Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Перегудов, Эффективный потенциал и квазисредние Боголюбова, *ТМФ*, 1997, том 113, номер 1, 149–161

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1072>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 18:04:23

Д. В. Перегудов*

ЭФФЕКТИВНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ И КВАЗИСРЕДНИЕ БОГОЛЮБОВА

Метод эффективного потенциала, который используется в квантовой теории поля при изучении спонтанного нарушения симметрии, рассматривается с точки зрения процедуры квазиусреднения Боголюбова. Показано, что метод эффективного потенциала является одним из вариантов этой процедуры. Обсуждается подход к проблеме фазовых переходов, использующий теорию катастроф. На микроскопическом уровне обосновано существование применяемых в таком подходе потенциалов. Показано, что в случае нарушенной симметрии невыпуклый эффективный потенциал не является преобразованием Лежандра от производящего функционала связанных функций Грина, а есть часть потенциала, используемого в теории катастроф. Связь эффективного потенциала с преобразованием Лежандра от производящего функционала связанных функций Грина определяется правилом Максвелла. Указана схема вычисления квазисредних в методе эффективного потенциала.

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовая теория поля и статистическая механика представляют собой два раздела теоретической физики, в которых мы встречаемся со спонтанным нарушением симметрии. Однако несмотря на близость задач и общий источник этого явления (бесконечное число степеней свободы у системы) теория поля и статистическая механика используют совершенно разные методы его изучения. Начиная с работы Коулмана и Вайнберга [1] основным средством изучения спонтанного нарушения симметрии в квантовой теории поля служит метод эффективного потенциала, тогда как в статистической механике пользуются процедурой квазиусреднения, предложенной Боголюбовым [2]. Данная работа посвящена в основном установлению соответствия между этими двумя методами.

Во-первых, метод эффективного потенциала рассматривается с точки зрения процедуры квазиусреднения. Показано, что метод эффективного потенциала является одним из вариантов этой процедуры. Такое понимание позволяет пролить свет на некоторые аспекты метода эффективного потенциала, которые остаются недостаточно ясными при стандартном изложении [1, 3]. В частности, нарушение симметрии обычно связывают с невыпуклым по “к классическому полю” эффективным потенциалом, имеющим “нетривиальные” минимумы, однако аналогичная функция в статистической механике (скажем, свободная энергия) выпукла по соответствующей термодинамической переменной [4, 5].

*Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет), Москва, Россия

Экстремальные свойства эффективного потенциала (см. раздел 2) также фактически вводятся как дополнительное предположение.

Во-вторых, с помощью теоремы о максимальном слагаемом статсуммы обосновывается существование потенциала, который используется при применении методов теории катастроф к исследованию фазовых переходов (для краткости будем называть такой потенциал “катастрофическим”). Оказывается, что он имеет замечательную структуру и, по существу, определяется некоторой функцией “параметров порядка”.

В-третьих, мы считаем вопреки Иона-Лазинио [6], что эффективный потенциал, если его определить как производящий функционал сильно связанных функций Грина, не является преобразованием Лежандра от производящего функционала связанных функций Грина для теории с нарушенной симметрией. Вместо этого он является частью “катастрофического” потенциала и связан с преобразованием Лежандра от производящего функционала связанных функций Грина правилом Максвелла.

В разделе 2 мы приводим стандартное изложение метода эффективного потенциала. В нескольких комментариях в конце этого раздела указывается на “белые”, с нашей точки зрения, пятна в стандартном изложении. Раздел 3 посвящен качественному рассмотрению модели $\lambda\varphi^4$, основанному на методе квазисредних. Здесь же приводится сравнительный анализ методов эффективного потенциала и квазиусреднения и устанавливается их тождественность. В разделе 4 кратко излагается подход теории катастроф и с помощью теоремы о максимальном слагаемом статсуммы обосновывается существование “катастрофического” потенциала. Дальнейший анализ приводит к обоснованию правила Максвелла. В разделе 5 выясняется связь эффективного потенциала с производящим функционалом связанных функций Грина. Приведена формула для вычисления квазисреднего в методе эффективного потенциала. Раздел 6 содержит пример явно решаемой задачи статистической механики, который иллюстрирует качественные рассуждения предыдущих разделов. Наконец, в разделе 7 кратко сформулированы основные результаты работы.

