диаграмм № 3, 5, 9, 11 из списка (15). В координатном представлении все они сводятся к диаграмме вида “петля с перекладиной” с различными индексами линий и с дополнительными векторными множителями типа x^i из (17) на ребрах. При указанной в (7) протечке импульса они не интегрируются явно. Поэтому для расчета УФ-расходящихся вкладов $K\gamma$ этих диаграмм γ приходится использовать различные специальные приемы.

Один из них – изменение “конфигурации” (этим термином будем для краткости обозначать выбор набора внешних импульсов и массовых параметров внутренних линий в конкретной диаграмме). Основная идея состоит в том, что для операции вычитания K схемы MS контрчлен $L\gamma = KR'\gamma$ любой логарифмически расходящейся диаграммы γ не зависит от внешних импульсов и масс внутренних линий, следовательно, и от выбора их конкретной “конфигурации” [16]. Обозначая условно через A принятую в (7) конфигурацию (простая протечка одного импульса p через верхние вершины 1, 4 в безмассовой модели), а через B – некоторую другую конфигурацию, из сказанного выше имеем

$$L\gamma|_A = L\gamma|_B, \quad L = KR'. \quad (20)$$

Нас интересует сейчас не сам контрчлен $L\gamma = KR'\gamma$, а вся “расходящаяся часть” $K\gamma|_A$ для конфигурации A . Действие R' -операции на конкретную диаграмму γ известно:

$$R'\gamma = \gamma - \Delta\gamma, \quad \Delta\gamma = \sum_{\gamma\alpha} [L\gamma_\alpha] \cdot \gamma'_\alpha. \quad (21)$$

Суммирование в $\Delta\gamma$ производится по всем УФ-расходящимся подграфам γ_α (у нас они только вершинные) исходной диаграммы γ , $[L\gamma_\alpha]$ – контрчлен данного подграфа, γ'_α – “стянутая диаграмма”, в которой подграф γ_α заменен простой вершиной.

Из (20) и (21) для интересующей нас величины $K\gamma|_A$ получаем

$$K\gamma|_A = L\gamma + K\Delta\gamma|_A = K\gamma|_B - K\Delta\gamma|_B + K\Delta\gamma|_A. \quad (22)$$

Контрчлен $L\gamma$ от выбора конфигурации (A или B) не зависит. Входящие в $\Delta\gamma$ “стянутые графы” (γ'_α в (21)) имеют уже не более двух петель. Они всегда сводятся к простым цепочкам и петлям, поэтому для любой конфигурации вычисляются элементарно, как и контрчлены $L\gamma_\alpha$ 1- и 2-петлевых вершинных подграфов в (21). При использовании соотношения (22) для двух безмассовых конфигураций A и B необходимо следить, чтобы ни для одной из них в диаграммах γ и $\Delta\gamma$ не было ИК-расходимостей.

Изложенным приемом можно воспользоваться для вычисления импульсного интеграла I диаграммы № 11 в рамках безмассовой модели, взяв в качестве конфигурации A исходную протечку одного импульса в (7), а в качестве B – аналогичную простую протечку через верхние вершины 1, 2 в (7) (ИК-расходимостей при этом не будет). Данная диаграмма с протечкой B сводится к цепочкам и петлям, поэтому легко вычисляется подобно всем прочим простым диаграммам (15). В этом случае есть и дополнительное упрощение: под знаком Δ вклады $K\Delta\gamma$ в (22) для двух конфигураций A и B оказываются одинаковыми и взаимно сокращаются, поэтому имеем просто $K\gamma|_A = K\gamma|_B$. Такой расчет в итоге показывает, что вклад сложной диаграммы № 11 совпадает с вкладом простой диаграммы № 2, т.е. условно можно записать, что № 11 = № 2.

