Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Фролов, Физическое фазовое пространство решеточной теории Янга–Миллса и пространство модулей плоских связностей на римановой поверхности, *ТМФ*, 1997, том 113, номер 1, 100–111

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1068>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 16:27:24

С. А. Фролов*

ФИЗИЧЕСКОЕ ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО РЕШЕТОЧНОЙ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА И ПРОСТРАНСТВО МОДУЛЕЙ ПЛОСКИХ СВЯЗНОСТЕЙ НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Показано, что физическое фазовое пространство γ -деформированной гамильтоновой решеточной теории Янга–Миллса, предложенное в недавних работах [1, 2], совпадает как пуассоново многообразие с пространством модулей плоских связностей на римановой поверхности с $L - V + 1$ ручками и, следовательно, с физическим пространством $(2 + 1)$ -мерной модели Черна–Саймонса. Здесь L и V – соответственно полное число ребер и вершин решетки. Параметр деформации γ отождествляется с $2\pi/k$, где k – целое число, входящее в действие Черна–Саймонса.

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что имеются два тесно связанных способа ввести решеточную регуляризацию в калибровочные модели. В подходе Вильсона [3] дискретизируется пространство-время, и, таким образом, теория Янга–Миллса заменяется некоторой моделью статистической механики. В гамильтоновом подходе Когута и Саскинда [4] теория рассматривается в пространстве-времени Минковского и дискретизируется только пространство, время остается непрерывным. При этом на каждое ребро решетки необходимо поместить некоторое фазовое пространство, а каждой вершине решетки приписать связи закона Гаусса, которые являются связями первого рода и генерируют калибровочные преобразования. Таким образом, в гамильтоновом подходе непрерывная теория Янга–Миллса заменяется некоторой моделью классической механики со связями первого рода. В действительности несложно показать, что эти два подхода эквивалентны, если выбрать в качестве фазового пространства на ребре кокасательное расслоение к группе Ли. Однако можно рассматривать не только кокасательное расслоение, и тогда гамильтонов подход приведет к результатам, которые нельзя вывести из формулировки Вильсона.

В работах [1, 2] были предложены гамильтоновы решеточные калибровочные модели, основанные на задании дубля Гейзенберга D_+^γ [5–10] группы Ли на каждом ребре. Дубль Гейзенберга D_+^γ зависит от комплексного параметра γ , и кокасательное расслоение группы Ли можно рассматривать как предельный случай D_+^γ , когда γ стремится

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия; Мюнхенский университет, Мюнхен, Германия

к нулю. Квантование дубля Гейзенберга приводит к алгебре, которая содержит в качестве своих подалгебр квантованную универсальную обертывающую алгебру $U_q(\mathcal{G})$ и алгебру функций на квантовой группе $\text{Fun}_q(G)$ [8, 9, 11], где q связан с γ следующей формулой: $q = e^{i\hbar\gamma}$. В работах [1, 2] был рассмотрен случай только мнимого γ (вещественного q). В данной работе найдено обобщение на случай вещественного γ (q , лежащего на окружности). Этот случай представляется наиболее важным в квантовой теории, поскольку для q , являющегося корнем из единицы, дубль Гейзенберга имеет конечное число неприводимых конечномерных представлений и потому гильбертово пространство также конечномерно. Это позволяет развить разложение слабой связи для гамильтоновой решеточной теории Янга–Миллса, которое отличается от стандартной теории возмущений.

Простейший способ получить такое обобщение состоит в том, чтобы изучить структуру физического пространства обычных гамильтоновых решеточных моделей на графах и затем деформировать физическое фазовое пространство. Мы показываем, что, используя калибровочную инвариантность модели на произвольной решетке (графе), можно редуцировать граф к стандартному графу с одной вершиной и $L - V + 1$ петлями (тэдолами), где L и V – полное число ребер и вершин первоначального графа. Связи закона Гаусса, относящиеся к одной вершине графа, порождают остаточные калибровочные преобразования редуцированного фазового пространства, которое представляет собой прямое произведение кокасательных расслоений над всеми тэдолами. Обобщение калибровочных моделей на стандартных графах можно получить так же, как это было сделано в работе [2], т.е. путем замены кокасательного расслоения дублем Гейзенберга, а остаточных связей закона Гаусса – связями первого рода, порождающими хорошо известные одевающие преобразования [6, 9]. Отметим, что полученная пуассонова алгебра совпадает после некоторого преобразования [12, 13] с алгеброй, введенной Фоком и Рослым [14] для описания пуассоновой структуры пространства модулей плоских $SL(N)$ -связностей на римановой поверхности с $L - V + 1$ ручками и нахождения нового антиавтоморфизма, который позволяет выделить пространство модулей плоских $SU(N)$ -связностей. Таким образом, γ -деформированная гамильтонова решеточная теория Янга–Миллса и $(2 + 1)$ -мерная теория Черна–Саймонса с $k = 2\pi/\gamma$ имеют одно и то же физическое фазовое пространство. Благодаря хорошо известному результату Виттена [15, 16] гильбертово пространство $(2 + 1)$ -мерной теории Черна–Саймонса и, следовательно, решеточной теории Янга–Миллса конечномерно и совпадает с пространством конформных блоков в модели Весса–Зумино–Новикова–Виттена (ВЗНВ).

