Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Жаринов, Когомологии Хохшильда алгебры гладких функций, *ТМФ*, 2004, том 140, номер 3, 355–366

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf107>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 13:58:06

© 2004 г.

В. В. Жаринов*

КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА АЛГЕБРЫ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Опираясь на развитую ранее технику, использующую преобразование Лапласа обобщенных функций с компактным носителем, вычислены когомологии Хохшильда алгебры гладких функций на конечномерном вещественном векторном пространстве с коэффициентами в присоединенном представлении.

Ключевые слова: ассоциативная алгебра, бимодуль, кограничный оператор, комплекс, экспоненциальное преобразование.

Когомологии Хохшильда [1] ассоциативных алгебр наряду с когомологиями Шевалле–Эйленберга [2] алгебр Ли играют ведущую роль в теории деформаций различных алгебраических структур [3], [4]. Учитывая неослабевающий интерес к последней в различных областях математики и физики, включая квантовую теорию [5] (см. также обзор [6]), весьма желательно иметь полностью просчитанные примеры, особенно примеры, важные в приложениях. В предлагаемой работе аналитическими методами вычислены когомологии Хохшильда алгебры гладких функций на конечномерном вещественном пространстве с коэффициентами в присоединенном представлении.

1. КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА

Пусть заданы $\mathbb{F}$ – поле характеристики нуль, $\mathfrak{A}$ – ассоциативная алгебра над $\mathbb{F}$ и $\mathfrak{B}$ – бимодуль над $\mathfrak{A}$. Будем предполагать, специально этого не оговаривая, что все линейные операции выполняются над $\mathbb{F}$ и все бесконечномерные линейные пространства снабжены естественной локально выпуклой топологией [7]. Все вводимые ниже линейные отображения непрерывные, хотя в явном виде это не проверяется.

Пусть $\otimes \mathfrak{A} = \bigoplus_{q \geq 0} \otimes^q \mathfrak{A}$ – тензорная алгебра линейного пространства $\mathfrak{A}$, $\mathcal{C}(\mathfrak{A}; \mathfrak{B}) = \bigoplus_{q \geq 0} \mathcal{C}^q(\mathfrak{A}; \mathfrak{B})$ – линейное пространство всех коцепей на $\mathfrak{A}$ со значениями в $\mathfrak{B}$, где $\mathcal{C}^q(\mathfrak{A}; \mathfrak{B})$ суть линейные пространства всех q -линейных отображений из $\mathfrak{A}^q = \times^q \mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$.

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: zharinov@mi.ras.ru

Кограничный оператор δ на $\mathcal{C}(\mathfrak{A}; \mathfrak{B})$ задается правилом

$$\begin{aligned} \delta\omega(a_1, \dots, a_{q+1}) &= a_1\omega(a_2, \dots, a_{q+1}) + \\ &+ \sum_{1 \leq r \leq q} (-1)^r \omega(a_1, \dots, a_r a_{r+1}, \dots, a_{q+1}) + (-1)^{q+1} \omega(a_1, \dots, a_q) a_{q+1}, \end{aligned}$$

где $q = 0, 1, \dots$, $\omega \in \mathcal{C}^q(\mathfrak{A}; \mathfrak{B})$, $a_1, \dots, a_{q+1} \in \mathfrak{A}$, $\delta\omega \in \mathcal{C}^{q+1}(\mathfrak{A}; \mathfrak{B})$. Легко проверяется, что $\delta \circ \delta = 0$ (здесь и всюду ниже значок $\circ$ означает композицию отображений), так что определен комплекс $\{\mathcal{C}(\mathfrak{A}; \mathfrak{B}); \delta\}$ с когомологиями

$$H\{\mathcal{C}(\mathfrak{A}; \mathfrak{B}); \delta\} = H(\mathfrak{A}; \mathfrak{B}) = \bigoplus_{q \geq 0} H^q(\mathfrak{A}; \mathfrak{B}).$$

Над всякой ассоциативной алгеброй $\mathfrak{A}$ определены два естественных бимодуля:

- *тривиальный*, $\mathfrak{B} = \mathbb{F}$, действия $ax = xa = 0$ для всех $a \in \mathfrak{A}$, $x \in \mathbb{F}$;
- *присоединенный*, $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$, действия ab, ba суть произведения в алгебре $\mathfrak{A}$ для всех $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{B} = \mathfrak{A}$.

В первом случае справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Если алгебра $\mathfrak{A}$ унитарная (т.е. содержит единичный элемент), то когомологии*

$$H^q(\mathfrak{A}; \mathbb{F}) = \begin{cases} \mathbb{F}, & q = 0, \\ 0, & q = 1, 2, \dots \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в этом случае для всех $\omega \in \mathcal{C}^q(\mathfrak{A}; \mathbb{F})$, $q = 0, 1, \dots$, легко проверяется гомотопическая формула

$$(\delta \circ \rho + \rho \circ \delta)\omega = \begin{cases} 0, & q = 0, \\ \omega, & q = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} \delta\omega(a_1, \dots, a_{q+1}) &= \sum_{1 \leq r \leq q} (-1)^r \omega(a_1, \dots, a_r a_{r+1}, \dots, a_{q+1}), \\ \rho\omega(a_1, \dots, a_{q-1}) &= -\omega(e, a_1, \dots, a_{q-1}) \end{aligned}$$

для всех $a_1, \dots, a_{q+1} \in \mathfrak{A}$ (e – единичный элемент алгебры $\mathfrak{A}$).

2. АЛГЕБРА ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Будем использовать технику, развитую в работах [8]. Начиная с этого момента $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, V – вещественное m -мерное линейное пространство, $\mathbb{V} = \mathbb{C} \otimes V$ – его комплексификация, V^* и $\mathbb{V}^*$ – их дуальные, $\mathfrak{A} = \mathcal{E}(V) = \mathcal{C}^\infty(V; \mathbb{C})$ – алгебра всех гладких комплексных функций на V с естественной топологией равномерной сходимости на компактах вместе с производными всех порядков.