2. СООБРАЖЕНИЯ, КОТОРЫЕ ОБЫЧНО ПРИВОДЯТ В ТЕОРИИ ПОЛЯ В СВЯЗИ С МЕТОДОМ ЭФФЕКТИВНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Поскольку нам придется неоднократно обращаться к тем или иным аспектам метода эффективного потенциала, приведем его стандартное изложение. Используем почти дословный перевод отрывка оригинальной работы Коулмана и Вайнберга [1] (см. также [3]). Хотя авторы не выписывают лагранжиана явно, будем иметь в виду теорию $\lambda\varphi^4$ с “неправильным” знаком массового члена:

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + m^2 \varphi^2) - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4. \quad (1)$$

Для удобства обозначений ограничимся теорией единственного скалярного поля φ , динамика которого описывается лагранжианом $L(\varphi, \partial_\mu \varphi)$. Рассмотрим эффекты добавления к лагранжиану члена взаимодействия φ с внешним источником J , являющимся c -числовой функцией пространства и времени:

$$L(\varphi, \partial_\mu \varphi) \rightarrow L + J(x)\varphi(x).$$

Соответствующий производящий функционал $W(J)$ определяется с помощью амплитуды перехода из вакуума далекого прошлого в вакуум далекого будущего в присутствии источника $J(x)$:

$$e^{iW(J)} = \langle 0^+ | 0^- \rangle_J.$$

Мы можем разложить W в функциональный ряд Тейлора

$$W = \sum_n \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n G^{(n)}(x_1 \dots x_n) J(x_1) \dots J(x_n).$$

Хорошо известно, что коэффициенты этого ряда являются *связными функциями Грина*, $G^{(n)}$ — это сумма всех связных диаграмм Фейнмана с n внешними линиями.

Классическое поле φ_c вводится равенством

$$\varphi_c(x) = \frac{\delta W}{\delta J(x)} = \frac{\langle 0^+ | \varphi(x) | 0^- \rangle_J}{\langle 0^+ | 0^- \rangle_J}.$$

Эффективное действие $\Gamma(\varphi_c)$ определяется функциональным преобразованием Лежандра

$$\Gamma(\varphi_c) = W(J) - \int d^4x J(x) \varphi_c(x).$$

Из данного определения прямо следует, что

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi_c(x)} = -J(x).$$

Это уравнение окажется решающим для изучения спонтанного нарушения симметрии.

Эффективное действие можно разложить аналогично W :

$$\Gamma = \sum_n \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \Gamma^{(n)}(x_1 \dots x_n) \varphi_c(x_1) \dots \varphi_c(x_n).$$

Коэффициенты этого ряда являются *одночастично неприводимыми функциями Грина*. Имеется и другой способ разложения эффективного действия: вместо разложения по степеням φ_c можно разложить по степеням импульса (в точке, где все внешние импульсы равны нулю). В координатном пространстве это выглядит следующим образом:

$$\Gamma = \int d^4x \left[-V(\varphi_c) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_c)^2 Z(\varphi_c) + \dots \right],$$

где $V(\varphi_c)$ — обычная функция, не функционал — называется эффективным потенциалом. Сравнивая два приведенных разложения, легко видеть, что n -я производная от V равна сумме всех сильно связных диаграмм с n нулевыми внешними импульсами. В древесном приближении V равен просто обычному потенциалу, т.е. сумме всех членов лагранжиана без производных, взятой с обратным знаком.

Применим этот аппарат к изучению спонтанного нарушения симметрии. Предположим, что лагранжиан обладает внутренней симметрией. Пусть для простоты это будет преобразование $\varphi \rightarrow -\varphi$. Тогда спонтанное нарушение симметрии появляется, если

квантовое поле φ приобретает ненулевое вакуумное среднее значение, даже если источник $J(x)$ равен нулю. Это случается, когда

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_c} = 0$$

для некоторого ненулевого φ_c . Далее, поскольку мы обычно интересуемся только случаем, когда вакуумное среднее трансляционно-инвариантно, мы можем переписать последнее равенство в виде

$$\frac{dV}{d\varphi_c} = 0$$

для некоторого ненулевого φ_c . Значение φ_c , для которого это уравнение выполняется, — это среднее значение φ в новом (асимметричном) вакууме. Легко видеть, что требование стабильности относительно малых возмущений приводит к тому, что φ_c должно быть минимумом потенциала.