План статьи следующий. Во втором разделе рассматриваются калибровочные модели на произвольных графах и процедура редукции к стандартному графу. В третьем разделе приводятся некоторые простые результаты из теории дубля Гейзенберга. Затем описывается деформация гамильтоновой решеточной теории Янга–Миллса, а также указывается связь с пространством модулей плоских связностей и с $(2 + 1)$ -мерной теорией Черна–Саймонса. В заключении обсуждаются нерешенные вопросы и перспективы.

2. КАЛИБРОВОЧНЫЕ МОДЕЛИ НА ГРАФАХ

В этом разделе рассматриваются калибровочные модели на произвольных графах (регулярной гиперкубической решетке, триангуляции поверхности, симплициальных

комплексах и т. д.) и затем показывается, что любая калибровочная модель на графе может быть сведена к калибровочной модели на стандартном графе.

Любой граф описывается совокупностью вершин и набором ребер. Каждое ребро можно представлять либо как путь, соединяющий две вершины, либо как замкнутый путь с отмеченной вершиной (тэдпол). Две вершины могут быть соединены любым конечным числом ребер. Такой граф представляет собой произвольную связную диаграмму Фейнмана.

Рассмотрим некоторую окрестность вершины v , которая не содержит других вершин и замкнутых путей. Обозначим пути, выходящие из вершины v , через $l_1(v), \dots, l_{N_v}(v)$. Назовем такой путь вершинным. Пусть N_v обозначает общее число путей. Если для вершины v замкнутые пути отсутствуют, то N_v совпадает с числом ребер, идущих из v к некоторым другим вершинам решетки. Каждому вершинному пути $l_i(v)$ сопоставим поле, принимающее значение в кокасательном расслоении T^*G группы Ли. Это поле можно описать заданием групповой матрицы $U(l_i(v))$ и ли-алгебраической матрицы $E(l_i(v))$ со стандартной пуассоновой структурой

$$\begin{aligned} \{U^1, U^2\} &= 0, \\ \{E^1, E^2\} &= \frac{1}{2}[E^1 - E^2, C], \\ \{E^1, U^2\} &= CU^2, \end{aligned} \quad (1)$$

а также нулевыми скобками Пуассона для полей, соответствующих различным ребрам. В формулах (1) используются стандартные обозначения из теории квантовых групп [17,18]: для любой матрицы A , действующей в некотором пространстве V , можно построить две матрицы $A^1 = A \otimes \text{id}$ и $A^2 = \text{id} \otimes A$, действующие в линейном пространстве $V \otimes V$. C – тензорный элемент Казимира алгебры Ли $\mathcal{G}$ группы G : $C = -\eta_{ab}\lambda^a \otimes \lambda^b$. η_{ab} – тензор Киллинга, векторы λ^a образуют базис в $\mathcal{G}$.

Из уравнения (1) можно видеть, что поле E следует отождествить с правоинвариантным моментом, порождающим левые калибровочные преобразования поля U . Удобно ввести другую параметризацию T^*G с помощью левоинвариантного момента $\tilde{E} = -U^{-1}EU$ и матрицы $\tilde{U} = U^{-1}$. Легко проверяется, что $\tilde{U}$ и $\tilde{E}$ имеют ту же пуассонову структуру (1), моменты E и $\tilde{E}$ – нулевую скобку Пуассона, а скобка $\tilde{E}$ и U есть

$$\{\tilde{E}^1, U^2\} = -U^2 C. \quad (2)$$

Соотнесем вершине v следующие связи закона Гаусса:

$$G(v) = \sum_{i=1}^{N_v} E(l_i(v)) = 0. \quad (3)$$

Эти связи образуют алгебру Пуассона–Ли

$$\{G^1, G^2\} = \frac{1}{2}[G^1 - G^2, C] \quad (4)$$

и порождают следующие калибровочные преобразования полей $U(l_i(v))$ и $E(l_i(v))$:

$$\begin{aligned} U(l_i(v)) &\rightarrow g(v)U(l_i(v)), \\ E(l_i(v)) &\rightarrow g(v)E(l_i(v))g^{-1}(v). \end{aligned} \quad (5)$$

Повторяя эту же процедуру для всех вершин, получаем фазовое пространство, которое представляет собой прямое произведение кокасательных расслоений над всеми вершинными путями, и набор связей закона Гаусса, приписываемых вершинам. Связи, отвечающие различным вершинам, имеют нулевую скобку Пуассона. Поскольку для каждого ребра имеются два вершинных пути, на каждое ребро необходимо поместить два кокасательных расслоения. Однако благодаря тому, что поля U , E и $\tilde{U}$, $\tilde{E}$ имеют одну и ту же пуассонову структуру, эти расслоения можно отождествить. Следовательно, на поля, приписанные к одному ребру, можно наложить следующие условия:

$$\begin{aligned}\tilde{U}(1) &= U^{-1}(1) = U(2), \\ \tilde{E}(1) &= -U^{-1}(1)E(1)U(1) = E(2).\end{aligned}\tag{6}$$

Таким образом, поля $U(1)$, $E(1)$ и $U(2)$, $E(2)$ просто представляют собой различные координаты на одном и том же кокасательном расслоении. Результирующее фазовое пространство модели есть прямое произведение кокасательных расслоений над ребрами $\prod_{\text{ребра}} T^*G$.