В случае тривиальных коэффициентов пространства $\mathcal{C}^q(\mathcal{E}(V); \mathbb{C}) = \mathcal{E}(V^q)^*$ – линейные пространства, дуальные к пространствам $\mathcal{E}(V^q)$, наделенные сильной топологией, так что q -коцепи суть обобщенные функции на $V^q = \times^q V$ с компактными носителями. Когомологии комплекса $\{\mathcal{C}(\mathcal{E}(V); \mathbb{C}); \delta\}$ описываются предложением 1.1, поскольку алгебра $\mathcal{E}(V)$ содержит единичный элемент – функцию $e(x) \equiv 1$.

Остальная часть статьи посвящена когомологиям алгебры $\mathcal{E}(V)$ с коэффициентами в присоединенном бимодуле $\mathfrak{B} = \mathcal{E}(V)$. Здесь пространства $\mathcal{C}^q(\mathcal{E}(V); \mathcal{E}(V))$ – линейные пространства всех непрерывных q -линейных отображений из $\mathcal{E}(V)^q$ в $\mathcal{E}(V)$, наделенные сильной топологией. Справедливо представление $\mathcal{C}^q(\mathcal{E}(V); \mathcal{E}(V)) = \mathcal{E}(V) \hat{\otimes} \mathcal{E}(V^q)^*$, где значок $\hat{}$ означает замыкание тензорного произведения в подходящей топологии, которая для нас сейчас не важна [7]. В частности, q -коцепи суть $\mathcal{E}(V)$ -значные обобщенные функции на V^q с компактными носителями.

3. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Для всякой пары $\xi \in \mathbb{V}^*$, $x \in V$ определено естественное спаривание (ξ, x) ковектора и вектора. Каждому $\xi \in \mathbb{V}^*$ поставим в соответствие функцию $e^\xi \in \mathcal{E}(V)$, где $e^\xi(x) = e^{(\xi, x)}$ для всех $x \in V$.

Пусть $q = 0, 1, \dots$. Обозначим через $\text{Exp}((V^*)^q)$ линейное пространство всех целых функций экспоненциального типа на $(\mathbb{V}^*)^q \simeq \mathbb{C}^{mq}$. Преобразование Лапласа $\omega \mapsto L\omega$ определено формулой

$$L\omega(\xi_1, \dots, \xi_q) = \omega(e^{\xi_1}, \dots, e^{\xi_q})$$

для всех $\omega \in \mathcal{E}(V^q)^*$ и $\xi_1, \dots, \xi_q \in \mathbb{V}^*$. Линейное отображение $L: \mathcal{E}(V^q)^* \rightarrow \text{Exp}((\mathbb{V}^*)^q)$ инъективное, его образ $\Phi^q = L(\mathcal{E}(V^q)^*)$ состоит из всех целых функций на $(\mathbb{V}^*)^q$, растущих не быстрее линейной экспоненты в вещественных направлениях и не быстрее степенной функции в мнимых. Линейное пространство Φ^q наделается топологией, индуцированной из $\mathcal{E}(V^q)^*$, так что определен изоморфизм линейных топологических пространств $L: \mathcal{E}(V^q)^* \simeq \Phi^q$ (см., например, [9]). Отождествление $L \equiv \text{id}_{\mathcal{E}(V)} \otimes L$ распространяет преобразование Лапласа на $\mathcal{E}(V) \hat{\otimes} \mathcal{E}(V^q)^*$ и приводит к изоморфизму

$$L: \mathcal{C}^q(\mathcal{E}(V); \mathcal{E}(V)) \simeq \mathcal{F}^q = \mathcal{E}(V) \hat{\otimes} \Phi^q.$$

“Подкрученное” преобразование $\Lambda: \mathcal{C}^q(\mathcal{E}(V); \mathcal{E}(V)) \simeq \mathcal{F}^q$ задается правилом

$$\Lambda\omega(x; \xi_1, \dots, \xi_q) = e^{-(\xi, x)} \omega(x; e^{\xi_1}, \dots, e^{\xi_q})$$

для всех $\omega \in \mathcal{C}^q(\mathcal{E}(V); \mathcal{E}(V))$, $x \in V$, $\xi_1, \dots, \xi_q \in \mathbb{V}^*$, $\xi = \sum_{1 \leq r \leq q} \xi_r \in \mathbb{V}^*$ и приводит к изоморфизму

$$\Lambda: \mathcal{C}(\mathcal{E}(V); \mathcal{E}(V)) \simeq \mathcal{F} = \bigoplus_{q \geq 0} \mathcal{F}^q.$$

Кограничный оператор $\delta: \mathcal{C}(\mathcal{E}(V); \mathcal{E}(V)) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{E}(V); \mathcal{E}(V))$ индуцирует дифференциал $d_{\mathcal{F}} = \Lambda \circ \delta \circ \Lambda^{-1}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, действующий по правилу

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{F}} f(x; \xi_1, \dots, \xi_{q+1}) &= f(x; \xi_2, \dots, \xi_{q+1}) + \\ &+ \sum_{1 \leq r \leq q} (-1)^r f(x; \xi_1, \dots, \xi_r + \xi_{r+1}, \dots, \xi_{q+1}) + (-1)^{q+1} f(x; \xi_1, \dots, \xi_q) \end{aligned}$$

для всех $f \in \mathcal{F}^q$, $x \in V$, $\xi_1, \dots, \xi_{q+1} \in \mathbb{V}^*$. Итак, определены комплекс $\{\mathcal{F}; d_{\mathcal{F}}\}$ и изоморфизмы комплексов $\Lambda: \{\mathcal{C}(\mathcal{E}(V); \mathcal{E}(V)); \delta\} \simeq \{\mathcal{F}; d_{\mathcal{F}}\}$ и соответствующих пространств

когомологий Λ : $H(\mathcal{E}(V); \mathcal{E}(V)) \simeq H(\mathcal{F})$. Далее, при вычислении дифференциала $d_{\mathcal{F}} f$ переменная $x \in V$ является параметром, т.е. $d_{\mathcal{F}} = \text{id}_{\mathcal{E}(V)} \otimes d$, где дифференциал $d: \Phi \rightarrow \Phi$, $\Phi = \bigoplus_{q \geq 0} \Phi^q$, действует по “суженному” правилу (его явный вид приведен ниже). Таким образом, определен вспомогательный комплекс $\{\Phi; d\}$ с пространством когомологий $H(\Phi)$ и справедливо

