Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Савков, А. А. Юшканов, Аналитическое решение БГК-модели нестационарного уравнения Больцмана, *ТМФ*, 1997, том 113, номер 1, 139–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1071>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 12:06:47

С. А. Савков*, А. А. Юшканов†

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ БГК-МОДЕЛИ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

Методом Кейза получено решение нестационарного векторного уравнения Больцмана с БГК-моделью интеграла столкновений. В качестве приложения рассмотрена задача о точечном источнике тепла и частиц.

Разработанный Кейзом метод решения модельного уравнения Больцмана [1] нашел широкое применение в кинетической теории газов. В последнее время появился ряд работ [2–10], посвященных точному решению граничных задач. В этих работах в основном рассматривались полупространственные задачи, т.е. исследовалось состояние газа над плоской поверхностью, причем нестационарные задачи решались лишь для скалярного кинетического уравнения [1, 3, 7].

В данной работе впервые решается нестационарная векторная задача. Полученное решение может найти применение при изучении распространения звуковых волн, исследовании полей температуры и концентрации, создаваемых источниками тепла или частиц различного профиля, в частности лучом лазера в поглощающей среде и т.п.

Рассмотрим модель Бхатнагара–Гросса–Крука (БГК) нестационарного линеаризованного кинетического уравнения [2]:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + C_x \frac{\partial W}{\partial x} = \nu \left(\frac{\delta n}{n_0} + \left(C^2 - \frac{3}{2} \right) \frac{\delta T}{T_0} + 2\mathbf{C}\mathbf{G} - W \right).$$

Здесь

$$\begin{aligned} \frac{\delta n}{n_0} &= \pi^{-3/2} \int W \exp(-C^2) d\mathbf{C}, \\ \frac{\delta T}{T_0} &= \pi^{-3/2} \int W \left(\frac{2}{3} C^2 - 1 \right) \exp(-C^2) d\mathbf{C}, \\ \mathbf{G} &= \pi^{-3/2} \int W \mathbf{C} \exp(-C^2) d\mathbf{C}, \end{aligned}$$

W – поправка к равновесной (максвелловской) функции распределения; $\mathbf{C} = (m/2kT)^{1/2} \mathbf{V}$; $\mathbf{V}$ – собственная скорость молекул газа; ν – частота столкновений. В дальнейшем положим $\nu = 1$, т.е. будем считать, что расстояние и время измеряются в единицах длины и времени свободного пробега молекул.

*Орловский государственный университет, Орел, Россия

†Московский педагогический университет, Москва, Россия

Обозначим $C_x = \mu$ и представим W в виде

$$W = W_1(t, x, \mu) + W_2(t, x, \mu)(C_y^2 + C_z^2 - 1).$$

Вектор-столбец

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix}$$

удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial x} + 1 \right) \mathbf{W} = \pi^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\mu, \mu') \mathbf{W}(t, x, \mu') \exp(-\mu'^2) d\mu', \quad (1)$$

где

$$K(\mu, \mu') = \begin{pmatrix} 1 + 2\mu\mu' + \frac{2}{3} \left(\mu^2 - \frac{1}{2} \right) \left(\mu'^2 - \frac{1}{2} \right), & \frac{2}{3} \left(\mu^2 - \frac{1}{2} \right) \\ \frac{2}{3} \left(\mu'^2 - \frac{1}{2} \right), & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

После преобразования Лапласа

$$\mathbf{Y}(s, x, \mu) = \int_0^\infty \mathbf{W}(t, x, \mu) e^{-st} dt \quad (2)$$

уравнение (1) принимает вид

$$\left(s + 1 + \mu \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{Y}(s, x, \mu) = \pi^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\mu, \mu') \mathbf{Y}(s, x, \mu') \exp(-\mu'^2) d\mu'.$$