Отметим, что благодаря связям (6) поле $U(l(v_1, v_2))$, соответствующее ребру $l(v_1, v_2)$, которое соединяет вершины v_1 и v_2 , преобразуется генераторами связей $G(v_1)$ и $G(v_2)$ следующим образом:

$$U(l(v_1, v_2)) \rightarrow g(v_1)U(l(v_1, v_2))g^{-1}(v_2).\tag{7}$$

Это обычный закон преобразования в решеточной теории Янга–Миллса. Однако поле $U(l(v))$, соответствующее тэдполу $l(v)$, присоединенному к вершине v , преобразуется посредством сопряжений

$$U(l(v)) \rightarrow g(v)U(l(v))g^{-1}(v).\tag{8}$$

Из уравнения (8) видно, что поле $U(l(v))$ нельзя устранить калибровочным преобразованием.

Наблюдаемые, инвариантные относительно калибровочных преобразований (7) и (8), строятся стандартным образом. Если рассматриваемый граф представляет собой регулярную гиперкубическую решетку, то мы получаем обычную решеточную модель Янга–Миллса со следующим гамильтонианом (который не единствен):

$$H = -\frac{e^2}{2}a^{2-d} \sum_{\text{ребра}} \text{tr } E^2(l) - \frac{a^{d-4}}{8e^2} \sum_{\text{плакеты}} (W(\square) + W^*(\square)).\tag{9}$$

Здесь суммирование ведется по всем ребрам и плакетам, d – размерность пространства, e – константа связи, a – длина решетки и $W(\square)$ – обычный вильсоновский член.

Введем понятие калибровочной эквивалентности двух графов. Назовем два графа калибровочно-эквивалентными, если соответствующие калибровочные модели имеют одинаковое физическое фазовое пространство. Напомним, что физическое фазовое пространство можно получить путем наложения некоторых калибровочных условий с последующим решением уравнений связей. Покажем, что любой граф эквивалентен стандартному графу с одной вершиной и $L - V + 1$ ребрами (все ребра – тэдполы), где L и V – полное количество ребер и вершин первоначального графа, соответственно.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим некоторое ребро l , связывающее вершины v_1 и v_2 . Имеются два вершинных пути $l(v_1)$ и $l(v_2)$, соответствующие ребру l . Будем в дальнейшем обозначать вершинный путь $l(v_1)$ через l и $l(v_2)$ через l^{-1} . Связи (6) отвечают $U(l^{-1}) = U^{-1}(l)$ и $E(l^{-1}) = -U^{-1}(l)E(l)U(l)$. Используя калибровочную инвариантность относительно преобразований (7), можно наложить калибровочное условие $U(l) = 1$. Затем необходимо выразить соответствующий импульс $E(l)$ через оставшиеся переменные фазового пространства. Поле $E(l)$ входит в две связи $G(v_1)$ и $G(v_2)$ следующим образом:

$$G(v_1) = E(l) + \sum'_{\text{пути}} E(l_i(v_1)) = 0, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} G(v_2) &= E(l^{-1}) + \sum'_{\text{пути}} E(l_i(v_2)) = \\ &= -E(l) + \sum'_{\text{пути}} E(l_i(v_2)) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где суммирование в уравнениях (10) и (11) ведется по всем вершинным путям, исключая $l(v_1)$ и $l(v_2)$, соответственно. Из уравнения (10) можно найти поле $E(l)$. Подставляя решение в уравнение (11), получаем вместо двух связей $G(v_1)$ и $G(v_2)$ остаточную связь

$$G(v_1, v_2) = \sum'_{\text{пути}} E(l_i(v_1)) + \sum'_{\text{пути}} E(l_i(v_2)) = 0. \quad (12)$$

Теперь остается заметить, что те же самые связи соответствуют графу, который получается стягиванием ребра l и тем самым отождествлением вершин v_1 и v_2 . Аналогичным образом мы получаем стандартный граф с одной вершиной и одной остаточной связью, которая имеет следующий вид:

$$G = \sum_{i=1}^g E(i) + \tilde{E}(i) = \sum_{i=1}^g E(i) - U^{-1}(i)E(i)U(i) = 0, \quad (13)$$

где $g = L - V + 1$ есть число ребер стандартного графа.