Вклад еще одной сложной диаграммы № 3 совпадает с вкладом № 11 (тем самым и с № 2) в силу очевидной для диаграмм (7) с протечкой A симметрии “лево-право”. По

той же причине имеют место равенства № 2 = № 12, № 4 = № 7, № 6 = № 8 для простых диаграмм (15), а их явный расчет доказывает наличие еще одного дополнительного равенства № 10 = −№ 6. Учитывая все эти соотношения, получаем, что сумма вкладов всех диаграмм (15) представляется в виде

$$\sum_{\text{все диаграммы}} = \text{№ 1} + 4 \cdot \text{№ 2} + 2 \cdot \text{№ 4} + \text{№ 6} + \text{№ 5} + \text{№ 9}. \quad (23)$$

Первые четыре слагаемые – вклады простых диаграмм, два последних – вклады сложных.

Вклад сложной диаграммы № 5 вычисляется также с помощью соотношения (22). Эта диаграмма (как и все сложные) имеет вид “петли с перекладиной” с добавочными векторными множителями x^i (или p^i в импульсном представлении) на ребрах. Для нее не удастся подобрать отличную от “А” протечку импульса, которая обеспечивала бы одновременно интегрируемость диаграммы и отсутствие ИК-расходимостей в безмассовой модели. Поэтому в качестве конфигурации B в (22) была использована “регуляризация массами” при нулевых внешних импульсах четырех внешних ребер петли (замена $k^i/k^2 \rightarrow k^i/(k^2 + m^2)$) при сохранении безмассовости ее “перекладины”. С помощью формулы

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \iint \frac{d^d k d^d p}{(k^2 + m^2)^\alpha (p^2 + m^2)^\beta (k - p)^{2\gamma}} = \\ = \frac{\Gamma(\alpha + \gamma - d/2) \Gamma(\beta + \gamma - d/2) \Gamma(\alpha + \beta + \gamma - d) \Gamma(d/2 - \gamma)}{(4\pi)^d \Gamma(d/2) \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(\alpha + \beta + 2\gamma - d)} (m^2)^{d - \alpha - \beta - \gamma} \end{aligned} \quad (24)$$

таким путем вычислялся не зависящий от выбора конфигурации контрчлен $L\gamma$ в (22) для данной диаграммы (разумеется, при этом пришлось вычислять контрчлены ее УФ-расходящихся подграфов и “стянутые диаграммы” с той же конфигурацией). Добавочные 1- и 2-петлевые вклады $K\Delta\gamma|_A$ с исходной протечкой A вычисляются элементарно. Отметим, что для такого расчета требуется аналог формулы (24) с добавочными векторными множителями $k^i k^a p^l p^c$ в числителе. Ввиду наличия (всегда подразумеваемого) общего символа Λ с искомым выражением кратно комбинации $\delta_{ia}\delta_{lc} - \delta_{ic}\delta_{la}$, коэффициент при которой можно найти, свернув все выражение с $\delta_{ia}\delta_{lc}$.

Последняя сложная диаграмма № 9 сводится к петле с перекладиной с одинаковыми индексами $\alpha = 1 + \varepsilon$ всех пяти скалярных линий и с различными дополнительными векторными множителями x^i на ребрах. Она не имеет подрасходимостей, поэтому порождает лишь полюс первого порядка $\sim 1/\varepsilon$ от преобразования Фурье координатной линии в выражении типа (19), к которому она также приводится. Поэтому при вычислении УФ-конечного коэффициента k в этом выражении можно пренебрегать поправками порядка ε , что позволяет выполнить замену $1 + \varepsilon \rightarrow 1$ для индексов всех пяти ребер (сохраняя $d = 2 + 2\varepsilon$ для размерности пространства). Под знаком Λ с в окончательном выражении присутствуют лишь две независимые индексные структуры. Сворачивая в них подходящую пару векторных индексов, получим конечную сумму диаграмм, в которых свертки векторных множителей $x^i x^i = x^2$ в числителе сокращают одну из линий с индексом 1 (ей согласно (17) соответствует множитель x^{-2}). Такой “обрыв линий” приводит к интегрируемости всех диаграмм. В итоге вклад диаграммы № 9 приводится к виду (19) с коэффициентом $k = -3\zeta(3)/2$, где $\zeta(z)$ – дзета-функция Римана.