Рис. 1. Невыпуклый эффективный потенциал

Сделаем несколько комментариев к стандартному изложению. Совершенно непонятно, зачем вводить члены с источником, да еще зависящим от координат. Неясен мотив для выбора именно такой операторной структуры этих членов. Ничем не мотивирован переход от W к Γ , при этом о W полностью забывают и даже никогда не пытаются восстановить. Спонтанное нарушение симметрии обычно связывают с невыпуклым эффективным потенциалом V , имеющим “нетривиальные минимумы” (рис. 1), тогда как преобразование Лежандра определено для выпуклых функций и переводит их опять в выпуклые. Замечание о том, что φ_c должно быть *минимумом* потенциала является скорее благим пожеланием, нежели следствием какого-то осмысленного принципа.

Как будет видно из дальнейшего, положение проясняется, если мы рассмотрим проблему с точки зрения метода квазисредних.

3. МЕТОД КВАЗИСРЕДНИХ

Посмотрим теперь на теорию, описываемую лагранжианом (1), с точки зрения метода квазисредних. Чтобы избежать мнимостей и подчеркнуть сходство со статистической механикой, будем рассматривать евклидову теорию. Прежде всего мы замечаем,

Рис. 2. Потенциал $F(J)$

что лагранжиан обладает симметрией относительно преобразования $\varphi \rightarrow -\varphi$. Этим обеспечивается равенство нулю среднего

$$\langle \varphi(x) \rangle = \frac{\int \exp \left\{ \int L(y) d^4 y \right\} \varphi(x) \mathcal{D}\varphi}{\int \exp \left\{ \int L(y) d^4 y \right\} \mathcal{D}\varphi}.$$

Однако из-за “неправильного” знака массового члена в теории возникает спонтанное нарушение симметрии, поэтому нужно вычислять не обычные средние, а квазисредние. Технически квазиусреднение можно произвести, введя в лагранжиан слагаемые, нарушающие симметрию. В данном случае проще всего выбрать их в форме $J\varphi(x)$. J не зависит от x . Трансляционная инвариантность не нарушена, и квазисредние не зависят от x . Квазисреднее $\prec \varphi(x) \succ$ определяется тогда выражением

$$\prec \varphi(x) \succ = \lim_{J \rightarrow 0} \frac{\int \exp \left\{ \int (L(y) + J\varphi(y)) d^4 y \right\} \varphi(x) \mathcal{D}\varphi}{\int \exp \left\{ \int (L(y) + J\varphi(y)) d^4 y \right\} \mathcal{D}\varphi}.$$

Предел $J \rightarrow 0$ нуждается в некотором пояснении, к которому мы сейчас перейдем. Отметим прежде всего, что можно записать $\prec \varphi(x) \succ$ как

$$\prec \varphi(x) \succ = \lim_{J \rightarrow 0} \frac{dF(J)}{dJ}, \quad (2)$$

где

$$F(J) = \frac{1}{\Omega} \ln \int \exp \left\{ \int (L(y) + J\varphi(y)) d^4 y \right\} \mathcal{D}\varphi$$

(Ω – четырехмерный объем). Функция F аналогична W в методе эффективного потенциала. Отметим некоторые свойства $F(J)$. Во-первых, $F(-J) = F(J)$. Это напоминание о былой симметрии $\varphi \rightarrow -\varphi$. Во-вторых, по крайней мере формально, $F(J)$ – выпуклая функция [4, 5]. Далее, мы ожидаем, что производная dF/dJ конечна при $J \rightarrow 0$. Это требование можно совместить с четностью $F(J)$, только если $F(J)$ имеет излом в нуле (типа $|J|$). Выпуклость $F(J)$ говорит о том, что весь график лежит сверху от касательных в нуле (рис. 2). Таким образом, мы должны еще уточнить, с какой стороны $J \rightarrow 0$. Будем считать, что $J \rightarrow +0$, тогда квазисреднее однозначно определено. Проблема с пределом “выключения” источника является общей для изложенного *способа* квазиусреднения [4, 7].

Рис. 3. Потенциал $G(\varphi_c)$

Поскольку функция $F(J)$ выпукла, мы можем сделать преобразование Лежандра и определить функцию

$$G(\varphi_c) = \max_J (J\varphi_c - F(J)),$$

аналогичную Γ в методе эффективного потенциала. Мы избегаем писать преобразование Лежандра в обычном виде, с производными, поскольку у наши функции не везде дифференцируемы. График $G(\varphi_c)$ имеет характерный вид, показанный на рис. 3. В отличие от рис. 1 здесь нет “горба” между двумя минимумами, его заменяет линейный участок. Крайняя правая точка этого участка соответствует квазисреднему $\prec \varphi(x) \succ$.