Предложение 3.1. *Имеет место изоморфизм*

$$H(\mathcal{E}(V); \mathcal{E}(V)) \simeq \mathcal{E}(V) \widehat{\otimes} H(\Phi).$$

4. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НА Φ

4.1. Мультииндексные обозначения. Пусть $\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, \dots\}$, $\overline{1, m} = \{1, \dots, m\}$, где $m = \dim \mathbb{V}$. Положим

$$\mathbb{Z}_m^+ = \{K = (k_1, \dots, k_m); k_\alpha \in \mathbb{Z}^+, \alpha \in \overline{1, m}\}$$

и будем писать $|K| = k_1 + \dots + k_m$, $K! = k_1! \dots k_m!$ для всякого $K = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}_m^+$. Для каждого $q \in \mathbb{Z}^+$ положим

$$(\overline{1, m})_q = \{A = (\alpha_1, \dots, \alpha_q); \alpha_r \in \overline{1, m}, 1 \leq r \leq q\}$$

и будем писать $|A| = q$, $A' = (\alpha_q, \dots, \alpha_1)$ для всякого $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_q) \in (\overline{1, m})_q$.

Фиксируем в дуальном пространстве $\mathbb{V}^*$ систему координат, так что теперь $\mathbb{V}^* = \{\xi = (\xi^1, \dots, \xi^m); \xi^\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \in \overline{1, m}\}$. Для каждого $K \in \mathbb{Z}_m^+$ определены моном $\xi^K = (\xi^1)^{k_1} \dots (\xi^m)^{k_m} \in \Phi^1$ и частная производная $\partial_{\xi^K} = (\partial_{\xi^1})^{k_1} \dots (\partial_{\xi^m})^{k_m}$ порядка $|K|$. В частности, $\xi^0 = 1$, $\partial_{\xi^0} = \text{id}$. Далее, для каждого $\alpha \in \overline{1, m}$ положим $K = (\alpha) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (1 стоит на α -м месте), так что $\xi^\alpha = \xi^{(\alpha)}$, $\partial_{\xi^\alpha} = \partial_{\xi^{(\alpha)}}$. Аналогичным образом для $\alpha, \beta \in \overline{1, m}$ положим $\xi^{\alpha\beta} = \xi^{(\alpha)+(\beta)} = \xi^\alpha \xi^\beta \in \Phi^1$.

4.2. Операции. На линейном пространстве Φ определена структура ассоциативной алгебры правилом $\phi \in \Phi^p$, $\psi \in \Phi^q \mapsto \phi \otimes \psi \in \Phi^{p+q}$, где $\phi \otimes \psi(\xi_1, \dots, \xi_{p+q}) = \phi(\xi_1, \dots, \xi_p) \psi(\xi_{p+1}, \dots, \xi_{p+q})$ для всех $\xi_1, \dots, \xi_{p+q} \in \mathbb{V}^*$, $p, q = 0, 1, \dots$.

Кроме того, на Φ определена основная операция – дифференциал d , действующий по правилу

$$\begin{aligned} d\phi(\xi_1, \dots, \xi_{q+1}) &= \phi(\xi_2, \dots, \xi_{q+1}) + \\ &+ \sum_{1 \leq r \leq q} (-1)^r \phi(\xi_1, \dots, \xi_r + \xi_{r+1}, \dots, \xi_{q+1}) + (-1)^{q+1} \phi(\xi_1, \dots, \xi_q) \end{aligned}$$

для всех $\phi \in \Phi^q$, $\xi_1, \dots, \xi_{q+1} \in \mathbb{V}^*$, $q = 0, 1, \dots$.

ПРИМЕР 4.1. Пусть $K \in \mathbb{Z}_m^+$ и $\xi^K \in \Phi^1$, тогда

$$(d\xi^K)(\xi_1, \xi_2) = \xi_2^K - (\xi_1 + \xi_2)^K + \xi_1^K$$

для всех $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{V}^*$ и, следовательно, $d\xi^K = 0$ тогда и только тогда, когда $|K| = 1$. В частности, $d\xi^{\alpha\beta} = -(\xi^\alpha \otimes \xi^\beta + \xi^\beta \otimes \xi^\alpha)$ для всех $\alpha, \beta \in \overline{1, m}$.

Легко проверяется

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Отображение $d: \Phi \rightarrow \Phi$ является косым дифференцированием алгебры Φ , т.е.*

$$d(\phi \otimes \psi) = (d\phi) \otimes \psi + (-1)^p \phi \otimes (d\psi)$$

для всех $\phi \in \Phi^p$, $\psi \in \Phi^q$, $p, q = 0, 1, \dots$.

Введем ряд вспомогательных операций. Пусть $K \in \mathbb{Z}_m^+$.

- Линейное отображение $\partial_{\xi^K}: \Phi \rightarrow \Phi$ зададим правилом

$$\partial_{\xi^K} \phi(\xi_1, \dots, \xi_q) = \partial_{\xi^K} \phi(\xi, \xi_2, \dots, \xi_q)|_{\xi=\xi_1} = \partial_{\xi_1^K} \phi(\xi_1, \dots, \xi_q)$$

для всех $\phi \in \Phi^q$, $\xi_1, \dots, \xi_q \in \mathbb{V}^*$, $q \in \mathbb{Z}^+$. В частности, $\partial_{\xi^0} = \text{id}_\Phi$ — тождественное отображение на Φ .

- Линейное отображение $\iota_K: \Phi \rightarrow \Phi$ зададим правилом

$$\iota_K \phi(\xi_1, \dots, \xi_{q-1}) = \partial_{\xi^K} \phi(\xi, \xi_1, \dots, \xi_{q-1})|_{\xi=0}$$

для всех $\phi \in \Phi^q$, $\xi_1, \dots, \xi_{q-1} \in \mathbb{V}^*$, $q \in \mathbb{Z}^+$. В частности, положим $\iota = \iota_0$, тогда $\iota_K = \iota \circ \partial_{\xi^K}$.

