Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Забродин, Разностные уравнения Хироты, *ТМФ*, 1997, том 113, номер 2, 179–230

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1074>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 14:45:29

А. В. Забродин*

РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ХИРОТЫ¹⁾

Дан обзор избранных вопросов теории билинейного разностного уравнения Хироты. Это трехмерное разностное уравнение замечательно тем, что оно дает канонические интегрируемые дискретизации для большинства важнейших солитонных уравнений. Как и в непрерывной теории, разностное уравнение Хироты принадлежит некоторой бесконечной иерархии. В основу изложения положена дискретная версия представления нулевой кривизны, которое записывается в виде разностных уравнений Захарова–Шабата для M -операторов, реализованных как разностные или псевдоразностные операторы. Предлагается единый подход к описанию различных типов M -операторов и вариантов представления нулевой кривизны. Рассмотрены различные двумерные редукции уравнения Хироты, среди них – разностные аналоги таких важных солитонных уравнений, как КдФ, sinh -Гордон, цепочка Тоды, релятивистская цепочка Тоды. Детально разобраны эти и другие типичные примеры.

Содержание

1. Введение
2. Эквивалентные формы записи билинейных уравнений
3. Определения: номенклатура потоков
 - 3.1. Набор переменных и кинематические связи
 - 3.2. Примеры
4. Дискретная версия представления Захарова–Шабата для уравнения Хироты
 - 4.1. Основные M -операторы
 - 4.2. Дискретные уравнения Захарова–Шабата
 - 4.3. Матричная реализация условия нулевой кривизны
5. Линеаризация уравнений Хироты
 - 5.1. Скалярные линейные задачи
 - 5.2. Преобразования Беклунда
 - 5.3. Функции Бейкера–Ахиезера
 - 5.4. z_0 -Калибровка
 - 5.5. Двухкомпонентный формализм

¹⁾Статья написана по заказу Редколлегии.

*Объединенный институт химической физики, Москва, Россия; Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия

6. Псевдоразностные M -операторы
 - 6.1. M -операторы для произвольных элементарных дискретных потоков и линейные задачи для них
 - 6.2. Присоединенные потоки
 7. Об иерархиях билинейных разностных уравнений
 - 7.1. Высшие уравнения иерархии
 - 7.2. Представление нулевой кривизны для составных потоков
 8. Редукции уравнения Хироты
 - 8.1. Редукции типа КдФ
 - 8.2. Цепочка Тоды в дискретном времени и родственные модели
 - 8.3. Периодические редукции
 - 8.4. Дискретное уравнение Лиувилля
- Приложение. Билинейные разностные уравнения из непрерывных иерархий

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1981 году Р. Хирота опубликовал статью [1], которая явилась итогом целой серии его работ [2–6] по дискретизации нелинейных интегрируемых уравнений. Основной результат – компактное билинейное уравнение, которое можно рассматривать как разностный аналог двумеризованной цепочки Тоды. В обозначениях Хироты оно имеет вид

$$[Z_1 \exp(D_1) + Z_2 \exp(D_2) + Z_3 \exp(D_3)] \tau \cdot \tau = 0, \quad (1.1)$$

где Z_i – произвольные константы, $\tau = \tau(x_1, x_2, x_3)$ – функция от трех переменных, а $D_i \equiv D_{x_i} - D$ -операторы Хироты, функции $F(D_x)$ от которых определены правилом

$$F(D_x)f(x) \cdot g(x) = F(\partial_y)f(x+y)g(x-y) \Big|_{y=0}. \quad (1.2)$$

В более явных обозначениях (1.1) имеет вид

$$Z_1 \tau(x_1 + 1, x_2, x_3) \tau(x_1 - 1, x_2, x_3) + Z_2 \tau(x_1, x_2 + 1, x_3) \tau(x_1, x_2 - 1, x_3) + \\ + Z_3 \tau(x_1, x_2, x_3 + 1) \tau(x_1, x_2, x_3 - 1) = 0. \quad (1.3)$$

Это уравнение и называется обычно билинейным разностным уравнением Хироты. В дальнейшем мы, как правило, будем называть его просто уравнением Хироты. Его внешняя простота столь же удивительна, сколь и обманчива: форма уравнения полностью диктуется законами интегрируемости и скрывает содержательные математические структуры, а некоторые более простые на вид уравнения не поддаются анализу аналитическими методами.