Анзац Кейза

$$\mathbf{Y}(s, x, \mu) = \exp(-(s+1)x/\eta) \mathbf{F}(s, \eta, \mu)$$

приводит к следующей системе характеристических уравнений для компонент вектора $\mathbf{F}$:

$$\begin{aligned} (s+1)(\eta - \mu)F_1 &= \pi^{-1/2} \eta \left(M_1^{(0)} + 2\mu M_1^{(1)} + \frac{2}{3} \left(\mu^2 - \frac{1}{2} \right) \left(M_1^{(2)} - \frac{1}{2} M_1^{(0)} + M_2^{(0)} \right) \right), \\ (s+1)(\eta - \mu)F_2 &= \pi^{-1/2} \eta \frac{2}{3} \left(M_1^{(2)} - \frac{1}{2} M_1^{(0)} + M_2^{(0)} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

$$M_i^{(\alpha)}(s, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\mu^2) F_i(s, \eta, \mu) \mu^\alpha d\mu \quad (i = 1, 2; \quad \alpha = 0, 1, 2).$$

Следуя [8], выразим входящие в (3) высшие моменты функции F_1 через $M_1^{(0)}$. Для этого умножим указанные уравнения на $\exp(-\mu^2)$ и $\mu \exp(-\mu^2)$ и проинтегрируем по всей области изменения μ . Решая полученную систему уравнений, найдем

$$M_i^{(\alpha)} = M_i^{(0)} \left(\frac{\eta s}{s+1} \right)^\alpha.$$

Таким образом, система уравнений (3) может быть записана в векторном виде:

$$(s+1)(\eta-\mu)\mathbf{F}(s, \eta, \mu) = \pi^{-1/2}\eta\Delta(s, \eta, \mu)\mathbf{M}(s, \eta), \quad (4)$$

где

$$\Delta = \left\| \begin{array}{cc} 1 + 2\mu\frac{\eta s}{s+1} + \frac{2}{3}\left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right)\left(\left(\frac{\eta s}{s+1}\right)^2 - \frac{1}{2}\right), & \frac{2}{3}\left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right) \\ \frac{2}{3}\left(\left(\frac{\eta s}{s+1}\right)^2 - \frac{1}{2}\right), & \frac{2}{3} \end{array} \right\|, \quad (5)$$

$$\mathbf{M}(s, \eta) = \left\| \begin{array}{c} M_1^{(0)} \\ M_2^{(0)} \end{array} \right\| = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\mu^2)\mathbf{F}(s, \eta, \mu) d\mu. \quad (6)$$

Равенство (6) можно рассматривать как условие нормировки для функции $\mathbf{F}$.

В случае, когда η не является действительным числом, из уравнения (4) находим

$$\mathbf{F}(s, \eta, \mu) = \frac{\pi^{-1/2}\eta}{(s+1)(\eta-\mu)}\Delta(s, \eta, \mu)\mathbf{M}(s, \eta). \quad (7)$$

Подставляя функцию (7) в условие (6), получим уравнение для определения параметра η :

$$\mathbf{M}(s, \eta) = \mathbf{M}(s, \eta)\pi^{-1/2}\frac{\eta}{s+1}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\mu^2)\frac{\Delta(s, \eta, \mu)}{\eta-\mu} d\mu$$

или

$$\text{Det } \Lambda(s, \eta) = 0, \quad (8)$$

где

$$\Lambda = \left\| \begin{array}{cc} s + \lambda_0 + 2\lambda_0\frac{\eta^2 s}{s+1} + \frac{2}{3}\lambda_1\left(\left(\frac{\eta s}{s+1}\right)^2 - \frac{1}{2}\right), & \frac{2}{3}\lambda_1 \\ \frac{2}{3}\left(\left(\frac{\eta s}{s+1}\right)^2 - \frac{1}{2}\right)(\lambda_0 - 1), & s + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\lambda_1 \end{array} \right\|, \quad (9)$$

$$\lambda_0 = 1 - \pi^{-1/2}\eta\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\mu^2)\frac{d\mu}{\eta-\mu}, \quad \lambda_1 = \left(\eta^2 - \frac{1}{2}\right)\lambda_0 + \frac{1}{2}. \quad (10)$$