- Линейное отображение $\lambda^K: \Phi \rightarrow \Phi$ зададим правилом

$$\lambda^K \phi(\xi_1, \dots, \xi_{q+1}) = \xi^K \phi(\xi_2, \dots, \xi_{q+1})|_{\xi=\xi_1}$$

для всех $\phi \in \Phi^q$, $\xi_1, \dots, \xi_{q+1} \in \mathbb{V}^*$, $q \in \mathbb{Z}^+$. Другими словами, $\lambda^K = \xi^K \otimes$. Обозначим $\lambda = \lambda^0$.

- Положим

$$\tau_K = \frac{1}{K!} \lambda^K \circ \iota_K, \quad T_p = \sum_{|K| \leq p} \tau_K, \quad \rho_p = \text{id}_\Phi - T_p, \quad p \in \mathbb{Z}^+,$$

так что $\tau_K \phi$ — моном мультистепени K , $T_p \phi$ — многочлен степени p , $\rho_p \phi$ — соответствующий остаток разложения в ряд Тейлора функции $\phi \in \Phi^q$ по первому аргументу. Обозначим $\tau = \tau_0$, $\rho = \rho_0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Справедливы следующие равенства:*

1. $d \circ \iota + \iota \circ d = \tau$;
2. $d \circ \lambda + \lambda \circ d = \lambda \circ \lambda$;
3. $\iota \circ \lambda = \text{id}_\Phi$, $\lambda \circ \iota = \tau$, $\iota \circ \lambda - \lambda \circ \iota = \rho$;
4. $d \circ \tau - \tau \circ d = 0$, $d \circ \rho - \rho \circ d = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Для любого $K \in \mathbb{Z}_m^+$, $K \neq 0$, справедливы равенства

1. $d \circ \partial_{\xi K} - \partial_{\xi K} \circ d = \lambda \circ \partial_{\xi K}$;
2. $d \circ \iota_K + \iota_K \circ d = -\rho \circ \partial_{\xi K} = -\partial_{\xi K} \circ \rho_{|K|}$;
3. $d \circ \lambda^K + \lambda^K \circ d = d(\lambda^K) = (d\xi^K) \otimes$, причем $d(\lambda^K) = 0$ тогда и только тогда, когда $|K| = 1$;
4. $\partial_{\xi K} \circ \lambda^L = L! \lambda^{L-K} / (L-K)!$, $\iota_K \circ \lambda^L = L! \delta_K^L \text{id}_\Phi$, $L \in \mathbb{Z}_m^+$, δ_K^L – символ Кронекера.

Доказательство обоих предложений проводится последовательно прямыми вычислениями.

Нам в основном понадобится следующий частный случай.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Для любых $\alpha, \beta \in \overline{1, m}$ справедливы равенства:

1. $d \circ \partial_{\xi \alpha} - \partial_{\xi \alpha} \circ d = \lambda \circ \partial_{\xi \alpha} = \partial_{\xi \alpha} \circ (\sum_{1 \leq \gamma \leq m} \lambda^\gamma \circ \partial_{\xi \gamma})$;
2. $d \circ \iota_\alpha + \iota_\alpha \circ d = -\partial_{\xi \alpha} \circ \rho_1$;
3. $d \circ \lambda^\alpha + \lambda^\alpha \circ d = 0$;
4. $\partial_{\xi \alpha} \circ \lambda^\beta = \delta_\alpha^\beta \lambda$, $\iota_\alpha \circ \lambda^\beta = \delta_\alpha^\beta \text{id}_\Phi$.

4.3. Симметрическая группа. Напомним элементарные свойства симметрической группы $\mathfrak{S}_q$, $q \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, т.е. группы подстановок множества $\overline{1, q} = \{1, \dots, q\}$, так что $\{1, \dots, q\} \mapsto \{\pi(1), \dots, \pi(q)\}$ для каждого $\pi \in \mathfrak{S}_q$.

1. Определен морфизм группы $\text{sign}: \mathfrak{S}_q \rightarrow \{\pm 1\}$, $\pi \mapsto \text{sign } \pi$ – знак подстановки π .
2. Подстановка ε называется элементарной, если она меняет местами два соседних индекса, а остальные оставляет на своих местах. Для всякой подстановки $\pi \in \mathfrak{S}_q$ существуют элементарные подстановки $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \mathfrak{S}_q$, $n = n(\pi)$, такие, что $\pi = \varepsilon_1 \circ \dots \circ \varepsilon_n$, $\text{sign } \pi = (-1)^n$.

3. Определено действие группы $\mathfrak{S}_q$ на множестве $(\overline{1, m})_q$, $\mathfrak{S}_q \ni \pi: (\overline{1, m})_q \rightarrow (\overline{1, m})_q$ правилом $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_q) \mapsto \pi A = (\alpha_{\pi(1)}, \dots, \alpha_{\pi(q)})$.

4. Пусть $\mathcal{K}$ – вещественное или комплексное линейное пространство. Обозначим $\mathcal{K}^{(\overline{1, m})_q} = \{\phi = (\phi_A): (\overline{1, m})_q \rightarrow \mathcal{K}\}$ множество отображений из $(\overline{1, m})_q$ в $\mathcal{K}$. Определено действие группы $\mathfrak{S}_q$ на $\mathcal{K}^{(\overline{1, m})_q}$ правилом $\mathfrak{S}_q \ni \pi: \mathcal{K}^{(\overline{1, m})_q} \rightarrow \mathcal{K}^{(\overline{1, m})_q}$, $\phi \mapsto \pi\phi$, где $(\pi\phi)_A = \phi_{\pi A}$.

5. Определена операция кососимметризации $\mathbf{a}: \mathcal{K}^{(\overline{1, m})_q} \rightarrow \mathcal{K}^{(\overline{1, m})_q}$ правилом $\phi \mapsto \mathbf{a}\phi = (1/q!) \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_q} \text{sign } \pi \cdot \pi\phi$. Будем писать $(\mathbf{a}\phi)_A = \phi_{[A]} = \phi_{[\alpha_1 \dots \alpha_q]}$, где квадратные скобки означают кососимметризацию по находящимся внутри индексам. Легко проверяются следующие свойства кососимметризации:

- $\mathbf{a} \circ \mathbf{a} = \text{id}$, т.е. $\mathbf{a}$ – проектор;
- $\mathbf{a}(\pi\phi) = \text{sign } \pi \cdot \mathbf{a}\phi$ для всех $\phi \in \mathcal{K}^{(\overline{1, m})_q}$ и $\pi \in \mathfrak{S}_q$.