Один из наиболее впечатляющих результатов Хироты состоит в том, что уравнение (1.3) объединяет многие, если не все, известные солитонные уравнения – оно как бы содержит их в закодированной форме. Беря непрерывные пределы для подходящих комбинаций переменных и параметров, из уравнения Хироты можно получить уравнение Кортевега – де Фриза (КдФ), Кадомцева–Петвиашвили (КП), модифицированное уравнение КдФ (МКдФ) и модифицированное уравнение КП (МКП), двумеризованную цепочку Тоды (2ПТ), уравнение sine-Гордон (СГ), уравнение Бенджамина–Оно и другие. Их дискретные аналоги получаются из уравнения Хироты путем различного выбора зависимых и независимых переменных и (или) редукций. Далее, было показано, что

само уравнение (1.3) имеет солитонные решения и допускает преобразования Беклунда при всех значениях параметров. Все это позволяет рассматривать уравнение Хироты как *фундаментальное* классическое солитонное уравнение, в котором все типичные примеры содержатся как частные случаи.

Недавно уравнение Хироты возникло (см. [7, 8]) в контексте *квантовых* интегрируемых систем как модельно-независимое функциональное соотношение [9, 10] для собственных значений квантовых матриц перехода (трансфер-матриц). Это и послужило мотивацией для написания настоящих заметок.

Мы предлагаем обзор избранных вопросов теории разностных солитонных уравнений, который имеет целью дальнейшее прояснение основных элементов теории. Мы будем заниматься исключительно уравнениями как таковыми, оставляя в стороне все вопросы, связанные с нахождением и анализом их решений²⁾. Полностью дискретные нелинейные интегрируемые уравнения, как и их непрерывные аналоги, допускают солитонные и конечнозонные решения. Однако систематический анализ этих и других классов решений мог бы стать предметом отдельного обзора. Мы ограничимся исследованием коммутационных представлений разностных солитонных уравнений и вспомогательных линейных задач для них на формально-алгебраическом уровне. В то же время некоторые существенные элементы нашего подхода мотивированы теорией конечнозонных решений.

Разностные и дифференциальные солитонные уравнения очень тесно связаны между собой. Мы уже отмечали, что последние получаются из первых как результат непрерывного (скейлингового) предела. Уравнение Хироты как раз для этого и было придумано. Сам факт, что такое уравнение действительно существует, ни в коем случае не является тривиальным.

Связь в обратном направлении – от непрерывных уравнений к дискретным – была обнаружена Т. Мивой [11], который заметил, что разностное уравнение Хироты может быть получено из иерархии дифференциальных уравнений КП (КП-иерархии), если рассмотреть временную эволюцию вдоль некоторых бесконечных суперпозиций стандартных потоков иерархии. Эта идея была развита в работах [12, 13] как метод производства дискретных солитонных уравнений из непрерывных. Взаимосвязь дискретных и непрерывных интегрируемых иерархий несколько напоминает двойственность Фурье: они дают дополнительные описания одного и того же объекта – бесконечномерного грассманиана [14–17].

В этих заметках мы не обсуждаем вопрос о связи дискретных и непрерывных иерархий в той мере, в какой он того заслуживает. Проблема описания такого предельного перехода, который был бы согласован сразу со всей иерархией, достаточно сложна технически. В то же время обойтись совсем без ссылок на непрерывный случай представляется невозможным. Мы выбрали компромиссный вариант, ограничившись упоминанием нескольких типичных примеров.

Предполагается, что читатель знаком с основными понятиями и методами непрерывной теории, такими как уравнения Лакса и Захарова–Шабата, представление нулевой кривизны в скалярной и матричной формах, коммутирующие потоки, бесконечные иерархии, τ -функция и т. д.

Опишем общую структуру обзора.

²⁾ Именно поэтому мы не делаем различия между *дискретными* и *разностными* уравнениями, иногда используя эти слова как синонимы. Дело в том, что когда говорят о разностных уравнениях (в отличие от дискретных), обычно подразумевают, что их решения – функции непрерывной переменной с определенными аналитическими свойствами.

Главу 2 можно считать продолжением введения. Мы попытались собрать здесь различные формы уравнения Хироты, в которых оно появлялось в литературе. Все они оказываются эквивалентными. Приведены простые преобразования, переводящие их друг в друга.