Сформулируем теперь окончательные результаты расчета расходящихся частей антисимметризованных импульсных интегралов $\text{As}[I_{abc}^{ikl}]$ диаграмм (15) с простой протечкой A внешнего импульса p . По индексной структуре эти величины являются линейными комбинациями следующих двух выражений:

$$I_1 = \text{As}[\delta_{ia}\delta_{kb}\delta_{lc}], \quad I_2 = \text{As}[\delta_{ia}\delta_{kb}P_{lc}(p)], \quad (25)$$

где $P_{lc}(p) = p^l p^c / p^2$ – продольный проектор. При записи ответов будем также использовать следующие обозначения ($d = 2 + 2\varepsilon$):

$$A \equiv g_0 \mu^{-2\varepsilon} u_0^3, \quad u_0 \equiv g_0 / 4\pi, \quad t^\varepsilon \equiv (p^2 / 4\pi \mu^2)^\varepsilon \frac{\Gamma^2(1 + \varepsilon)\Gamma(1 - \varepsilon)}{\Gamma(2 + 2\varepsilon)}. \quad (26)$$

В таких обозначениях результат для суммы вкладов всех простых диаграмм (первые четыре слагаемые в (23)) имеет вид

$$\sum_{\text{простые диаграммы}} = A t^{3\varepsilon} \frac{(-1 + \varepsilon - 9\varepsilon^2)}{24\varepsilon^3} [I_1 + 6\varepsilon I_2]. \quad (27)$$

Для вклада диаграммы № 5 в (23) получаем

$$\text{№ 5} = A \frac{(1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2)}{24\varepsilon^3} I_1 + A t^{2\varepsilon} \frac{1}{8\varepsilon^3} [I_1 + 4\varepsilon I_2] + A t^\varepsilon \frac{(-1 - \varepsilon)}{8\varepsilon^3} [I_1 + 2\varepsilon I_2], \quad (28)$$

а для вклада диаграммы № 9 –

$$\text{№ 9} = A \frac{1}{4\varepsilon} \zeta(3) I_1 \quad (29)$$

с точностью до заведомо УФ-конечных вкладов. Первое слагаемое в (28) представляет вклад контрчлена $L\gamma$ в (22) для данной диаграммы, следующие слагаемые – вклады $K\Delta\gamma|_A$ от 2- и 1-петлевых стянутых графов. Для окончательного отбора УФ-расходящихся частей приведенных выше выражений нужно разложить входящие в них множители $t^{n\varepsilon}$ по ε и отобрать лишь вклады с полюсами по ε .

В сумме выражений (27)–(29) все полюсные по ε вклады с $\ln t$ и с нелокальной структурой I_2 из (25) взаимно сокращаются, как и должно быть согласно общему принципу локальности контрчленов (эти сокращения являются методом контроля вычислений). В итоге для суммы (23), т.е. для суммы УФ-расходящихся вкладов выражений (27)–(29), получаем следующий ответ:

$$\sum_{\text{все диаграммы}} = A \frac{a}{12\varepsilon} I_1, \quad a = -4 + \zeta(3). \quad (30)$$

В нем сократились старшие полюсы $\sim 1/\varepsilon^3$ и $1/\varepsilon^2$, что и следовало ожидать из общих соображений.

Эта УФ-расходимость трехпетлевых вершинных диаграмм ГН-модели на языке функционала действия соответствует (при учете добавочного множителя 2 в (14)) УФ-расходящемуся вкладу взаимодействия вида

$$A \frac{a}{6\varepsilon} V_3 \quad (31)$$

с коэффициентами A из (26), a из (30) и вершиной V_3 из (3). Эту расходимость можно устранить лишь в рамках полной модели (4)–(6) за счет ренормировки $g_{03} = g_3 \mu^{-2\varepsilon} Z_{g_3}$ ее затравочного заряда g_{03} (константа ренормировки поля $Z_\psi = 1 + O(g_0^2)$ в рассматриваемом приближении еще не дает вклада):

$$g_{03} = g_3 \mu^{-2\varepsilon} Z_{g_3} = \mu^{-2\varepsilon} \left[g_3 - g_0 u_0^3 \frac{a}{6\varepsilon} \right]. \quad (32)$$