ЛЕММА 4.1. Для любых $\phi \in \mathcal{K}^{(\overline{1, m})_q}$ и $\pi \in \mathfrak{S}_q$ существуют $\phi_1, \dots, \phi_n \in \mathcal{K}^{(\overline{1, m})_q}$ и $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \mathfrak{S}_q$, $\varepsilon_r \phi_r = \phi_r$, $1 \leq r \leq n$, такие, что $\phi - \text{sign } \pi \cdot \pi\phi = \sum_{1 \leq r \leq n} \phi_r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\pi = \varepsilon_1 \circ \dots \circ \varepsilon_n$, $\text{sign } \pi = (-1)^n$. Тогда годятся $\phi_r = (-1)^{n-r} (\varepsilon_r + \text{id})(\varepsilon_{r+1} \dots \varepsilon_n \phi)$, $1 \leq r \leq n-1$, $\phi_n = (\varepsilon_n + \text{id})\phi$, где id – тождественное отображение.

ЛЕММА 4.2. Для любого $\phi \in \mathcal{K}(\overline{1, m})_q$ существуют такие $\phi_1, \dots, \phi_N \in \mathcal{K}(\overline{1, m})_q$ и $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N \in \mathfrak{S}_q$, $\varepsilon_r \phi_r = \phi_r$, $1 \leq r \leq N$, что $\phi - \mathfrak{a}\phi = \sum_{1 \leq r \leq N} \phi_r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $\phi - \mathfrak{a}\phi = (1/q!) \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_q} (\phi - \text{sign } \pi \cdot \pi\phi)$ и воспользуемся предыдущей леммой.

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОГОМОЛОГИЙ

5.1. Подготовительные леммы. Введем ряд обозначений. Для $\phi, \psi \in \Phi^q$, $q \in \mathbb{Z}^+$, будем писать $\phi \sim \psi$, если $\phi - \psi = d\chi$ для некоторого $\chi \in \Phi^{q-1}$. Далее, для мультииндекса $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_q) \in (\overline{1, m})_q$, $q \in \mathbb{Z}^+$, положим $(\otimes \xi)^A = \xi^{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \xi^{\alpha_q} \in \Phi^q$ и $(\circ \iota)_A = \iota_{\alpha_1} \circ \dots \circ \iota_{\alpha_q}$. Напомним, что $A' = (\alpha_q, \dots, \alpha_1)$.

ЛЕММА 5.1. Пусть $\phi = \sum_{|A|=p} (\otimes \xi)^A \otimes \psi_{A'} \in \Phi^q$, $\psi_A \in \Phi^{q-p}$, $p \leq q$. Тогда $\psi_A = (\circ \iota)_A \phi$. Если, кроме того, $\varepsilon \psi = \psi$, где элементарная подстановка ε меняет местами индексы r и $r+1$, $1 \leq r < p$, то $\phi \sim \sum_{|A|=r-1} (\otimes \xi)^A \otimes \chi_{A'}$, где $\chi_A \in \Phi^{q-r+1}$, $T_1 \chi_A = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно воспользоваться предложением 4.1 и примером 4.1.

ЛЕММА 5.2. Пусть $\phi \in \Phi^q$, $d\phi = 0$, $q \in \mathbb{Z}^+$. Тогда

$$\phi \sim \sum_{|A|=q} (\otimes \xi)^A \cdot c_{A'} + \sum_{|B| \leq q-1} (\otimes \xi)^B \otimes \psi_{B'},$$

где $c = (c_A) \in \mathbb{C}(\overline{1, m})_q \simeq \otimes^q \mathbb{V}$, $\psi_B \in \Phi^{q-|B|}$, $T_1 \psi_B = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся методом индукции. По условию $\phi \in \Phi^q$, $d\phi = 0$. С помощью первого равенства из предложения 4.2 получаем

$$\phi = \tau\phi + \rho\phi = d(\iota\phi) + \sum_{1 \leq \alpha \leq m} \xi^\alpha \otimes \phi_\alpha + \psi \sim \sum_{|A|=1} (\otimes \xi)^A \otimes \phi_{A'} + \psi,$$

где $\psi = \rho_1\phi$, так что $T_1\psi = 0$. Предположим теперь, что для некоторого $r < q$ справедливо представление

$$\phi \sim \tilde{\phi} = \sum_{|A|=r} (\otimes \xi)^A \otimes \phi_{A'} + \sum_{|B| \leq r-1} (\otimes \xi)^B \otimes \psi_{B'},$$

где $\phi_A \in \Phi^{q-r}$, $\psi_B \in \Phi^{q-|B|}$, $T_1\psi_B = 0$, и докажем, что такое же представление справедливо и для $r+1$. С помощью предложения 4.1 и примера 4.1 получаем

$$d\tilde{\phi} = 0 = (-1)^r \sum_{|A|=r} (\otimes \xi)^A \otimes d\phi_{A'} + \sum_{|B| \leq r-1} (-1)^{|B|} (\otimes \xi)^B \otimes d\psi_{B'}.$$

Пусть $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in (\overline{1, m})_r$. Действуя на предыдущее равенство оператором $(\circ \iota)_{A'}$, с помощью леммы 5.1 получаем

$$(-1)^r d\phi_{A'} + \sum_{0 \leq p \leq r-1} (-1)^p \iota_{\alpha_r} \dots \iota_{\alpha_{p+1}} d\psi_{\alpha_p \dots \alpha_1} = 0$$

или, в силу второго равенства из предложения 4.4,

$$(-1)^r (d\phi_{A'} + \partial_{\xi^{\alpha_r}} \psi_{\alpha_{r-1} \dots \alpha_1}) + \sum_{0 \leq p \leq r-2} (-1)^{p+1} \iota_{\alpha_r} \dots \iota_{\alpha_{p+3}} \iota_{\alpha_{p+2}} \alpha_{p+1} \psi_{\alpha_p \dots \alpha_1} = 0,$$