При этом сам нормировочный вектор $\mathbf{M}$ может быть определен с точностью до произвольной константы:

$$\mathbf{M}(s, \eta) = \text{const} \left\| \begin{array}{c} \Lambda_{22}(s, \eta) \\ -\Lambda_{21}(s, \eta) \end{array} \right\|.$$

Решения дискретного спектра (7) принимают следующий вид:

$$\mathbf{F}(s, \eta, \mu) = \frac{\pi^{-1/2}\eta}{(s+1)(\eta-\mu)} \left\| \begin{array}{c} \Lambda_{22}\Delta_{11} - \Lambda_{21}\Delta_{12} \\ \Lambda_{22}\Delta_{11} - \Lambda_{21}\Delta_{12} \end{array} \right\|, \quad (11)$$

где Λ_{ij} и Δ_{ij} — компоненты матриц (5) и (9).

В случае действительных значений η решениями уравнений (4) и (6) являются функции

$$\Phi(s, \eta, \mu) = \left(\frac{\pi^{-1/2} \eta \Delta(s, \eta, \mu)}{(s+1)(\eta-\mu)} + \exp(\eta^2) \Lambda(s, \eta) \delta(\eta-\mu) \right) \mathbf{M}, \quad (12)$$

представляющие собой решения непрерывного спектра. Все интегралы от функции (12) должны вычисляться в смысле главного значения интеграла Коши.

В силу произвольности нормировочного вектора $\mathbf{M}$ решение (12) можно представить как суперпозицию двух независимых функций

$$\begin{aligned} \Phi_1(s, \eta, \mu) &= \pi^{-1/2} \frac{\eta}{\eta-\mu} \exp(-\eta^2) \left\| \begin{matrix} \mu^2 - \frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix} \right\| + \delta(\eta-\mu) \left\| \begin{matrix} \lambda(\eta) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}s + \frac{1}{2} + \lambda(\eta) \end{matrix} \right\|, \\ \Phi_2(s, \eta, \mu) &= \pi^{-1/2} \frac{\eta}{\eta-\mu} \exp(-\eta^2) \left\| \begin{matrix} 1 + 2 \frac{\mu \eta s}{s+1} \\ 0 \end{matrix} \right\| + \\ &+ \delta(\eta-\mu) \left\| \begin{matrix} s + \lambda(\eta) + 2\lambda(\eta) \frac{\eta^2 s}{s+1} \\ \frac{s+1}{2} - \frac{\eta^2 s^2}{s+1} \end{matrix} \right\|, \end{aligned} \quad (13)$$

здесь

$$\lambda(\eta) = 1 - 2\eta \exp(-\eta^2) \int_0^\eta \exp(\mu^2) d\mu. \quad (14)$$

Перейдем к решению дисперсионного уравнения (8). Предварительно отметим, что функция $D(z) = \text{Det } \Lambda(s, z)$ представляет собой четную кусочно-аналитическую функцию в комплексной плоскости с разрезом вдоль действительной оси. Обозначим сужения этой функции на верхнюю и нижнюю полуплоскости через D^+ и D^- , соответственно, и рассмотрим однородную краевую задачу Римана (см., например, [11]):

$$X^+(x) = G(x) X^-(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (15)$$

с коэффициентом $G(x) = D^+(x)/D^-(x)$, где

$$D^\pm(x) = \lim_{y \rightarrow 0} D^\pm(z), \quad z = x + iy.$$

Число корней уравнения (8) равно индексу коэффициента G и определяется приращением его аргумента вдоль линии разреза. В силу четности корней достаточно определить это приращение только на положительной полуоси $\mathbb{R}$. Обозначим

$$\varkappa = \frac{1}{2} \text{ind } G(x) = \frac{1}{2\pi} [\arg G(x)]_{\mathbb{R}_+}, \quad \mathbb{R}_+ = (0, \infty).$$

Решение задачи (15) имеет вид

$$\begin{aligned} X^+(z) &= \exp(\Gamma(z)), \quad X^-(z) = \left(\frac{z+i}{z-i} \right)^{2\varkappa} \exp(\Gamma(z)), \\ \Gamma(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \left(\left(\frac{z+i}{z-i} \right)^{2\varkappa} \arg G(z) \right) \frac{d\mu}{\mu-z}. \end{aligned}$$