Нетрудно проверить, что остаточные калибровочные преобразования, порождаемые этой связью, являются одновременными сопряжениями

$$U(i) \rightarrow gU(i)g^{-1}, \quad E(i) \rightarrow gE(i)g^{-1}. \quad (14)$$

Ясно, что описанная выше фиксация калибровки соответствует выбору максимального дерева на графе. Физическое пространство можно теперь получить как факторпространство пространства решений уравнения связи (13) по действию (14) остаточной калибровочной группы. Это пространство не является многообразием, поскольку действие калибровочной группы не свободно. По-видимому, этот факт связан с хорошо известной неоднозначностью Грибова.

Описанная выше процедура редукции может быть использована для вычисления редуцированного гамильтониана. В частности, можно показать, что магнитная часть гамильтониана $(2 + 1)$ -мерной решеточной теории Янга–Миллса, определенная на квадратной решетке со свободными граничными условиями, сводится к следующей форме:

$$H_m = \frac{1}{e^2 a^2} \sum_{i=1}^g \text{tr}(U_i^{-1} + U_i), \quad (15)$$

где g – полное число плакетов для данного случая.

К сожалению, спектр этого гамильтониана непрерывен, что не позволяет провести разложение по малой константе связи. Предположим, однако, что имеется способ компактифицировать фазовое пространство. Известно, что квантование компактного пространства приводит к конечномерному фазовому пространству и, следовательно, любой оператор, действующий в этом пространстве, имеет дискретный спектр, и потому можно легко применять стандартную теорию возмущений. Компактификация может быть получена путем замены кокасательных расслоений дублями Гейзенберга D_+^γ и будет обсуждаться в следующем разделе. Отметим, наконец, что в $(2+1)$ -мерном случае имеется и другая, быть может более привлекательная, возможность для построения разложения по малой константе связи. Принимая во внимание, что электрическая часть редуцированного гамильтониана содержит член, пропорциональный

$$H_e^0 = e^2 \sum_{i=1}^g \text{tr} E_i^2, \quad (16)$$

можно использовать в качестве первой аппроксимации сумму гамильтонианов H_m и H_e^0 . Для группы $SU(2)$ гамильтониан $H^0 = H_m + H_e^0$ описывает “квазиточно” решаемую модель, и потому можно надеяться вычислить спектр точно. Стоит отметить, что тот же гамильтониан описывает супержидкую В-фазу ${}^3\text{He}$. Было бы интересно найти интегрируемое обобщение гамильтониана H^0 для группы $SU(N)$.

3. ДЕФОРМАЦИЯ ФИЗИЧЕСКОГО ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА

В этом разделе сначала напоминаются некоторые простые результаты из теории дубля Гейзенберга (подробное обсуждение см. в работах [5–10]). Затем строится деформация физического фазового пространства калибровочной модели на графе путем замены кокасательного расслоения и остаточной связи закона Гаусса (13) соответственно дублем Гейзенберга и некоторой деформированной связью. После этого показывается, что деформированное фазовое пространство совпадает как пуассоново многообразие с пространством модулей плоских связностей на римановой поверхности с $L - V + 1$ ручками.

Пусть G – матричная алгебраическая группа $D = G \times G$. Для определенности рассмотрим случай группы $SL(N)$. Почти все элементы $(x, y) \in D$ можно представить в двух эквивалентных формах

$$\begin{aligned} (x, y) &= (U, U)^{-1}(L_+, L_-) = (U^{-1}L_+, U^{-1}L_-) = \\ &= (\tilde{L}_+, \tilde{L}_-)^{-1}(\tilde{U}, \tilde{U}) = (\tilde{L}_+^{-1}\tilde{U}, \tilde{L}_-^{-1}\tilde{U}), \end{aligned} \quad (17)$$

где $U, \tilde{U} \in G$, L_+ , $\tilde{L}_+$ и L_- , $\tilde{L}_-$ суть верхне- и нижнетреугольные матрицы, их диагональные части l_+ , $\tilde{l}_+$ и l_- , $\tilde{l}_-$ обратны друг другу: $l_+ l_- = \tilde{l}_+ \tilde{l}_- = 1$.

Пусть все матрицы принадлежат фундаментальному представлению V группы G ($N \times N$ -матрицы для группы $SL(N)$). Алгебра функций на группе D порождается матричными элементами x_{ij} и y_{ij} . Матрицы $L_\pm$ и U или $\tilde{L}_\pm$ и $\tilde{U}$ можно рассматривать как почти всюду регулярные функции x и y . Следовательно, матричные элементы $L_{\pm ij}$ и U_{ij} (или $\tilde{L}_{\pm ij}$ и $\tilde{U}_{ij}$) определяют другую систему генераторов алгебры $\text{Fun } D$. Определим пуассонову структуру на D через генераторы $L_\pm$ и U следующим образом [8, 9]:

$$\{U^1, U^2\} = \gamma[r_\pm, U^1 U^2], \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \{L_+^1, L_+^2\} &= \gamma[r_\pm, L_+^1 L_+^2], \\ \{L_-^1, L_-^2\} &= \gamma[r_\pm, L_-^1 L_-^2], \\ \{L_+^1, L_-^2\} &= \gamma[r_+, L_+^1 L_-^2], \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \{L_+^1, U^2\} &= \gamma r_+ L_+^1 U^2, \\ \{L_-^1, U^2\} &= \gamma r_- L_-^1 U^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь γ – произвольный комплексный параметр, $r_\pm$ – классические r -матрицы, которые удовлетворяют классическому уравнению Янга–Бакстера и следующему соотношению:

$$[r^{12}, r^{13}] + [r^{12}, r^{23}] + [r^{13}, r^{23}] = 0, \quad (21)$$

$$r_- = -P r_+ P, \quad r_+ - r_- = C, \quad (22)$$

где P – перестановка в тензорном произведении $V \otimes V$ ($Pa \otimes b = b \otimes a$). Для группы $SL(N)$ решение уравнений (21), (22) имеет вид

$$\begin{aligned} r_+ &= \sum_{i=1}^{N-1} h_i \otimes h_i + 2 \sum_{i < j}^N e_{ij} \otimes e_{ji} = \\ &= -\frac{1}{N} I + \sum_{i=1}^N e_{ii} \otimes e_{ii} + 2 \sum_{i < j}^N e_{ij} \otimes e_{ji}, \end{aligned} \quad (23)$$

где $(e_{ij})_{kl} = \delta_{ik} \delta_{jl}$ и h_i образуют ортонормальный базис подалгебры Картана группы $SL(N)$: $\sqrt{i(i+1)} h_i = \sum_{k=1}^i e_{kk} - i e_{i+1, i+1}$.

Матрицы $r^{12} = \sum_a r_1(a) \otimes r_2(a) \otimes \text{id}$, $r^{13} = \sum_a r_1(a) \otimes \text{id} \otimes r_2(a)$ и $r^{23} = \sum_a \text{id} \otimes r_1(a) \otimes r_2(a)$, входящие в уравнение (21) и действующие в пространстве $V \otimes V \otimes V$, строятся с помощью матрицы $r = \sum_a r_1(a) \otimes r_2(a)$, действующей в пространстве $V \otimes V$.

Группа D , снабженная пуассоновой структурой (18)–(20), называется дублем Гейзенберга D_+^γ группы G . Нетрудно показать, что матрицы $\tilde{L}_\pm$ и $\tilde{U}$ имеют одинаковую пуассонову структуру (18)–(20), тогда как скобки Пуассона $L_\pm$, U и $\tilde{L}_\pm$, $\tilde{U}$ имеют вид [11]

$$\begin{aligned} \{L_\alpha^1, \tilde{L}_\beta^2\} &= 0 \quad \text{для любых } \alpha, \beta = +, -, \\ \{\tilde{L}_\pm^1, U^2\} &= -\gamma \tilde{L}_\pm^1 U^2 r_\pm, \\ \{L_\pm^1, \tilde{U}^2\} &= -\gamma L_\pm^1 \tilde{U}^2 r_\pm, \\ \{U^1, \tilde{U}^2\} &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Кокасательное расслоение группы G можно рассматривать как предельный случай дубля Гейзенберга. Именно, когда $\gamma \rightarrow 0$ и $L_{\pm} \rightarrow 1 + \gamma E_{\pm}$, где $E = E_+ - E_-$, пуассонова структура дубля Гейзенберга совпадает с канонической пуассоновой структурой кокасательного расслоения T^*G .

Теперь можно перейти к обсуждению деформации калибровочных моделей на графах. Случай мнимых γ был рассмотрен в работе [2] для калибровочных моделей на произвольных графах. Случай вещественных γ более сложен, по-видимому, допускает надлежащую деформацию только для калибровочных моделей на стандартном графе. Это, однако, не означает какую-либо потерю информации, поскольку, как было показано в предыдущем разделе, калибровочные модели на произвольных графах эквивалентны калибровочным моделям на стандартных графах.

Начнем с рассмотрения дубля Гейзенберга комплексной группы $SL(N)$ и затем обсудим уравнение, которое выделяет вещественную форму $SU(N)$. Поместим на каждое ребро стандартного графа с g ребрами дубль Гейзенберга. Таким образом, фазовое пространство совпадает с прямым произведением дублей Гейзенберга по всем ребрам $\prod_{\text{ребра}} D_+^{\gamma}$. Теперь следует заменить связи (13) некоторыми связями первого рода, которые сводятся к виду (13) в пределе $\gamma \rightarrow 0$. Мы используем следующие связи:

$$\begin{aligned} G_{\pm} &= \tilde{L}_{\pm}(1)L_{\pm}(1)\tilde{L}_{\pm}(2)L_{\pm}(2)\cdots\tilde{L}_{\pm}(g)L_{\pm}(g) = \\ &= G_{\pm}(1)G_{\pm}(2)\cdots G_{\pm}(g) = 1, \end{aligned} \quad (25)$$

где введено обозначение $G_{\pm}(i) \equiv \tilde{L}_{\pm}(i)L_{\pm}(i)$. Нетрудно проверить, что эти связи имеют следующие скобки Пуассона:

$$\begin{aligned} \{G_+^1, G_+^2\} &= \gamma[r_{\pm}, G_+^1 G_+^2], \\ \{G_-^1, G_-^2\} &= \gamma[r_{\pm}, G_-^1 G_-^2], \\ \{G_+^1, G_-^2\} &= \gamma[r_+, G_+^1 G_-^2]. \end{aligned} \quad (26)$$