где $\iota_{\alpha\beta} = \iota_{\alpha} \circ \partial_{\xi\beta} = \iota \circ \partial_{\xi\alpha} \circ \partial_{\xi\beta} = \iota_{\beta\alpha}$ и было учтено, что $\rho_1 \psi_B = \psi_B$, поскольку $T_1 \psi_B = 0$. Действуя на это равенство оператором ι , с помощью первого равенства из предложения 4.2 получаем

$$\tau \phi_{A'} = \sum_{0 \leq p \leq r-2} (-1)^{r-p} \iota \iota_{\alpha_r} \dots \iota_{\alpha_{p+3}} \iota_{\alpha_{p+2}} \alpha_{p+1} \psi_{\alpha_p \dots \alpha_1},$$

где учтено, что $\iota_{\alpha} \psi_B = 0$. Таким образом,

$$\phi_{A'} = \tau \phi_{A'} + \sum_{1 \leq \alpha \leq m} \xi^{\alpha} \otimes \phi_{\alpha A'} + \rho_1 \phi_{A'} = \sum_{1 \leq \alpha \leq m} \xi^{\alpha} \otimes \phi_{\alpha A'} + \tilde{\psi}_{A'} + \sum_{0 \leq p \leq r-2} \omega_{A'}^{(p)},$$

где $\tilde{\psi}_{A'} = \rho_1 \phi_{A'}$, $T_1 \tilde{\psi}_{A'} = 0$, $\omega_{A'}^{(p)} = (-1)^{r-p} \iota \iota_{\alpha_r} \dots \iota_{\alpha_{p+3}} \iota_{\alpha_{p+2}} \alpha_{p+1} \psi_{\alpha_p \dots \alpha_1}$, причем $\varepsilon_p \omega^{(p)} = \omega^{(p)}$, элементарная подстановка ε_p меняет местами индексы $p+1$ и $p+2$. Подставив последнее выражение в исходное представление, получим

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} &= \sum_{|A|=r} \sum_{1 \leq \alpha \leq m} (\otimes \xi)^A \otimes \xi^{\alpha} \otimes \phi_{\alpha A'} + \sum_{|A|=r} (\otimes \xi)^A \otimes \tilde{\psi}_{A'} + \\ &+ \sum_{0 \leq p \leq r-2} \sum_{|A|=r} (\otimes \xi)^A \otimes \omega_{A'}^{(p)} + \sum_{|B| \leq r-1} (\otimes \xi)^B \otimes \psi_{B'} \sim \\ &\sim \sum_{|A|=r+1} (\otimes \xi)^A \otimes \tilde{\phi}_{A'} + \sum_{|B| \leq r} (\otimes \xi)^B \otimes \tilde{\psi}_{B'}, \end{aligned}$$

где $\tilde{\phi}_{\alpha_{r+1} \dots \alpha_1} = \phi_{\alpha_{r+1} A'}$, $A' = (\alpha_r \dots \alpha_1)$, $\tilde{\psi}_B = \psi_B$ при $|B| = r-1$, $\tilde{\psi}_B = \psi_B + \chi_B^{(|B|)}$ при $0 \leq |B| \leq r-2$ (см. лемму 5.1). Итак, требуемое представление для $r+1$ доказано. Полагая теперь $r = q$ и учитывая, что $\Phi^0 = \mathbb{C}$, завершаем доказательство леммы.

ЛЕММА 5.3. Для всякого $c = (c_A) \in \otimes^q \mathbb{V}$ справедливо утверждение

$$\phi = \sum_{|A|=q} (\otimes \xi)^A \cdot c_{A'} \sim \mathfrak{a} \phi = \sum_{|A|=q} (\wedge \xi)^A \cdot v_{A'},$$

где значок $\wedge$ означает внешнее (кососимметризованное) произведение, $v = (v_A) = \mathfrak{a} c \in \wedge^q \mathbb{V} - q$ -вектор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует воспользоваться леммой 4.2 и модифицировать доказательство леммы 5.1.

ЛЕММА 5.4. Для любых $\psi_B \in \Phi^{q-|B|}$, $T_1 \psi_B = 0$, $|B| \leq q-1$, справедливо утверждение

$$\phi = \sum_{|B| \leq q-1} (\otimes \xi)^B \otimes \psi_{B'} \sim \tilde{\phi} = \sum_{|B| \leq q-1} (\wedge \xi)^B \otimes \tilde{\psi}_{B'},$$

где $\tilde{\psi}_B \in \Phi^{q-|B|}$, $T_1 \tilde{\psi}_B = 0$, $(\mathfrak{a} \tilde{\psi})_B = \tilde{\psi}_B$, $|B| \leq q-1$, $\tilde{\psi}_B = (\mathfrak{a} \psi)_B$ при $|B| = q-1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $|B| = q - 1$. Лемма 4.2 дает

$$\sum_{|B|=q-1} (\otimes \xi)^B \otimes \psi_{B'} = \sum_{|B|=q-1} (\otimes \xi)^B \otimes \left((\mathfrak{a}\psi)_{B'} + \sum_{1 \leq r \leq N} \psi_{rB'} \right),$$

где $\psi_{rB} \in \Phi^{q-|B|}$, $T_1 \psi_{rB} = 0$, $(\varepsilon_r \psi_r)_B = \psi_{rB}$ для некоторых элементарных подстановок ε_r , $1 \leq r \leq N$. Согласно лемме 5.1

$$\sum_{|B|=q-1} (\otimes \xi)^B \otimes \psi_{rB'} \sim \sum_{|B|=s-1} (\otimes \xi)^B \otimes \chi_{rB'},$$

где $s = s(r) < q - 1$, $\chi_{rB} \in \Phi^{q-|B|}$, $T_1 \chi_{rB} = 0$, откуда

$$\phi \sim \sum_{|B|=q-1} (\wedge \xi)^B \otimes \tilde{\psi}_{B'} + \sum_{|B| \leq q-2} (\otimes \xi)^B \otimes \psi'_{B'},$$

где $\tilde{\psi} = \mathfrak{a}\psi$, $\psi'_{B} \in \Phi^{q-|B|}$, $T_1 \psi'_{B} = 0$. Повторяя эти рассуждения для $|B| = q - 2, q - 3, \dots$, завершаем доказательство леммы.