Согласно обобщенной теореме Лиувилля общее решение задачи (15) может быть записано как

$$D^{\pm}(z) = P_{\varkappa}(z^2)X^{\pm}(z)/(z \pm i)^{2\varkappa},$$

где $P_{\varkappa}(x)$ — полином степени $\varkappa$ от x . Для определения явного вида этого полинома достаточно вычислить $D^{\pm}$ и $X^{\pm}$ при произвольных $\varkappa + 1$ значениях z и решить полученную систему относительно его коэффициентов. Корни этого полинома и будут искомыми решениями дисперсионного уравнения (8). При этом следует учитывать только комплексные корни. Обозначим полученные значения η через η_{α} .

Можно доказать (см., например, [1, 4]), что найденная система решений дискретного (11) и непрерывного (13) спектров представляет собой полную систему ортогональных функций, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}(s, \eta_{\alpha}, \mu) \mathbf{F}(s, \eta_{\beta}, \mu) \exp(-\mu^2) \mu d\mu &= \delta_{\alpha\beta} N_{\alpha}(s), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}(s, \eta_{\alpha}, \mu) \Phi_{\beta}(s, \eta, \mu) \exp(-\mu^2) \mu d\mu &= 0, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{X}_{\alpha}(s, \eta', \mu) \Phi_{\beta}(s, \eta, \mu) \exp(-\mu^2) \mu d\mu &= \delta_{\alpha\beta} \delta(\eta' - \eta) N_0(s, \eta). \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1(s, \eta, \mu) &= (N_{11} \Phi_1 - N_{12} \Phi_2), \quad \mathbf{X}_2(s, \eta, \mu) = (N_{22} \Phi_2 - N_{12} \Phi_1), \\ N_{11}(s, \eta) &= \left(\frac{3}{2}s + \lambda(\eta) + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \lambda(\eta) \right)^2 + \\ &\quad + \pi \eta^2 \left(\left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right)^2 + 1 \right) \exp(-2\eta^2), \\ N_{12}(s, \eta) &= \left(s + \lambda(\eta) + 2\lambda(\eta) \frac{\eta^2 s}{s+1} \right) \left(\frac{1}{2} + \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \lambda(\eta) \right) + \\ &\quad + \left(\frac{3}{2}s + \lambda(\eta) + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{s+1}{2} - \frac{\eta^2 s^2}{s+1} \right) + \\ &\quad + \pi \eta^2 \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \left(1 + 2 \frac{\eta^2 s}{s+1} \right) \exp(-2\eta^2), \\ N_{22}(s, \eta) &= \left(s + \lambda(\eta) + 2\lambda(\eta) \frac{\eta^2 s}{s+1} \right)^2 + \left(\frac{s+1}{2} - \frac{\eta^2 s^2}{s+1} \right) + \\ &\quad + \pi \eta^2 \left(1 + 2 \frac{\eta^2 s}{s+1} \right)^2 \exp(-2\eta^2), \\ N_0(s, \eta) &= \eta \exp(-2\eta^2) (N_{11}(s, \eta) N_{22}(s, \eta) - N_{12}^2(s, \eta)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_\alpha(s) = & \pi^{-1/2} \eta_\alpha \left(\left(\lambda_0(\eta_\alpha)(1 - 2\eta_\alpha^2) - 1 + 4 \frac{\eta_\alpha^2 s}{s+1} \left(2\lambda_0(\eta_\alpha)(1 - 2\eta_\alpha^2) - 1 + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{\eta_\alpha^2 s}{s+1} (\lambda_0(\eta_\alpha)(3 - 2\eta_\alpha^2) - 1) \right) \right) \left(1 + \frac{4}{9} \frac{\lambda_0(\eta_\alpha) - 1}{s+1} \left(3 + \frac{\lambda_0(\eta_\alpha) - 1}{s+1} \right) \right) + \right. \\
& + \frac{1}{9} \left(\left(\frac{\eta_\alpha s}{s+1} \right)^2 - \frac{1}{2} \right)^2 (\lambda_0(\eta_\alpha)(28\eta_\alpha^4 - 8\eta_\alpha^6 - 22\eta_\alpha^2 + 5) - 4\eta_\alpha^4 + 8\eta_\alpha^2 - 5) + \\
& + \frac{2}{3} \left(\left(\frac{\eta_\alpha s}{s+1} \right)^2 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \frac{\lambda_0(\eta_\alpha) - 1}{s+1} \right) (\lambda_0(\eta_\alpha)(8\eta_\alpha^2 - 4\eta_\alpha^4 - 1) - 2\eta_\alpha^2 + 1) + \\
& + \frac{8}{3} \left(\left(\left(\frac{\eta_\alpha s}{s+1} \right) - \frac{1}{2} \right) \frac{\eta_\alpha^2 s}{s+1} + \frac{2}{3} \frac{\lambda_0(\eta_\alpha) - 1}{s+1} \right) \times \\
& \times (\lambda_0(\eta_\alpha)(5\eta_\alpha^2 - 2\eta_\alpha^4 - 1) - \eta_\alpha^2 + 1) \Big).
\end{aligned}$$