Теперь мы в состоянии ответить на часть вопросов, поставленных ранее. Прежде всего совершенно ясны смысл введения членов с источниками и выбор их операторной структуры – это диктуется симметрией исходной задачи. В отличие от метода эффективного потенциала преобразование симметрии явно фигурирует в изложении с самого начала. Зависящие от координат источники не нужны (по крайней мере, до тех пор, пока мы не занимаемся проблемой кристаллического упорядочения), но их можно ввести, чтобы подчеркнуть аналогию с обычной теорией возмущений. То, что при этом получается производящий функционал функций Грина, безусловно, вторично. Например, в модели Гросса–Неве

$$L = i\bar{\psi}\gamma\partial\psi + \frac{g^2}{2}(\bar{\psi}\psi)^2$$

при изучении спонтанного нарушения симметрии $\psi \rightarrow \gamma^5\psi$ возникает функционал

$$F[J] = \frac{1}{\Omega} \ln \int \exp \left\{ \int (L(y) + J(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)) d^2y \right\} \mathcal{D}\varphi,$$

который уже не является производящим функционалом функций Грина поля ψ . Далее, переход от $F(J)$ к $G(\varphi_c)$ необязателен. Единственным оправданием такого перехода в теории поля является более простое диаграммное представление для Γ , нежели для W (сильно связанные диаграммы против связанных). Прояснился и вопрос с преобразованием Лежандра, однако ценой отказа от уравнения $dV/d\varphi_c = 0$. На самом деле, как уже говорилось во введении, с $F(J)$ связаны не один, а два функционала: выпуклый $G(\varphi_c)$,

являющийся преобразованием Лежандра от $F(J)$, и невыпуклый эффективный потенциал, производящий функционал сильно связанных функций Грина, связь которого с $F(J)$ нам пока неизвестна.

Таким образом, мы видим, что конструкции, используемые в методе эффективного потенциала, возникают более естественно, если рассматривать проблему с точки зрения метода квазисредних. Иначе говоря, метод эффективного потенциала является “замаскированной” формой процедуры квазиусреднения.

Нам осталось выяснить отношение невыпуклого эффективного потенциала рис. 1 к потенциалам рис. 2 и 3. В следующем разделе мы рассмотрим фазовые переходы с точки зрения теории катастроф, что поможет решить эту проблему.

4. ПОДХОД ТЕОРИИ КАТАСТРОФ

Изложим предположения, которые обычно используют, применяя аппарат теории катастроф к проблеме фазовых переходов [8]. Мы будем говорить о термодинамической системе, хотя те же соображения справедливы и для теорий поля.

Система описывается набором $2n$ термодинамических переменных, которые можно разделить на пары сопряженных переменных. В каждой паре одна из переменных аддитивная, а другая — неаддитивная. Будем обозначать их соответственно A и a . Поскольку для фиксации состояния достаточно только n переменных, то термодинамическая система определяется n -мерной поверхностью в $2n$ -мерном пространстве с координатами (A, a) . Считается, что уравнения этой поверхности могут быть получены из условия глобального минимума “катастрофического” потенциала $U(A, a)$ по отношению к аддитивным переменным A . Такая точка зрения весьма привлекательна, т.к. необходимое условие минимума $\partial U / \partial A = 0$ может дать уравнение состояния ван-дер-ваальсовского типа, а условие глобальной минимальности “исправляет” это уравнение по правилу Максвелла. На языке термодинамических потенциалов мы получаем связь невыпуклого ван-дер-ваальсовского потенциала с выпуклым истинным. Особая роль аддитивных переменных состоит в том, что обычно фазы различают именно по значениям аддитивных переменных, иначе говоря, предполагают, что поверхность, определяющая уравнения состояния, однозначно проецируется на плоскость аддитивных переменных.

Сделаем небольшое отступление. На самом деле при указанном подходе предположением является лишь то, что уравнения состояния получаются из условия *глобального* минимума “катастрофического” потенциала. Все остальное следует из термодинамики [9]. Действительно, упомянутое выше $2n$ -мерное пространство наделяется естественной симплектической структурой $dA \wedge da$. Первый и второй законы термодинамики требуют тогда, чтобы уравнения состояния системы соответствовали лагранжевой поверхности. Лагранжева же поверхность описывается производящей функцией $s(A)$ (термодинамическим потенциалом), так что ее уравнения имеют вид $a = \partial s / \partial A$. Определяя потенциал $U(A, a) = s(A) - Aa$, получаем, что уравнения состояния можно записать в виде $\partial U / \partial A = 0$.