Если перейти к более удобной нормировке

$$u_{0n} = g_{0n}/4\pi, \quad u_n = g_n/4\pi \quad (33)$$

для всех затравочных и ренормированных зарядов и подействовать на обе части равенства (32) операциями $\tilde{D}_\mu = \mu \partial_\mu$ при фиксированных g_{0n} , получим следующее выражение для β -функции $\beta_3 = \tilde{D}_\mu u_3$ “старшего” заряда u_3 :

$$\beta_3 = 2\varepsilon u_3 + a u_0^4 + \dots \quad (a = -4 + \zeta(3)). \quad (34)$$

При этом для β -функции $\beta_0 = \tilde{D}_\mu u_0$ основного заряда u_0 ГН-модели остается справедливым полученное в [4, 5] в трехпетлевом приближении выражение

$$\beta_0 = 2\varepsilon u_0 - 2u_0^2(n-2) + 4u_0^3(n-2) + 2u_0^4(n-2)(n-7) + \dots, \quad (35)$$

в котором $n \equiv N \operatorname{tr} 1$, N – число “изотопических” компонент ψ_a , а $\operatorname{tr} 1$ – след единичной операции в пространстве d -мерных спиноров ψ .

4. ГН-ФИКСИРОВАННАЯ ТОЧКА u_* ПОЛНОЙ МОДЕЛИ (6)

Присутствие УФ-расходимости (31) и соответствующего “генерационного” (т.е. не исчезающего при $u_3 = 0$) вклада $a u_0^4$ в β -функции (34) показывает, что в $(2 + \varepsilon)$ -схеме простая ГН-модель с одним зарядом u_0 не является внутренне замкнутой. Генерируемая в трехпетлевом приближении ГН-модели новая вершина V_3 при “интерференции” с исходным взаимодействием V_0 будет порождать новые вершины V_n (в однопетлевом приближении – только V_4 , см. ниже), те в свою очередь – следующие и так далее. В итоге мы приходим к полной модели (6) с бесконечным числом независимых ренормированных зарядов $g_n = 4\pi u_n$. Это значит, что в $(2 + \varepsilon)$ -схеме понятие “ГН-модель” вообще не имеет смысла. Но при этом сохраняет смысл понятие “ГН-фиксированная точка u_* ” полной модели (6) с бесконечным числом зарядов $u = \{u_n \equiv g_n/4\pi\}$ – это та точка u_* , для которой в первом порядке по ε будет $u_{0*} \neq 0$, $u_{n*} = 0 \quad \forall n \neq 0$.

Из (34) и (35) видно, что для данной точки $u_{0*} \sim \varepsilon$, $u_{3*} \sim \varepsilon^3$, а порядок величины по ε прочих u_{n*} еще предстоит определить. Это можно сделать, рассмотрев интерференцию

взаимодействий V_0 и V_3 и т.д. С помощью приведенных в приложении к работе [13] справочных формул нетрудно показать, что однопетлевые вершинные диаграммы (36а)

(36a)

(36b)

с двумя взаимодействиями V_0 и V_3 могут порождать лишь контрчлен типа V_4 , соответствующий генерационному вкладу $-4u_0u_3$ в β -функцию соответствующего заряда u_4 (т.е. вкладу того же порядка по ε , что и au_0^4 в (34)). Интерференция взаимодействий V_0 и V_4 в однопетлевом приближении (36а) порождает, в свою очередь, контрчлен V_3 (и никаких других), соответствующий вкладу $16u_0u_4$ в β_3 . Таким образом, в рассматриваемом порядке (ε^4 в β -функциях при $u \sim u_*$) процедура расчета генерационных вкладов на этом замыкается. Кроме них в том же порядке по ε нужно учесть также вклады однопетлевых диаграмм (36б), дающих добавки $8u_0u_3$ в β_3 и $-12u_0u_4$ в β_4 . В итоге при нашей точности (ε^4 в β -функциях для $u \sim u_*$) получаем следующие выражения для β -функций старших зарядов $u_{3,4}$:

$$\begin{aligned}\beta_3 &= 2\varepsilon u_3 + au_0^4 + 16u_0u_4 + 8u_0u_3, \\ \beta_4 &= 2\varepsilon u_4 - 4u_0u_3 - 12u_0u_4\end{aligned}\tag{37}$$