Главы 3, 4 и 5 составляют основную часть обзора. Чтобы выявить основные принципы, управляющие всем семейством интегрируемых разностных уравнений, нам понадобится ряд определений и аксиом. Они собраны в главе 3. Все введенные в этой главе понятия существенно используются в дальнейшем. В главе 4 подробно обсуждается дискретный вариант представления нулевой кривизны. Устраняя некоторые пробелы в существующей литературе, мы даем явный вид M -операторов (реализованных как разностные операторы) для дискретных потоков. Глава 5 посвящена различным типам вспомогательных линейных задач для уравнения Хироты. Они осуществляют “линеаризацию” исходного нелинейного уравнения. Обсуждается также связанное с этим понятие преобразования Беклунда. Функции Бейкера–Ахиезера введены как формальные решения вышеупомянутых линейных задач, имеющие специальный вид.

Главы 6 и 7 носят более технический характер и могут представлять интерес в основном для специалистов. Их можно опустить без ущерба для понимания остального текста. В главе 6 объясняется, как обобщить M -операторный подход на произвольные дискретные потоки, введенные в главе 3. В общем случае M -операторы содержат отрицательные степени разностных операторов первого порядка. В главе 7 обсуждаются иерархии билинейных разностных уравнений и вводятся “высшие” дискретные потоки вместе с соответствующими представлениями нулевой кривизны. Высказана гипотеза, что все известные в литературе “высшие” (N -членные) уравнения Хироты являются следствиями 3-членных. Эта гипотеза проверена для первого нетривиального примера – 4-членного уравнения для функции от четырех переменных.

В главе 8 рассматриваются двумерные редукции уравнения Хироты, $(L-M)$ -пары и вспомогательные линейные задачи для них. Среди этих редукций содержатся дискретные аналоги уравнения КдФ, цепочки Тоды, системы Абловица–Каупа–Ньюэлла–Сегура (АКНС), релятивистской цепочки Тоды, уравнения $\sinh$ -Гордон, уравнения Лиувилля и др.

В приложении излагаются основные элементы альтернативного подхода к уравнению Хироты, в основу которого положено преобразование Мивы. На простейших примерах мы показываем, как работает метод построения дискретных солитонных уравнений, предложенный в работе [12]. Кроме того, обсуждается непрерывный предел, который в некотором смысле можно интерпретировать как “обратное” преобразование Мивы.

2. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ФОРМЫ ЗАПИСИ БИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Имеются несколько различных форм разностного уравнения Хироты. Исторически они возникли как интегрируемые дискретизации различных непрерывных иерархий (например, КП, 2ЦТ). Эта глава представляет собой список наиболее часто встречающихся форм уравнения Хироты и преобразований, которые показывают их эквивалентность. Несмотря на это полезно иметь в виду их все, поскольку в конкретных случаях та или иная форма может оказаться наиболее удобной.

А. Форма, в которой уравнение впервые появилось в работах Хироты:

$$Z_1 \tau(x_1 + 1) \tau(x_1 - 1) + Z_2 \tau(x_2 + 1) \tau(x_2 - 1) + Z_3 \tau(x_3 + 1) \tau(x_3 - 1) = 0 \quad (2.1)$$

(здесь и далее мы иногда опускаем переменные, не подверженные сдвигу). Отметим, что все три переменные входят симметрично, и уравнение инвариантно относительно одновременных перестановок переменных и параметров Z_i . Кроме того, уравнение инвариантно относительно изменения знака любой из переменных. Преобразование неизвестной функции

$$\tau(x_1, x_2, x_3) \rightarrow \chi_0(x_1+x_2+x_3)\chi_1(x_2+x_3-x_1)\chi_2(x_1+x_3-x_2)\chi_3(x_1+x_2-x_3)\tau(x_1, x_2, x_3) \quad (2.2)$$

с произвольными функциями χ_i также сохраняет форму уравнения. Преобразование

$$\tau(x_1, x_2, x_3) \rightarrow Z_1^{-x_1^2/2} Z_2^{-x_2^2/2} Z_3^{-x_3^2/2} \tau(x_1, x_2, x_3) \quad (2.3)$$

приводит уравнение (1.3) к *канонической форме*:

$$\tau(x_1+1)\tau(x_1-1) + \tau(x_2+1)\tau(x_2-1) + \tau(x_3+1)\tau(x_3-1) = 0, \quad (2.4)$$

которая уже не содержит свободных параметров.