Оказывается, можно обосновать на микроскопическом уровне существование функции U с описанными свойствами. Ключом к обоснованию служит теорема о максимальном слагаемом статсуммы. В своем первоначальном виде теорема утверждает, что асимптотическое ($N \rightarrow \infty$) значение гиббсовской статистической суммы $Z(\theta) = \sum_n e^{-E_n / \theta}$ равно асимптотическому значению максимального слагаемого

Рис. 4. Правило Максвелла для уравнения состояния

этой суммы, записанной как однократная сумма по энергии $Z(\theta) = \sum_E w(E)e^{-E/\theta}$. Нетрудно, однако, переформулировать теорему для случая любых двух сопряженных переменных. Рассмотрим с этой точки зрения модель $\lambda\varphi^4$. Имеем

$$\begin{aligned} e^{\Omega F(J)} &= \int \exp \left\{ \int (L(y) + J\varphi(y)) d^4y \right\} \mathcal{D}\varphi = \\ &= \int \exp \left\{ \int (L(y) + J\varphi(y)) d^4y \right\} \int d\varphi_c \delta \left(\varphi_c - \frac{1}{\Omega} \int \varphi(x) d^4x \right) \mathcal{D}\varphi = \\ &= \int d\varphi_c e^{\Omega J \varphi_c} \int \exp \left\{ \int L(y) d^4y \right\} \delta \left(\varphi_c - \frac{1}{\Omega} \int \varphi(x) d^4x \right) \mathcal{D}\varphi = \\ &= \int d\varphi_c e^{\Omega(J\varphi_c - K(\varphi_c))}, \end{aligned}$$

где

$$K(\varphi_c) = -\frac{1}{\Omega} \ln \int \exp \left\{ \int L(y) d^4y \right\} \delta \left(\varphi_c - \frac{1}{\Omega} \int \varphi(x) d^4x \right) \mathcal{D}\varphi.$$

Асимптотическое при $\Omega \rightarrow \infty$ значение $F(J)$ вычисляется методом перевала:

$$F(J) = \max_{\varphi_c} (J\varphi_c - K(\varphi_c)). \quad (3)$$

Последнее равенство и есть утверждение о максимальном слагаемом, приспособленное для нашего случая. Подчеркнем еще раз, что максимум в формуле (3) является глобальным. Это вытекает из асимптотического вычисления интеграла методом перевала, причем поведение функции $J\varphi_c - K(\varphi_c)$ вблизи максимума абсолютно не влияет на результат. Поэтому подобным же образом можно вычислить $F(J)$ в случае многих переменных состояния.

Хотя формула для $F(J)$ очень похожа на преобразование Лежандра, а $K(\varphi_c)$ выглядит как термодинамический потенциал при фиксированном φ_c , это лишь формальная аналогия. В частности, $K(\varphi_c)$ может быть невыпуклым. Более того, для системы с нарушенной симметрией $K(\varphi_c)$ должен быть невыпуклым. Действительно, в пределе $J \rightarrow +0$ максимум в формуле (3) достигается при ненулевом φ_c , что возможно только при невыпуклом $K(\varphi_c)$, типа показанного на рис. 1.

Рис. 5. Правило Максвелла для потенциалов

Замечательно, что формула (3) согласована с условием выпуклости $F(J)$. Действительно, используя неравенство $\max_x f(x) + \max_x g(x) \geq \max_x [f(x) + g(x)]$, получим

$$\begin{aligned} \frac{F(J_1) + F(J_2)}{2} &= \frac{1}{2} \max_{\varphi_c} [J_1 \varphi_c - K(\varphi_c)] + \frac{1}{2} \max_{\varphi_c} [J_2 \varphi_c - K(\varphi_c)] \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \max_{\varphi_c} \left[\frac{J_1 + J_2}{2} \varphi_c - K(\varphi_c) \right] = F\left(\frac{J_1 + J_2}{2}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, связь φ_c с J (т.е. уравнение состояния) вытекает из условия глобального минимума по φ_c “катастрофического” потенциала

$$U(\varphi_c, J) = K(\varphi_c) - J\varphi_c.$$

Вследствие невыпуклости $K(\varphi_c)$ необходимое условие экстремума $\partial U / \partial \varphi_c = 0$ определяет на плоскости (φ_c, J) кривую со складкой (рис. 4).