На поверхности связи $G_{\pm} = 1$ эти скобки обращаются в нуль и, следовательно, являются связями первого рода. Полезно рассмотреть вместо двух связей G_+ и G_- одну связь $G = G_-^{-1}G_+ = 1$. Эта связь удовлетворяет следующей квадратичной пуассоновой алгебре:

$$\frac{1}{\gamma}\{G^1, G^2\} = G^1 r_+ G^2 - G^2 G^1 r_+ - r_- G^2 G^1 + G^2 r_- G^1. \quad (27)$$

В пределе $\gamma \rightarrow 0$, $L_{\pm} \rightarrow 1 + \gamma E_{\pm}$ она сводится к обычному закону Гаусса (13).

Таким образом, деформированное фазовое пространство и связи закона Гаусса определены. Теперь следует вспомнить, что то же самое фазовое пространство и связи появились в недавних работах [12,13], в которых изучалась связь между дублем Гейзенберга и симплектической структурой пространства модулей плоских связностей на римановой поверхности. В [12, 13] было показано, что имеется такая замена переменных, при которой пуассонова структура в терминах новых переменных совпадает с пуассоновой структурой, введенной Фоком и Рослым [14] для описания пространства модулей. Для удобства приведем здесь соответствующие формулы в наших обозначениях.

Итак, рассмотрим следующую замену переменных [12, 13]:

$$\begin{aligned} A_i &= W_i^{-1} L_-^{-1}(i) U(i) L_+(i) W_i, \\ B_i &= W_i^{-1} L_-^{-1}(i) L_+(i) W_i, \\ W_i &= G_+(i+1) \dots G_+(g), \quad W_g = 1. \end{aligned} \quad (28)$$

Связь $G = G_-^{-1} G_+ = 1$ можно выразить через новые поля A_i и B_i следующим образом:

$$\begin{aligned} G^{-1} &= G_+^{-1} G_- = A_1^{-1} B_1 A_1 B_1^{-1} A_2^{-1} B_2 A_2 B_2^{-1} \dots A_g^{-1} B_g A_g B_g^{-1} = \\ &= \prod_{i=1}^g A_i^{-1} B_i A_i B_i^{-1} = 1. \end{aligned} \quad (29)$$

Уравнение (29) – определяющее соотношение для голономий A_i и B_i плоской связности по циклам a_i и b_i римановой поверхности с g ручками. Используя пуассонову структуру дубля Гейзенберга, легко найти пуассонову структуру, образуемую полями A_i и B_i . При $i = 1, \dots, g$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma} \{A_i^1, A_i^2\} &= A_i^1 r_+ A_i^2 - A_i^2 A_i^1 r_+ - r_- A_i^2 A_i^1 + A_i^2 r_- A_i^1, \\ \frac{1}{\gamma} \{B_i^1, B_i^2\} &= B_i^1 r_+ B_i^2 - B_i^2 B_i^1 r_+ - r_- B_i^2 B_i^1 + B_i^2 r_- B_i^1, \\ \frac{1}{\gamma} \{A_i^1, B_i^2\} &= A_i^1 r_+ B_i^2 - B_i^2 A_i^1 r_+ - r_+ B_i^2 A_i^1 + B_i^2 r_- A_i^1. \end{aligned} \quad (30a)$$

При $i < j$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma} \{A_i^1, A_j^2\} &= A_i^1 r_+ A_j^2 - A_j^2 A_i^1 r_+ - r_+ A_j^2 A_i^1 + A_j^2 r_+ A_i^1, \\ \frac{1}{\gamma} \{A_i^1, B_j^2\} &= A_i^1 r_+ B_j^2 - B_j^2 A_i^1 r_+ - r_+ B_j^2 A_i^1 + B_j^2 r_+ A_i^1, \\ \frac{1}{\gamma} \{B_i^1, B_j^2\} &= B_i^1 r_+ B_j^2 - B_j^2 B_i^1 r_+ - r_+ B_j^2 B_i^1 + B_j^2 r_+ B_i^1, \\ \frac{1}{\gamma} \{B_i^1, A_j^2\} &= B_i^1 r_+ A_j^2 - A_j^2 B_i^1 r_+ - r_+ A_j^2 B_i^1 + A_j^2 r_+ B_i^1. \end{aligned} \quad (30b)$$

Пуассонова структура (30) совпадает со структурой, введенной в [14] для описания пространства модулей плоских $SL(N)$ -связностей на римановой поверхности с g ручками. Связь закона Гаусса (29) порождает следующие калибровочные преобразования:

$$A_i \rightarrow g A_i g^{-1}, \quad B_i \rightarrow g B_i g^{-1}, \quad (31)$$

где калибровочные параметры g зависят от связи G . С точки зрения теории групп Пуассона–Ли калибровочные параметры g следует считать принадлежащими группе Пуассона–Ли. Тогда уравнение (31) определяет действие группы Пуассона–Ли на пуассоновой алгебре (30) с помощью так называемых одевающих преобразований [6, 9].