Нам понадобится лемма Пуанкаре, которую мы сформулируем в удобной для нас форме.

ЛЕММА 5.5. Пусть $\phi \in (\Phi^p)^{(\overline{1,m})_q}$, $T_r \phi = 0$, $p, q, r \in \mathbb{Z}^+$. Если $\mathfrak{a}\phi = \phi$, $\mathfrak{a}(\partial_\xi \phi) = 0$, то $\phi = 0$ при $q = 0$, а при $q > 0$ найдется $\omega \in (\Phi^p)^{(\overline{1,m})_{q-1}}$, $T_{r+1} \omega = 0$, $\mathfrak{a}\omega = \omega$, такое, что $\phi = \mathfrak{a}(\partial_\xi \omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует обратить внимание на то, что частные производные $\partial_\xi \alpha$, $\alpha \in \overline{1, m}$, берутся только по первому аргументу $\xi_1 \in \mathbb{C}^m$ функции $\phi_A(\xi_1, \dots, \xi_p)$, $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_q)$, и воспользоваться стандартным выражением для гомотопической формулы Пуанкаре.

ЛЕММА 5.6. Пусть

$$\phi = \sum_{|B| \leq q-1} (\wedge \xi)^B \otimes \psi_{B'},$$

где $\psi_B \in \Phi^{q-|B|}$, $T_1 \psi_B = 0$, причем $d\phi = 0$. Тогда $\phi \sim 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для удобства положим $\psi_B^{(p)} = \psi_B$ для всех $|B| = p$, $0 \leq p \leq q - 1$. Тогда условие $d\phi = 0$ запишется в виде

$$d\phi = \sum_{0 \leq p \leq q-1} (-1)^p \sum_{|B|=p} (\wedge \xi)^B \otimes d\psi_{B'}^{(p)} = 0.$$

Действуя на это равенство оператором $(\circ \iota)_{A'}$, $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_q)$, получаем

$$(-1)^q \partial_\xi^{\alpha_q} \psi_{\alpha_{q-1} \dots \alpha_1}^{(q-1)} + \sum_{0 \leq p \leq q-2} (-1)^{p+1} \iota_{\alpha_q} \dots \iota_{\alpha_{p+3}} \iota_{\alpha_{p+2}} \alpha_{p+1} \psi_{\alpha_p \dots \alpha_1}^{(p)} = 0,$$

где учтено, что в силу второго равенства из предложения 4.4 $\iota_\alpha d\psi = -\partial_{\xi^\alpha} \psi$, если $T_1 \psi = 0$, и что $\iota_\alpha \circ \partial_{\xi^\beta} = \iota_{\alpha\beta}$. Кососимметризуя это равенство, получим $\mathfrak{a}(\partial_\xi \psi^{(q-1)}) = 0$, поскольку $\iota_{\alpha\beta} = \iota_{\beta\alpha}$. Отсюда в силу леммы 5.5 имеем $\psi_B^{(q-1)} = \mathfrak{a}(\partial_\xi \omega^{(1)})_B$, где $\omega^{(1)} \in (\Phi^1)^{(\overline{1,m})_{q-1}}$, $T_2 \omega_B^{(1)} = 0$. Подставляя это представление в выражение для $d\phi = 0$ и действуя оператором $(\circ \iota)_{A'}$, где теперь $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_{q-1})$, получим

$$(-1)^{q-1} d\mathfrak{a}(\partial_\xi \omega^{(1)})_{A'} + (-1)^{q-2+1} \partial_{\xi^{\alpha_{q-1}}} \psi_{\alpha_{q-2} \dots \alpha_1}^{(q-2)} + \dots,$$

где опущенные члены содержат операторы вида $\iota_{\alpha\beta}$. Кососимметризуя, получим

$$d\mathfrak{a}(\partial_\xi \omega^{(1)})_{A'} + \mathfrak{a}(\partial_\xi \psi^{(q-2)})_{A'} = 0,$$

и первое равенство из предложения 4.4 дает

$$\mathfrak{a} \left[\partial_\xi \left(d\omega^{(1)} + \sum_{1 \leq \beta \leq m} \xi^\beta \otimes \partial_{\xi^\beta} \omega^{(1)} + \psi^{(q-2)} \right) \right]_{A'} = 0,$$

откуда в силу леммы 5.5

$$\psi_B^{(q-2)} = -d\omega_B^{(1)} - \sum_{1 \leq \beta \leq m} \xi^\beta \otimes \partial_{\xi^\beta} \omega_B^{(1)} + \mathfrak{a}(\partial_\xi \omega^{(2)})_B,$$

где $\omega^{(2)} \in (\Phi^2)^{(\overline{1,m})_{q-2}}$, $T_2 \omega_B^{(2)} = 0$, $|B| = q - 2$.

Исходное выражение для ϕ теперь принимает вид

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_{|B|=q-1} (\wedge \xi)^B \otimes \mathfrak{a}(\partial_\xi \omega^{(1)})_{B'} + \\ &+ \sum_{|B|=q-2} (\wedge \xi)^B \otimes \left(-d\omega_{B'}^{(1)} - \sum_{1 \leq \beta \leq m} \xi^\beta \otimes \partial_{\xi^\beta} \omega_{B'}^{(1)} + \mathfrak{a}(\partial_\xi \omega^{(2)})_{B'} \right) + \\ &+ \sum_{|B| \leq q-3} (\wedge \xi)^B \otimes \psi_{B'}^{(|B|)} \sim \\ &\sim \sum_{|B|=q-2} (\wedge \xi)^B \otimes \mathfrak{a}(\partial_\xi \omega^{(2)})_{B'} + \sum_{|B| \leq q-3} (\wedge \xi)^B \otimes \tilde{\psi}_{B'}^{(|B|)} \end{aligned}$$

с учетом леммы 5.4. Повторяя эти рассуждения для $|B| = q - 2, q - 3, \dots$, завершаем доказательство леммы.