Рассмотрим вопрос об определении глобального минимума. Для участков кривой до точки 1 и после точки 4 все очевидно: при фиксированном J имеется один минимум $U(\varphi_c, J)$ по φ_c , он же глобальный. В диапазоне $(J(1), J(2))$ имеются три экстремума для каждого J : два минимума (на кривых 1–2 и 3–4) и максимум (на кривой 2–3). Чтобы выяснить, какой из минимумов – A или B – является глобальным, вычислим разность $U(B) - U(A)$. На кривой AB имеем $\partial U / \partial \varphi_c = 0$ и $\partial U / \partial J = -\varphi_c$, поэтому

$$\begin{aligned} U(B) - U(A) &= \int_{AB} \frac{\partial U}{\partial \varphi_c} d\varphi_c + \frac{\partial U}{\partial J} dJ = - \int_{AB} \varphi_c dJ = \\ &= -(\varphi_c(A) - \varphi_c(B))J(A) + \int_{AB} J d\varphi_c. \end{aligned}$$

Глобальный минимум “перескакивает” с области 1–2 на область 3–4 (или обратно) при $J(A)$, удовлетворяющем уравнению

$$(\varphi_c(A) - \varphi_c(B))J(A) = \int_{AB} J d\varphi_c.$$

Нетрудно видеть, что это как раз и есть правило Максвелла. Теперь мы восстановим термодинамический потенциал, зависящий от φ_c , интегрированием уравнения состояния один раз вдоль исходной кривой, а второй – вдоль достроенной по правилу Максвелла. Очевидно, что в первом случае мы получим $K(\varphi_c)$, а во втором $-G(\varphi_c)$ (рис. 5). Иначе говоря, связь $K(\varphi_c)$ с $G(\varphi_c)$ или правило Максвелла, переформулированное на языке потенциалов, звучит следующим образом: невыпуклый потенциал нужно дополнить прямолинейным участком, который можно построить, приложив к графику потенциала линейку, касательную к нему в двух точках.

5. НЕВЫПУКЛЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Рассуждения предыдущего раздела кажутся на первый взгляд не связанными с основной темой работы. Однако мы видели, что в них естественно возникает потенциал $K(\varphi_c)$, который не обязательно является выпуклой функцией. Мы утверждаем, что $K(\varphi_c)$ как раз и есть эффективный потенциал. Иначе говоря, мы собираемся показать, что $K(\varphi_c)$ равен сумме всех сильно связанных диаграмм с нулевыми внешними импульсами.

Рассмотрим функциональный интеграл, логарифм которого равен $K(\varphi_c)$:

$$e^{-\Omega K(\varphi_c)} = \int \exp \left\{ \int L(y) d^4 y \right\} \delta \left(\varphi_c - \frac{1}{\Omega} \int \varphi(x) d^4 x \right) \mathcal{D}\varphi.$$

Перейдем к импульсному представлению поля $\varphi(x)$: $\varphi(x) = \sum_k e^{ikx} \tilde{\varphi}(k)$, тогда имеем

$$\begin{aligned} e^{-\Omega K(\varphi_c)} &= \int \exp \left\{ \int L(y) d^4 y \right\} \delta(\varphi_c - \tilde{\varphi}(0)) \prod_k d\tilde{\varphi}(k) = \\ &= \int \exp \left\{ \int L'(y) d^4 y \right\} \prod_{k \neq 0} d\tilde{\varphi}(k). \end{aligned}$$

Разложение в ряд теории возмущений дает всевозможные диаграммы с нулевыми внешними импульсами. Отличие этих диаграмм от обычных состоит в том, что во всех внутренних линиях стоят ненулевые импульсы. Легко понять, что такие диаграммы не могут содержать связанных, но не сильно связанных частей: внутренняя линия, соединяющая две сильно связанные части такой диаграммы, обязательно несла бы нулевой импульс. Когда мы вычисляем логарифм, несвязные диаграммы удаляются обычным образом и остаются только сильно связанные.

Итак, $K(\varphi_c)$ – эффективный потенциал. Его связь с $F(J)$ определяется формулой (3). Потенциалы $F(J)$ и $G(\varphi_c)$ связаны преобразованием Лежандра. В случае ненарушенной симметрии потенциал $K(\varphi_c)$ выпуклый и формула (3) переходит в преобразование Лежандра, при этом $K(\varphi_c)$ совпадает с $G(\varphi_c)$. В случае нарушенной симметрии потенциал $K(\varphi_c)$ невыпуклый и формула (3) не является преобразованием Лежандра. Потенциалы $K(\varphi_c)$ и $G(\varphi_c)$ не совпадают, их связь в этом случае определяется правилом Максвелла.