Функции λ_0 и λ определены формулами (10) и (14).

В качестве примера применения полученного решения рассмотрим бесконечный плоский источник тепла или частиц, расположенный в плоскости $x = 0$. Положим, что зависимость его мощности от времени определяется выражением

$$P(t) = \exp(st).$$

Функцию распределения в этом случае можно искать в виде

$$\mathbf{W}_s(t, x, \mu) = \mathbf{Y}^\pm(s, x, \mu) \exp(st) \quad \text{при} \quad \pm x > 0,$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}^\pm(s, x, \mu) = & \pm \sum_{\alpha} A_{\alpha}^{\pm}(s) \mathbf{F}(s, \pm \eta_{\alpha}, \mu) \exp(\mp(s+1)x/\eta_{\alpha}) + \\
& + \sum_{\beta=1}^2 \int_0^{\pm\infty} B_{\beta}(s, \eta) \Phi_{\beta}(s, \eta, \mu) \exp(-(s+1)x/\eta) d\eta. \quad (17)
\end{aligned}$$

Суммирование в первом слагаемом следует вести только по тем корням дискретного спектра, для которых $\operatorname{Re}(s+1)/\eta_{\alpha} > 0$.

Коэффициенты A и B определяются из условия скачка:

$$\mu(\mathbf{Y}^+ - \mathbf{Y}^-) = \mathbf{S} \quad \text{при} \quad x = 0. \quad (18)$$

Для источника тепла

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а для источника частиц

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_N = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \mu^2 - 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Подставляя (17) в (18), получим

$$\sum_{\alpha} (A_{\alpha}^+(s) \mathbf{F}(s, \eta_{\alpha}, \mu) + A_{\alpha}^-(s) \mathbf{F}(s, -\eta_{\alpha}, \mu)) + \sum_{\beta=1}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\beta}(s, \eta) \Phi_{\beta}(s, \eta, \mu) d\eta = \frac{\mathbf{S}}{\mu}. \quad (19)$$

Умножая (19) на $\mathbf{F}(s, \pm\eta_\alpha, \mu) \exp(-\mu^2)$ и $\mathbf{X}_\beta(s, \eta, \mu) \exp(-\mu^2)$ и интегрируя по всей области изменения μ , в силу условий ортогональности (16) находим

$$\begin{aligned} A_\alpha^\pm(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}(s, \pm\eta_\alpha, \mu) \mathbf{S} \exp(-\mu^2) d\mu, \\ B_\beta(s, \eta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{X}_\beta(s, \eta, \mu) \mathbf{S} \exp(-\mu^2) d\mu. \end{aligned}$$