с коэффициентом a из (30). Из (35) и (37) находим координаты u_{3*} и u_{4*} фиксированной точки u_* в низшем (для них) порядке ε^3 :

$$u_{3*} = \frac{a\varepsilon^3(n-8)}{2n(6-n)(n-2)^3}, \quad u_{4*} = \frac{a\varepsilon^3}{n(6-n)(n-2)^3}.\tag{38}$$

В следующем порядке по ε , который соответствует 4-петлевому приближению для β -функции простой ГН-модели, могут генерироваться новые вершины V_n с u_{n*} порядка ε^4 или выше. Расчет u_{n*} в этом порядке технически очень сложен, и мы не будем даже пытаться выполнить его, ограничиваясь лишь указанием на необходимость такого расчета при переходе к следующему порядку по ε .

Обсудим теперь, как влияет генерация новых вершин и соответствующих зарядов $u_{n*} \neq 0$ с $n > 0$ в старших порядках по ε на выполненные ранее в рамках простой ГН-модели с одним зарядом u_0 расчеты $(2+\varepsilon)$ -разложений ее критических индексов. Рассмотрим сначала индекс η , связанный соотношением $\Delta_\psi = (d-1+\eta)/2$ с критической размерностью Δ_ψ основного поля ψ . Он определяется равенством $\eta = 2\gamma_\psi^*$, в котором $\gamma_\psi^* \equiv \gamma_\psi(u_*)$ — значение РГ-функции $\gamma_\psi(u)$ (аномальная размерность поля ψ) в фиксированной точке $u = u_*$. Ранее в простой ГН-модели вычислялся лишь вклад

$\gamma_\psi(u_0)$ ее основного заряда u_0 , тогда как при точном расчете нужно знать $\gamma_\psi(u)$ как функцию всех зарядов u в полной модели (6). Ее разложение начинается с двухпетлевого вклада, который является известной [1, 13] квадратичной формой только трех “младших” зарядов $u_{0,1,2}$. Поскольку минимальным порядком для u_{1*} и u_{2*} является ε^4 (см. выше), двухпетлевые слагаемые типа $u_0 u_1$ и $u_0 u_2$ в $\gamma_\psi(u)$ могут порождать в η лишь вклад порядка ε^5 , соответствующий пятипетлевому приближению в простой ГН-модели. Отметим, что присутствие таких вкладов в η – открытый вопрос. Ответ на него зависит от того, генерируют ли четырехпетлевые вершинные диаграммы простой ГН-модели, а также двухпетлевые вершинные диаграммы $\sim u_0^2 u_3, u_0^2 u_4$ полной модели (6) в качестве контрчленов новые взаимодействия $V_{1,2}$ (если нет, то ε -разложения u_{1*} и u_{2*} будут начинаться с ε^5 или выше).

В трехпетлевое слагаемое $\gamma_\psi(u)$, являющееся известной [13, 14] кубической формой по u , уже могут входить и старшие заряды u_n с $n > 2$, в том числе и слагаемые типа $u_0^2 u_3$ и $u_0^2 u_4$. Они порождают в η вклады того же порядка ε^5 (их можно найти явно из (38) и данных [13]), как и обсуждавшиеся ранее двухпетлевые слагаемые типа $u_0 u_1$ и $u_0 u_2$.

Важно, что все эти поправки в индексе η имеют, как минимум, порядок ε^5 , так что все выполненные ранее с точностью до ε^4 включительно расчеты индекса η по РГ-функциям простой ГН-модели сохраняют силу (трехпетлевые РГ-функции ГН-модели вычислены в [3–5], четырехпетлевой вклад в $\gamma_\psi(u_0)$ – в [6]). Однако приведенные в [6] сведения о пятипетлевом вкладе в РГ-функцию $\gamma_\psi(u_0)$, полученные из сравнения с данными $1/n$ -разложений без учета генерации новых вершин в ГН-модели, должны быть пересмотрены с учетом сказанного выше относительно вкладов порядка ε^5 в индексе η .