Выпишем уравнение для определения квазисреднего $\prec \varphi(x) \succ$ методом эффективного потенциала. Используя (2) и (3), находим, что

$$\prec \varphi(x) \succ = - \lim_{J \rightarrow +0} \frac{d}{dJ} \min_{\varphi_c} [K(\varphi_c) - J\varphi_c]. \quad (4)$$

Рис. 6. Выбор минимума A или B системой

Допуская некоторую вольность с порядком действий, можно сказать, что квазисреднее определяется из условия *глобального минимума* $K(\varphi_c)$. Более аккуратное определение (4) не только выбирает один из симметричных минимумов (как на рис. 1), но и помогает в ситуациях, подобных той, которая изображена на рис. 6.

6. МОДЕЛЬ ИЗИНГА В ПРИБЛИЖЕНИИ БРЕГГА-ВИЛЬЯМСА

До сих пор изложение носило качественный характер. В этом разделе мы собираемся подкрепить наши рассуждения явно решаемым примером из статистической механики [10].

Рассмотрим систему с гамильтонианом

$$H = -\frac{I}{2N} \sum_{i,j=1}^N \sigma_i \sigma_j,$$

где σ_i принимает значения ± 1 , а множитель $1/N$ введен для правильного термодинамического предела. Гамильтониан имеет симметрию $\sigma \rightarrow -\sigma$, которая обеспечивает равенство нулю среднего

$$\langle \sigma_i \rangle = \sum_{\{\sigma\}} e^{-H/\theta} \sigma_i / \sum_{\{\sigma\}} e^{-H/\theta}.$$

Однако, по крайней мере при нулевой температуре, состояние $\sigma_i = 1$, $i = 1, \dots, N$, энергетически выгоднее, чем разупорядоченное состояние $\langle \sigma_i \rangle = 0$ (мы считаем $I > 0$). Стало быть, нужно вычислять квазисредние. Для этого введем в гамильтониан члены, нарушающие симметрию:

$$\tilde{H} = H - h \sum_i \sigma_i,$$

и будем вычислять статсумму

$$Z(h) = \sum_{\{\sigma\}} e^{-\tilde{H}/\theta} = \sum_{\{\sigma\}} \exp\{N(IL^2/2 + hL)/\theta\},$$

где

$$L = \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i.$$

Представим Z в виде однократной суммы

$$Z(h) = \sum_{\{\sigma\}} \exp\{N(IL^2/2 + hL)/\theta\} \sum_x \delta_{x,L} = \sum_x \exp\{Nh x/\theta\} \tilde{Z}(x),$$

где $\tilde{Z}(x) = \exp\{N I x^2/2\theta\} \sum_{\{\sigma\}} \delta_{x,L}$. В нашей модельной задаче $\tilde{Z}(x)$ вычисляется явно

$$\tilde{Z}(x) = \frac{N!}{\left(\frac{1+x}{2}N\right)! \left(\frac{1-x}{2}N\right)!} e^{N I x^2/2\theta}.$$

В пределе $N \rightarrow \infty$ имеем

$$K(x) = -\frac{\theta}{N} \ln \tilde{Z}(x) \rightarrow -I \frac{x^2}{2} + \theta \frac{1+x}{2} \ln \frac{1+x}{2} + \theta \frac{1-x}{2} \ln \frac{1-x}{2}.$$

Ниже критической температуры (равной I) функция $K(x)$ не является выпуклой и имеет вид, подобный показанному на рис. 1 (с поправкой на то, что $-1 \leq x \leq 1$). Это эффективный потенциал модели. Свободная энергия $F = -(\theta/N) \ln Z$ вычисляется по теореме о максимальном слагаемом $F(h) = \min_x U(x, h)$, где “катастрофический” потенциал $U(x, h)$ определяется выражением

$$U(x, h) = K(x) - hx.$$

Необходимое условие минимума $\partial U(x, h)/\partial x = 0$ имеет вид

$$x = \text{th} \left(\frac{I}{\theta} x + \frac{h}{\theta} \right)$$

и при $\theta < I$ определяет на плоскости (x, h) кривую со складкой, которую условие глобального минимума превращает в кривую с изломом (см. рис. 4). Интегрирование этого уравнения состояния дает потенциалы F и G типов, показанных на рис. 2 и 3 (опять же с поправкой на ограниченность x). Формула (4) говорит нам, что квазисреднее $\prec \sigma_i \succ$ равно координате правого минимума $K(x)$.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем кратко результаты работы.