Таким образом, в случае источника тепла

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_T^\pm(s, x, \mu) &= \pm \sum_\alpha \pi^{-1/2} \mathbf{F}(s, \pm\eta_\alpha, \mu) \frac{K_T(s, \eta_\alpha)}{N_\alpha(s)} \exp(-(s+1)x/\eta_\alpha) + \\ &+ (s+1) \int_0^{\pm\infty} \frac{\mathbf{X}_1(s, \eta)}{N_0(s, \eta)} \exp(-\eta^2 - (s+1)x/\eta) d\eta. \end{aligned}$$

Для источника частиц

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_N^\pm(s, x, \mu) &= \pm \sum_\alpha \pi^{-1/2} \mathbf{F}(s, \pm\eta_\alpha, \mu) \frac{K_N(s, \eta_\alpha)}{N_\alpha(s)} \exp(-(s+1)x/\eta_\alpha) + \\ &+ (s+1) \int_0^{\pm\infty} \frac{\mathbf{X}_2(s, \eta)}{N_0(s, \eta)} \exp(-\eta^2 - (s+1)x/\eta) d\eta. \end{aligned}$$

Мы использовали следующие обозначения:

$$K_T(s, \eta_\alpha) = \frac{2}{3} \frac{\eta_\alpha^2 s^2}{s+1} - \frac{s+1}{3}, \quad K_N(s, \eta_\alpha) = s + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \lambda_0(\eta_\alpha).$$

Для относительных перепадов температуры $\Delta T = (T - T_0)/T_0$ и концентрации $\Delta N = (n - n_0)/n_0$, определяемых соотношениями

$$\begin{aligned} \Delta T &= \pi^{-3/2} \int W \left(\frac{2}{3} C^2 - 1 \right) \exp(-C^2) d\mathbf{C} = \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{W} \mathbf{S}_T \exp(-\mu^2) d\mu, \\ \Delta N &= \pi^{-3/2} \int W \exp(-C^2) d\mathbf{C} = \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{W} \mathbf{S}_N \exp(-\mu^2) d\mu, \end{aligned}$$

получим:

в случае источника тепла

$$\begin{aligned} \Delta T_T^\pm(t, s, x) &= \exp(st) \left(\pm \sum_\alpha \pi^{-1/2} \frac{K_T^2(s, \eta_\alpha)}{N_\alpha(s)} \exp(-(s+1)x/\eta_\alpha) + \right. \\ &\quad \left. + \pi^{-1/2} (s+1)^2 \int_0^{\pm\infty} \frac{N_{22}(s, \eta)}{N_0(s, \eta)} \exp(-2\eta^2 - (s+1)x/\eta) d\eta \right), \\ \Delta N_T^\pm(t, s, x) &= \exp(st) \left(\pm \sum_\alpha \frac{K_N(s, \eta_\alpha) K_T(s, \eta_\alpha)}{\sqrt{\pi} N_\alpha(s)} \exp(-(s+1)x/\eta_\alpha) + \right. \\ &\quad \left. + \pi^{-1/2} (s+1)^2 \int_0^{\pm\infty} \frac{N_{12}(s, \eta)}{N_0(s, \eta)} \exp(-2\eta^2 - (s+1)x/\eta) d\eta \right); \end{aligned}$$

в случае источника частиц

$$\begin{aligned} \Delta T_N &= \Delta N_T, \\ \Delta N_N^\pm(t, s, x) &= \exp(st) \left(\pm \sum_{\alpha} \pi^{-1/2} \frac{K_N^2(s, \eta_{\alpha})}{N_{\alpha}(s)} \exp(-(s+1)x/\eta_{\alpha}) + \right. \\ &\quad \left. + \pi^{-1/2}(s+1)^2 \int_0^{\pm\infty} \frac{N_{11}(s, \eta)}{N_0(s, \eta)} \exp(-2\eta^2 - (s+1)x/\eta) d\eta \right). \end{aligned}$$