Рассмотрим теперь индекс $1/\nu = \Delta_\tau$ (“критическая размерность температуры”). В простой ГН-модели он вычисляется с помощью соотношения $-1/\nu = d\beta_0(u_0)/du_0|_{u_0=u_{0*}}$. В полной модели (6) величина $-1/\nu$ есть одно из собственных значений матрицы $\omega_{ik} = \partial\beta_i/\partial u_k|_{u=u_*}$, а именно то, которое “ассоциировано” с элементом ω_{00} . В рассматриваемом приближении (заряды $u_{0,3,4}$ с β -функциями (35), (37)) матрица ω_{ik} является блочно-треугольной с единственным отличным от нуля элементом ω_{00} в первой строке, который и будет поэтому искомым собственным значением (равным $-1/\nu$). Отсюда следует, что в данном порядке (с точностью до ε^3 в $1/\nu$) генерация новых вершин еще не может сказаться на справедливости результатов расчета этого индекса в рамках простой ГН-модели.

В полной модели (6) величина $-\omega$ имеет смысл матрицы критических размерностей бесконечного семейства параметров $\tau_n = u_n - u_{n*}$. Эти параметры сопряжены с бесконечным семейством F локальных составных операторов взаимодействия (3), но без подразумеваемого в (3) интегрирования по координате x . Соответствующие матрицы критических размерностей Δ_F и $\Delta_\tau = -\omega$ находятся в “теневом соотношении” $\Delta_F + \Delta_\tau = d$. Определенными критическими размерностями обладают, конечно, не сами параметры τ_n или операторы V_n , а те их линейные комбинации, которые диагонализуют соответствующую матрицу критических размерностей.

Как и в нелинейной σ -модели, выход в критический режим обеспечивается здесь внешним условием $u \rightarrow u_*$, а не переходом к ИК-асимптотике при произвольном фиксированном значении зарядов, как в обычных моделях типа ϕ^4 . Поэтому собственные значения ω_α матрицы ω могут иметь любые знаки. По β -функциям (37) можно найти в низшем порядке по ε два новых собственных значения матрицы ω , ассоциированных с

параметрами $\tau_{3,4}$,

$$\omega_3 = \frac{2\varepsilon n}{n-2}, \quad \omega_4 = \frac{2\varepsilon(n-6)}{n-2}. \quad (39)$$

В том же порядке по ε для ассоциированного с ω_{00} собственного значения $\omega_0 = -1/\nu$ было $\omega_0 = -2\varepsilon$, т.е. ω_0 и ω_3 имеют разные знаки (поскольку $n \geq 2$).

Все сказанное выше относительно связи между простой ГН-моделью и полной 4F-моделью (6) существенно только для понимания общей картины. С практической точки зрения достигнутую в работах [3–6] точность расчета $(2 + \varepsilon)$ -разложений (ε^4 для η и ε^3 для $1/\nu$) вряд ли можно превысить по чисто техническим причинам. Принципиально важен лишь сам факт незамкнутости ГН-модели с размерной регуляризацией, на который мы и хотели обратить внимание в данной работе. Вероятно, что в таком же смысле незамкнутыми являются и все прочие двумерные модели с четырехфермионным взаимодействием в размерной регуляризации, т.е. модель Тирринга (взаимодействие V_1) и псевдоскалярный аналог ГН-модели (взаимодействие V_2).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вклады простых диаграмм

Приведем явные выражения для вкладов восьми простых диаграмм (все, кроме № 3, 5, 9, 11 из списка (15)) в безмассовой модели с простой протечкой одного внешнего импульса p через указанные в (7) вершины. В координатном представлении все они приводятся к выражению типа (19) и после преобразования Фурье по разности координат концов линии в (19) представляются в виде

$$ABSt^{3\varepsilon}[I_1 + 6\varepsilon I_2],$$

где A и t^ε определены в (26), а $I_{1,2}$ – в (25). Общий для всех диаграмм коэффициент B имеет следующий вид:

$$B = -\frac{\Gamma(1-3\varepsilon)}{6\varepsilon\Gamma(2+4\varepsilon)} \left[\frac{\Gamma(2+2\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)} \right]^3,$$