До сих пор мы рассматривали только случай комплексной группы $SL(N)$. Однако для физических приложений необходимо выделить вещественную форму $SU(N)$. Это можно сделать с помощью следующего условия, которое, по-видимому, было ранее неизвестно:

$$A_i^* = G_+ A_i^{-1} G_+^{-1}, \quad B_i^* = G_+ B_i^{-1} G_+^{-1}. \quad (32)$$

Здесь A^* – матрица, эрмитово сопряженная к A . Не представляет трудностей проверить, что это условие совместимо с пуассоновой структурой (30) и со связью закона Гаусса (21). Соответствующий антиавтоморфизм

$$\rho(A_i) = G_+ A_i^{-1} G_+^{-1}, \quad \rho(B_i) = G_+ B_i^{-1} G_+^{-1} \quad (33)$$

не является антиинволюцией пуассоновой алгебры (30). Было бы интересно сравнить этот антиавтоморфизм с инволюцией, введенной в [19] для квантования пространства модулей. Отметим, что на поверхности связей $G_{\pm} = 1$ условие (32) представляет собой стандартную инволюцию, которая выделяет группу $SU(N)$.

Таким образом, показано, что γ -деформированное физическое фазовое пространство калибровочной модели на графе совпадает с пространством модулей плоских связностей на римановой поверхности и является компактным для группы $SU(N)$. Хорошо известно [15], что то же самое пространство есть физическое фазовое пространство $(2 + 1)$ -мерной теории Черна–Саймонса с γ , равным $2\pi/k$. Для группы $SU(N)$ параметр Черна–Саймонса k должен быть целым. Благодаря этой связи все корреляционные функции решеточной теории Янга–Миллса можно выразить через нелокальные корреляционные функции теории Черна–Саймонса. Квантование физического фазового пространства приводит к конечномерному гильбертову пространству, которое можно отождествить с пространством конформных блоков модели ВЗНВ [15, 16].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе была изучена структура физического фазового пространства калибровочных моделей на графах. Было показано, что любой граф калибровочно-эквивалентен стандартному графу, и описана процедура редукции к стандартному графу.

Была обсуждена деформация калибровочных моделей на стандартных графах, основанная на приписывании каждому ребру дубля Гейзенберга. Доказано, что физическое фазовое пространство деформированной $SL(N)$ -калибровочной модели совпадает с пространством модулей плоских $SL(N)$ -связностей на римановой поверхности, а также найдено уравнение (32), которое выделяет пространство модулей плоских $SU(N)$ -связностей. Как хорошо известно, то же самое пространство модулей есть физическое фазовое пространство $(2 + 1)$ -мерной модели Черна–Саймонса. По этой причине все корреляционные функции деформированных калибровочных моделей могут быть выражены через нелокальные корреляционные функции модели Черна–Саймонса.

Известно [15], что в квантовой теории физическое гильбертово пространство модели Черна–Саймонса конечномерно и может быть отождествлено с пространством конформных блоков модели ВЗНВ. Представляется интересным, используя эту связь с моделью ВЗНВ, переформулировать задачу на собственные значения для редуцированного янг-миллсовского гамильтониана в терминах конформной теории поля.

Конечномерность гильбертова пространства также позволяет построить разложение слабой связи, которое отличается от асимптотического разложения стандартной

теории возмущений. Главный вклад в разложение слабой связи дается магнитной частью H_m гамильтониана Янга–Миллса. Хотя вид гамильтониана H_m зависит от размерности пространства, ясно, что любой гамильтониан H_m описывает интегрируемую систему и, более того, все они принадлежат одной интегрируемой иерархии. Таким образом, первый шаг разложения слабой связи состоит в том, чтобы решить соответствующую интегрируемую систему. Это представляется возможным, по крайней мере, в случае двух измерений благодаря факторизации (15) гамильтониана H_m .

Следует отметить, что такая деформация решеточной теории Янга–Миллса приводит к некоторой дуальности между магнитным и электрическим полями. Переменные A и B входят в алгебру (30) одинаковым образом и играют роль магнитного и электрического полей. По-видимому, эта дуальность обобщает хорошо известную дуальность Крамерса–Вигнера и предполагает возможность существования соответствия между разложениями сильной и слабой связи.

В настоящей работе рассмотрена чистая теория Янга–Миллса без полей материи. Представляется интересным включить в рассмотрение фермионы. Алгебру Пуассона (30) можно легко проквантовать и получить квадратичную алгебру, введенную в [19] для квантования теории Черна–Саймонса. Классические r -матрицы $r_{\pm}$ следует заменить R -матрицами $R_{\pm}(q) = 1 + i\hbar\gamma r_{\pm} + \dots$, где $q = e^{i\hbar\gamma}$. Нетрудно проверить, что в квантовой теории связи закона Гаусса являются связями первого рода, а также построить квантовый гамильтониан, который коммутирует со связями. Однако теория представлений квантовой алгебры остается пока неизвестной.