Очевидно, что плоский источник можно рассматривать как систему изотропных точечных источников. Следовательно, распределение от него любой скалярной величины ρ можно выразить через распределение этой величины от точечного источника ρ_0 :

$$\rho(x) = \int \rho_0(r) d\sigma = \int_x^{\infty} 2\pi r \rho_0(r) dr,$$

где r — расстояние от элемента поверхности $d\sigma$ до рассматриваемой точки пространства. Отсюда находим

$$\rho_0(r) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{d\rho(r)}{dr}.$$

Таким образом, для точечного изотропного источника

$$\begin{aligned} \Delta T_T(t, s, r) &= (s+1) \frac{\exp(st)}{2\pi^{3/2}r} \left(\sum_{\alpha} \frac{K_T^2(s, \eta_{\alpha})}{\eta_{\alpha} N_{\alpha}(s)} \exp(-(s+1)r/\eta_{\alpha}) + \right. \\ &\quad \left. + (s+1)^2 \int_0^{\infty} \frac{N_{22}(s, \eta)}{N_0(s, \eta)\eta} \exp(-2\eta^2 - (s+1)r/\eta) d\eta \right), \\ \Delta N_T(t, s, r) &= \Delta T_N(t, s, r) = \\ &= (s+1) \frac{\exp(st)}{2\pi^{3/2}r} \left(\sum_{\alpha} \frac{K_N(s, \eta_{\alpha}) K_T(s, \eta_{\alpha})}{\eta_{\alpha} N_{\alpha}(s)} \exp(-(s+1)r/\eta_{\alpha}) + \right. \\ &\quad \left. + (s+1)^2 \int_0^{\infty} \frac{N_{12}(s, \eta)}{N_0(s, \eta)\eta} \exp(-2\eta^2 - (s+1)r/\eta) d\eta \right), \\ \Delta N_N(t, s, r) &= (s+1) \frac{\exp(st)}{2\pi^{3/2}r} \left(\sum_{\alpha} \frac{K_N^2(s, \eta_{\alpha})}{\eta_{\alpha} N_{\alpha}(s)} \exp(-(s+1)r/\eta_{\alpha}) + \right. \\ &\quad \left. + (s+1)^2 \int_0^{\infty} \frac{N_{11}(s, \eta)}{N_0(s, \eta)\eta} \exp(-2\eta^2 - (s+1)r/\eta) d\eta \right). \end{aligned} \quad (20)$$

В случае произвольной зависимости мощности источника от времени ее можно представить в виде интеграла Фурье

$$P(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{\omega} \exp(i\omega t) dt, \quad P_{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) \exp(i\omega t) d\omega$$

и в силу линейности задачи рассматривать распределение температуры и концентрации частиц как суперпозицию соответствующих распределений, создаваемых отдельными гармониками:

$$\Delta(t, r) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{\omega} \Delta(t, i\omega, r) d\omega.$$

Здесь Δ – любой из определенных выражениями (20) относительных перепадов температуры или концентрации частиц.

Перейдем к анализу полученного решения. На рисунке изображены области C_1 , C_2 и C_3 изменения параметра s , в которых дисперсионное уравнение имеет соответственно два, четыре и шесть корней. Для отрицательного полупространства $\text{Im } s$ картина имеет симметричный относительно действительной оси вид. Численный анализ показывает, что при стремлении s изнутри к границе указанных областей мнимая часть одной из пар корней стремится к нулю и они переходят в решения непрерывного спектра. При этом общее решение остается непрерывной функцией s .

Рассмотрим асимптотическое поведение полученных решений. В непосредственной близости от источника ($r \ll |s + 1|^{-1}$) основной вклад в выражения (20) дают решения непрерывного спектра. При этом величина интегралов в основном определяется малыми значениями η , для которых

$$\begin{aligned} \lambda &= 1, & N_{11} &= (9/4)(s + 1)^2, & N_{12} &= (3/4)(s + 1)^2, \\ N_{22} &= (5/4)(s + 1)^2, & N_0 &= (9/4)(s + 1)^4 \eta, \\ \Delta T_T &= \frac{5}{18\pi^{3/2}r^2}, & \Delta N_N &= \frac{1}{2\pi^{3/2}r^2}, & \Delta T_N &= -\frac{1}{6\pi^{3/2}r^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, распределения полей вблизи источника не зависят от s и определяются только его мгновенной мощностью.