а коэффициент C для фигурирующих в (23) простых диаграмм определяется соотношениями

$$\begin{aligned} C[\text{№ } 1] &= R(2+2\varepsilon, 2+2\varepsilon)R(2+3\varepsilon, 2+2\varepsilon), \\ C[\text{№ } 2] &= R(1+\varepsilon, 2+2\varepsilon)R(1+\varepsilon, 2+3\varepsilon), \\ C[\text{№ } 4] &= -R(1+\varepsilon, 2+2\varepsilon)R(2+3\varepsilon, 2+2\varepsilon), \\ C[\text{№ } 6] &= -R(1+\varepsilon, 2+2\varepsilon)R(1+2\varepsilon, 2+2\varepsilon), \end{aligned}$$

где

$$R(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(2+\varepsilon-\alpha)\Gamma(2+\varepsilon-\beta)\Gamma(\alpha+\beta-2-\varepsilon)}{2\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(4+2\varepsilon-\alpha-\beta)}.$$

Вклады остальных четырех простых диаграмм выражаются (см. п. 3) через приведенные выше: № 2 = № 12, № 4 = № 7, № 6 = № 8 = –№ 10.

Список литературы

- [1] *A. Bondi, G. Curci, G. Paffuti, P. Rossi.* Ann. Phys. 1990. V. 199. P. 268.
- [2] *D. J. Gross, A. Neveu.* Phys. Rev. D. 1974. V. 10. P. 3235.
- [3] *J. A. Gracey.* Nucl. Phys. B. 1990. V. 341. P. 403.
- [4] *J. A. Gracey.* Nucl. Phys. B. 1991. V. 367. P. 657.
- [5] *C. Luperini, P. Rossi.* Ann. Phys. 1991. V. 212. P. 371.
- [6] *N. A. Kivel, A. S. Stepanenko, A. N. Vasiliev.* Nucl. Phys. B. 1994. V. 424. P. 619.
- [7] *J. Zinn-Justin.* Nucl. Phys. B. 1991. V. 367. P. 105.
- [8] *А. Н. Васильев, С. Э. Деркачев, Н. А. Кивель, А. С. Степаненко.* ТМФ. 1993. Т. 94. С. 179.
- [9] *А. Н. Васильев, А. С. Степаненко.* ТМФ. 1993. Т. 97. С. 364.
- [10] *J. A. Gracey.* Int. J. Mod. Phys. A. 1994. V. 9. P. 567.
- [11] *J. A. Gracey.* Int. J. Mod. Phys. A. 1994. V. 9. P. 727.
- [12] *A. Kennedy.* J. Math. Phys. 1981. V. 22. P. 1330; *Л. В. Авдеев.* ТМФ. 1984. Т. 58. С. 308.
- [13] *А. Н. Васильев, М. И. Вязовский, С. Э. Деркачев, Н. А. Кивель.* ТМФ. 1996. Т. 107. С. 27.
- [14] *А. Н. Васильев, М. И. Вязовский, С. Э. Деркачев, Н. А. Кивель.* ТМФ. 1996. Т. 107. С. 359.
- [15] *А. Н. Васильев, С. Э. Деркачев, Н. А. Кивель.* ТМФ. 1995. Т. 103. С. 179.
- [16] *Д. Коллинз.* Перенормировка. М.: Мир, 1988.

Поступила в редакцию 15.V.1997 г.

A. N. Vasil'ev, M. I. Vyazovsky

**PROOF OF THE ABSENCE OF MULTIPLICATIVE
RENORMALIZABILITY OF THE GROSS–NEVEU
MODEL IN DIMENSIONAL REGULARIZATION $d = 2 + 2\varepsilon$**

We prove that the simplest four-fermion Gross–Neveu model with dimensional regularization $d = 2 + 2\varepsilon$ is not multiplicatively renormalizable due to the counterterm generated by the three-loop vertex diagrams that is proportional to the evanescent operator [1] $V_3 = (\bar{\psi}\gamma_{i_k l}^{(3)}\psi)^2/2$, where $\gamma_{i_1 \dots i_n}^{(n)}$ is the fully antisymmetric product of n γ -matrices and is not zero in arbitrary dimensions. Therefore, calculations of the $(2 + \varepsilon)$ -expansion of the critical indices η and ν in the framework of the simple Gross–Neveu model are correct only to ε^4 for η and to ε^3 for ν . In higher orders, one must take into consideration the generation of other (not only V_3) evanescent operators.