Отметим, что q имеет неполиномиальную зависимость от постоянной Планка $\hbar$ и, таким образом, уже древесные корреляционные функции модели также будут зависеть от $\hbar$ неполиномиально. По-видимому, это показывает, что корреляционные функции моделей соответствуют суммированию бесконечного числа обычных фейнмановских диаграмм. Не исключено, что параметр γ играет роль инфракрасного обрезания. Благодаря наличию в моделях дополнительного параметра γ можно ожидать, что эти модели имеют гораздо более богатую фазовую структуру, чем обычная решеточная калибровочная теория.

Наконец, заметим, что q -деформированная решеточная калибровочная теория рассматривалась в работах [14, 19–21] в связи с теорией Черна–Саймонса.

Автору хотелось бы поблагодарить А. Ю. Алексеева, Г. Э. Арутюнова, А. Горского, В. Рубцова и А. А. Славнова за обсуждения. Автор также благодарен профессору Ю. Вессу за теплый прием и фонду Александра Гумбольта за поддержку. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, номер гранта 94-01-00300а.

Список литературы

- [1] *S. A. Frolov.* Mod. Phys. Lett. A. 1995. V. 10. № 34. P. 2619–2631.
- [2] *S. A. Frolov.* Hamiltonian lattice Yang–Mills theory and the Heisenberg double. hep-th/9502121; Mod. Phys. Lett. A (in print).
- [3] *K. Wilson.* Phys. Rev. D. 1974. V. 10. P. 2445.
- [4] *J. B Kogut, L. Susskind.* Phys. Rev. D. 1975. V. 11. P. 395.
- [5] *V. G. Drinfeld.* Sov. Math. Doklady. 1983. V. 27. P. 68–71.
- [6] *M. A. Semenov-Tian-Shansky.* Dressing transformations and Poisson-Lie group actions.. Publ. RIMS, Kyoto Univ. 1985. V. 21. № 6. P. 1237.
- [7] *N. Yu. Reshetikhin, M. A. Semenov-Tian-Shansky.* Lett. Math. Phys. 1990. V. 19. P. 133–142.
- [8] *A. Yu. Alekseev, L. D. Faddeev.* Commun. Math. Phys. 1991. V. 141. P. 413–422.

- [9] *М. А. Семенов-Тянь-Шанский*. ТМФ. 1992. Т. 93. № 2. С. 302.
- [10] *A. Yu. Alekseev, A. Z. Malkin*. Commun. Math. Phys. 1993. V. 162. P. 147–173.
- [11] *A. Yu. Alekseev, L. D. Faddeev*. An involution and dynamics for the q -deformed quantum top. hep-th/9406196.
- [12] *A. Yu. Alekseev, A. Z. Malkin*. Symplectic structure of the moduli space of flat connection on a Riemann surface. hep-th/9312004.
- [13] *A. Yu. Alekseev*. Integrability in the Hamiltonian Chern–Simons theory. hep-th/9311074; *А. Ю. Алексеев*. Санкт-Петербургский матем. ж. 1994. Т. 6. № 2. С. 1.
- [14] *V. V. Fock, A. A. Rosly*. Poisson structures on moduli of flat connections on Riemann surfaces and r -matrices. Preprint ITEP 72-92, June 1992. М.: ITEP, 1992.
- [15] *E. Witten*. Commun. Math. Phys. 1989. V. 121. P. 351.
- [16] *S. Axelrod, S. Della Pietra, E. Witten*. J. Differ. Geom. 1991. V. 33. P. 787.
- [17] *V. Drinfeld*. Quantum Groups. In: Proc. ICM-86. Berkeley, California, USA, 1986, 1987. P. 798–820.
- [18] *Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев*. Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. Вып. 1. С. 179–206.
- [19] *A. Yu. Alekseev, H. Grosse, V. Schomerus*. Combinatorial quantization of the Hamiltonian Chern Simons theory I, II. HUTMP 94-B336; HUTMP 94-B337.
- [20] *D. V. Boulatov*. Int. J. Mod. Phys. A. 1993. V. 8. P. 3139.
- [21] *E. Buffenoir, Ph. Roche*. Two dimensional lattice gauge theory based on a quantum group. Preprint CPTH A 302-05/94.

Поступила в редакцию 29.IV.1997 г.

S. A. Frolov

PHYSICAL PHASE SPACE OF THE LATTICE YANG–MILLS THEORY AND MODULI SPACE OF FLAT CONNECTIONS ON A RIEMANN SURFACE

It is shown that the physical phase space of γ -deformed, Hamiltonian-lattice Yang–Mills theory, which was recently proposed in [1, 2], coincides as a Poisson manifold with the moduli space of flat connections on a Riemann surface with $(L - V + 1)$ handles and, therefore, with the physical phase space of the corresponding $(2 + 1)$ -dimensional Chern–Simons model, where L and V are, respectively, the total number of links and vertices of the lattice. The deformation parameter γ is identified with $2\pi/k$ and k is an integer entering the Chern–Simons action.