С удалением от источника второе слагаемое в выражениях (20) затухает быстрее первого. Поэтому в пределе $r \rightarrow \infty$ распределения температуры и концентрации определяются дискретными решениями (если такие решения существуют).

Особый интерес представляет анализ поведения решения при малых значениях параметра s . Решения непрерывного спектра в этом случае автоматически переходят в соответствующие решения стационарного уравнения, а собственные решения дискретного спектра могут быть найдены аналитически. Действительно, $\eta_\alpha \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow 0$. Подставляя в дисперсионное уравнение (8) очевидное асимптотическое представление

$$\lambda_0(z) = -\frac{1}{2z^2} - \frac{3}{4z^4} - \frac{15}{8z^6} - \dots - \frac{(2n-1)!!}{2^n z^{2n}} - \dots,$$

с точностью до первых не исчезающих по z слагаемых получим

$$\frac{5}{12\eta^4} - \frac{5s}{6\eta^2} + s^3 = 0.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned}\eta_{\pm 1} &= \pm(2s)^{-1/2}, & \eta_{\pm 2} &= \pm\sqrt{5/6}s^{-1}, \\ N_{\pm 1}\sqrt{\pi}\eta_{\pm 1} &= \frac{5}{18}, & N_{\pm 2}\sqrt{\pi}\eta_{\pm 2} &= \frac{25}{81}\frac{1}{s}, \\ K_T(s, \eta_{\pm 1}) &= -K_T(s, \eta_{\pm 2}) = K_N(s, \eta_{\pm 1}) = K_N(s, \eta_{\pm 2}) = -\frac{1}{3}, \\ \Delta T_T(t, 0, r) &= \frac{1}{2\pi r} \left(\frac{2}{5} + \int_0^\infty \frac{N_{22}(0, \eta)}{N_0(0, \eta)\eta} \exp(-2\eta^2 - r/\eta) d\eta \right), \\ \Delta N_T(t, 0, r) &= \Delta T_N(t, 0, r) = -\frac{1}{2\pi r} \left(\frac{2}{5} + \int_0^\infty \frac{N_{12}(0, \eta)}{N_0(0, \eta)\eta} \exp(-2\eta^2 - r/\eta) d\eta \right), \\ \Delta N_N(t, 0, r) &= \frac{1}{2\pi r} \left(\frac{2}{5} + \int_0^\infty \frac{N_{11}(0, \eta)}{N_0(0, \eta)\eta} \exp(-2\eta^2 - r/\eta) d\eta \right),\end{aligned}$$

что соответствует решению стационарной задачи.

Список литературы

- [1] К. Кейз, П. Цвайфель. Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972.
- [2] Дж. Ферцигер, Г. Капер. Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976.
- [3] К. Черчиньяни. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978.
- [4] С. Cercignani. Transp. Theory and Stat. Phys. 1977. V. 6. № 1. P. 29–56.
- [5] J. T. Kriese, T. S. Chang, C. E. Siewert. Int. J. Eng. Sci. 1974. V. 12. P. 441–469.
- [6] Е. Б. Долгошвина, А. В. Латышев, А. А. Юшканов. Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 1. С. 163–171.
- [7] А. В. Латышев, А. А. Юшканов. ТМФ. 1992. Т. 92. № 1. С. 127–138.
- [8] А. В. Латышев. Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 2. С. 151–164.
- [9] А. В. Латышев, А. А. Юшканов. Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 6. С. 143–155.
- [10] А. В. Латышев, А. А. Юшканов. ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 2. С. 70–76.
- [11] Ф. Д. Гагов. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию 11.IV.1997 г.

S. A. Savkov, A. A. Yushkanov

ANALYTICAL SOLUTION OF THE NONSTATIONARY BOLTZMANN EQUATION IN THE BGK-MODEL

Using the Case method, an analytical solution of the BGK nonstationary kinetic equation is constructed. The problem of a point source of heat and particles is considered as an application.