5.2. Когомологии вспомогательного комплекса. Теперь мы в состоянии вычислить пространство когомологий $H(\Phi)$ вспомогательного комплекса $\{\Phi; d\}$.

ТЕОРЕМА 1. *Справедливы равенства*

$$H^q(\Phi) = \wedge^q \mathbb{V}, \quad q \in \mathbb{Z}^+,$$

где $\wedge^q \mathbb{V}$ есть q -я внешняя степень комплексного векторного пространства $\mathbb{V}$ (в частности, $\wedge^0 \mathbb{V} = \mathbb{C}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно последовательно воспользоваться леммами 5.2–5.4, 5.6 и убедиться, что для любого $v \in \wedge^q \mathbb{V}$ функция $\phi = \sum_{|A|=q} (\wedge \xi)^A \cdot v_A$ удовлетворяет равенству $d\phi = 0$, причем $\phi = d\psi$, $\psi \in \Phi^{q-1}$ лишь в случае $v = 0$, $\psi = 0$.

5.3. Когомологии алгебры гладких функций. Объединяя доказанную теорему с предложением 3.1, убеждаемся в справедливости основного результата данной работы.

ТЕОРЕМА 2. *Имеет место изоморфизм*

$$H(\mathcal{E}(V); \mathcal{E}(V)) \simeq \mathcal{E}(V) \otimes (\wedge \mathbb{V}),$$

где $\wedge \mathbb{V}$ – внешняя алгебра комплексного векторного пространства $\mathbb{V}$.

Заметим, что значок $\wedge$ замыкания тензорного произведения здесь не нужен, поскольку линейное пространство $\wedge \mathbb{V}$ конечномерно, как и исходное вещественное пространство V .

6. ОБСУЖДЕНИЕ

Большинство работ в данной области посвящено более общей ситуации, когда исходная алгебра $\mathcal{E}(M)$ – алгебра всех гладких функций на гладком вещественном многообразии M . При этом рассматриваются различные классы коцепей на $\mathcal{E}(M)$, из которых основные два: непрерывные и дифференциальные. Подробнее, линейное пространство $\mathcal{E}(M) = C^\infty(M; \mathbb{C})$ (или $C^\infty(M; \mathbb{R})$) наделяется естественной топологией равномерной сходимости на компактах вместе с производными всех порядков. Пространства *непрерывных* коцепей $C^q(\mathcal{E}(M); \mathcal{E}(M))$ суть линейные пространства всех непрерывных q -линейных отображений из $\mathcal{E}(M)^q$ в $\mathcal{E}(M)$, наделенные сильной топологией, а пространства *дифференциальных* коцепей $C_{\text{diff}}^q(\mathcal{E}(M); \mathcal{E}(M))$ состоят из всех непрерывных коцепей, задаваемых дифференциальными операторами конечного порядка по каждому аргументу. Полное описание непрерывных и дифференциальных когомологий, судя по всему, пока отсутствует, имеются лишь частные результаты, в основном для $q \leq 3$ (см., например, [10]), поскольку когомологии именно этих порядков используются в теории деформаций. В любом случае прямое аналитическое доказательство одного из основных ингредиентов теории деформаций представляется весьма полезным.

В изученном нами случае $M = V$ – векторное пространство, переход к дифференциальным когомологиям сводится к замене вспомогательного комплекса $\{\Phi; d\}$ на комплекс $\{\Phi_{\text{pol}}; d\}$, где пространства $\Phi_{\text{pol}}^q = \mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_q] \subset \Phi^q$ суть пространства многочленов векторных переменных $\xi_1, \dots, \xi_q \in \mathbb{C}^m$, $q \in \mathbb{Z}^+$, а дифференциал $d: \Phi_{\text{pol}} \rightarrow \Phi_{\text{pol}}$ есть сужение исходного дифференциала d с Φ на Φ_{pol} . Легко проверяется, что все введенные выше операции и вспомогательные результаты допускают сужение на Φ_{pol} , так что справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Имеют место равенства*

$$H^q(\Phi_{\text{pol}}) = \wedge^q \mathbb{V} = H^q(\Phi), \quad q \in \mathbb{Z}^+.$$

В свою очередь, отсюда вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. *Имеет место изоморфизм*

$$H_{\text{diff}}(\mathcal{E}(V); \mathcal{E}(V)) \simeq \mathcal{E}(V) \otimes (\wedge \mathbb{V}) \simeq H(\mathcal{E}(V); \mathcal{E}(V)),$$

где $H_{\text{diff}}(\mathcal{E}(V); \mathcal{E}(V))$ – пространство дифференциальных когомологий.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 04-01-00769 и НШ-1542.2003.1

Список литературы

- [1] *G. Hochschild.* Ann. Math. 1948. V. 46. № 1. P. 58–67.
- [2] *C. Chevalley, E. Eilenberg.* Trans. Am. Math. Soc. 1948. V. 63. P. 85–124.
- [3] *M. Gerstenhaber.* Ann. Math. 1964. V. 79. № 1. P. 59–103; 1966. V. 84. № 1. P. 1–19; 1968. V. 88. № 1. P. 1–34.
- [4] *M. Gerstenhaber.* Ann. Math. 1974. V. 99. P. 257–276.
- [5] *F. Baen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer.* Ann. Phys. 1978. V. 111. P. 61–110; P. 111–151.
- [6] *G. Dito, D. Sternheimer.* Deformation quantization: genesis, developments and metamorphoses. In: Deformation Quantization. IRMA Lect. in Math. and Theor. Phys. V. 1. Ed. G. Halbout. Berlin: de Gruyter, 2002. P. 9–54; math.QA/0201168.
- [7] *J. L. Taylor.* Adv. Math. 1972. V. 9. P. 137–182.
- [8] *В. В. Жаринов.* ТМФ. 2001. Т. 128. № 2. С. 147–160; 2003. Т. 136. № 2. С. 179–196.
- [9] *Л. Хермандер.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986.
- [10] *J. Vey.* Comment. Math. Helv. 1975. V. 50. P. 421–454; *S. Gutt.* Lett. Math. Phys. 1997. V. 39. P. 157–162.

Поступила в редакцию 8.I.2004 г.