Метод эффективного потенциала рассмотрен с точки зрения метода квазисредних. Выяснено, что он является одним из вариантов процедуры квазиусреднения.

Показано существование “катастрофического” потенциала $U(A, a)$ (A – аддитивные, a – неаддитивные термодинамические переменные) такого, что уравнения состояния системы получаются из условия глобального минимума этого потенциала по переменным A . Правило Максвелла обосновано на микроскопическом уровне для уравнений состояния и сформулировано для термодинамических потенциалов.

Выяснен смысл невыпуклых эффективных потенциалов в теории поля. Они являются значениями при $a = 0$ “катастрофических” потенциалов. Эффективный потенциал есть

преобразование Лежандра производящего функционала связанных функций Грина только в случае ненарушенной симметрии. Получена формула для вычисления квазисредних методом эффективного потенциала.

Сделаем несколько замечаний.

Потенциалы типа изображенных на рис. 2 и 3 известны в статистической механике [10]. Выпуклость эффективного потенциала и проблема преобразования Лежандра обсуждались и ранее, например в работе [11]. Прием вставки δ -функции, использованный в разделах 4–6, можно найти в § 147 книги [12]. Насколько нам известно, ни связь эффективного потенциала с методом квазисредних, ни связь теоремы о максимальном слагаемом статсуммы с подходом теории катастроф ранее не обсуждались. Также, по-видимому, впервые отмечено, что эффективный потенциал не является, вообще говоря, преобразованием Лежандра производящего функционала связанных функций Грина.

В заключение мне хотелось бы поблагодарить В. П. Маслова за обсуждение работы и полезные замечания.

Список литературы

- [1] *S. Coleman, E. Weinberg.* Phys. Rev. D. 1973. V. 7. P. 1888–1910.
- [2] *Н. Н. Боголюбов.* Квазисредние в задачах статистической механики. Препринт ОИЯИ Д-781. Дубна, 1961.
- [3] *К. Хуанг.* Кварки, лептоны и калибровочные поля. М.: Мир, 1985.
- [4] *Н. Н. Боголюбов, Н. Н. Боголюбов (мл.).* Введение в квантовую статистическую механику. М.: Наука, 1984.
- [5] *Н. Н. Боголюбов (мл.), Б. И. Садовников, А. С. Шумовский.* Математические методы статистической механики модельных систем. М.: Наука, 1989.
- [6] *G. Jona-Lasinio.* Nuovo Cim. 1964. V. 34. P. 1790–1795.
- [7] *Н. Н. Боголюбов (мл.).* Метод исследования модельных гамильтонианов. М.: Наука, 1974.
- [8] *Р. Гилмор.* Прикладная теория катастроф. В двух книгах. М.: Мир, 1984.
- [9] *В. П. Маслов.* Функци. анализ. и его прилож. 1994. Т. 28. № 4. С. 28–41.
- [10] *Г. Стенли.* Фазовые переходы и критические явления. М.: Мир, 1973.
- [11] *S. Norimatsu, K. Yamamoto, A. Tanaka.* Phys. Rev. D. 1987. V. 35. P. 2009–2012.
- [12] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Статистическая физика. Часть 1 (Теоретическая физика, т. 5). М.: Наука, 1976.

Поступила в редакцию 17.XII.1996 г.,
после доработки 14.IV.1997 г.

D. V. Peregoudov

EFFECTIVE POTENTIALS AND BOGOLIUBOV'S QUASIAVERAGE

The effective potential method used in quantum field theory to study spontaneous symmetry violation is discussed from the point of view of Bogoliubov's quasiaveraging procedure. It is shown that the effective potential method is a disguised type of this procedure. The catastrophe theory approach to the study of phase transitions is discussed. The existence of the potentials used in this approach is proved from the statistical point of view. It is shown that in the case of a broken symmetry, the non-convex effective potential is not a Legendre transform for the connected generating functional Green functions. Instead, it is the part of the potential used in catastrophe theory. The relation between the effective potential and the Legendre transform of generating functional for the connected Green functions is given by Maxwell's rule. A rigorous rule for evaluating quasiaveraged quantities in the framework of the effective potential method is established.