А'. “Калибровочно-инвариантная” форма:

$$Y(x_1, x_2+1, x_3)Y(x_1, x_2-1, x_3) = \frac{(1+Y(x_1, x_2, x_3+1))(1+Y(x_1, x_2, x_3-1))}{(1+Y^{-1}(x_1+1, x_2, x_3))(1+Y^{-1}(x_1-1, x_2, x_3))}, \quad (2.5)$$

где новая неизвестная функция

$$Y(x_1, x_2, x_3) \equiv \frac{\tau(x_1, x_2, x_3+1)\tau(x_1, x_2, x_3-1)}{\tau(x_1+1, x_2, x_3)\tau(x_1-1, x_2, x_3)} \quad (2.6)$$

не меняется при “калибровочных” преобразованиях (2.2). Это дискретная версия более привычной формы записи солитонных уравнений, когда они представлены как нелинейные уравнения в частных производных на потенциалы или поля, а не на τ -функцию. Некоторые частные случаи этого уравнения возникают в термодинамическом анзаце Бете [18, 19].

Б. *КП-подобная форма*:

$$(z_2 - z_3)\tau^{p_1+1, p_2, p_3}\tau^{p_1, p_2+1, p_3+1} + (z_3 - z_1)\tau^{p_1, p_2+1, p_3}\tau^{p_1+1, p_2, p_3+1} + (z_1 - z_2)\tau^{p_1, p_2, p_3+1}\tau^{p_1+1, p_2+1, p_3} = 0. \quad (2.7)$$

Здесь τ^{p_1, p_2, p_3} — функция трех переменных, z_i — произвольные параметры. Это уравнение инвариантно относительно одновременных циклических перестановок переменных и параметров, а также относительно изменения знака у всех переменных. Инвариантность (2.2) эквивалентна тому факту, что если τ^{p_1, p_2, p_3} — решение, то

$$\chi_0(2p_1+2p_2+2p_3)\chi_1(2p_1)\chi_2(2p_2)\chi_3(2p_3)\tau^{p_1, p_2, p_3} \quad (2.8)$$

— тоже решение. Коэффициенты в (2.7) можно сделать равными 1 с помощью преобразования

$$\tau^{p_1, p_2, p_3} \rightarrow \left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}\right)^{p_1 p_2} \left(\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\right)^{p_2 p_3} \tau^{p_1, p_2, p_3}, \quad (2.9)$$

приводящего (2.7) к канонической форме.

Б'. МКП-подобная форма:

$$\begin{aligned} & (z_0 - z_1)(z_2 - z_3)\tau_{p_0}^{p_1+1, p_2, p_3}\tau_{p_0+1}^{p_1, p_2+1, p_3+1} + \\ & + (z_0 - z_2)(z_3 - z_1)\tau_{p_0}^{p_1, p_2+1, p_3}\tau_{p_0+1}^{p_1+1, p_2, p_3+1} + \\ & + (z_0 - z_3)(z_1 - z_2)\tau_{p_0}^{p_1, p_2, p_3+1}\tau_{p_0+1}^{p_1+1, p_2+1, p_3} = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Заметим, что сдвиги аргументов устроены так, что величина $p_1 + p_2 + p_3 - p_0$ одна и та же для всех τ -функций в этом уравнении. Другими словами, уравнение можно без потери общности ограничить на гиперплоскость $p_1 + p_2 + p_3 - p_0 = \text{const}$. Следовательно, уравнение в действительности содержит не четыре, а три переменные, скажем, p_1, p_2, p_3 . Поскольку сумма коэффициентов в (2.10) равна нулю, как и в (2.7), эти уравнения отличаются только репараметризацией величин z_i .

В. ЦТ-подобная форма:

$$\nu\tau_n^{l, \bar{l}+1}\tau_n^{l+1, \bar{l}} + (\mu - \nu)\tau_n^{l, \bar{l}}\tau_n^{l+1, \bar{l}+1} = \mu\tau_{n+1}^{l, \bar{l}+1}\tau_{n-1}^{l+1, \bar{l}}, \quad (2.11)$$

где $\tau_n^{l, \bar{l}}$ — функция трех переменных, μ, ν — произвольные параметры. Мы будем называть переменные $l, \bar{l}$ координатами светового конуса. В этой форме симметрия относительно перестановок отсутствует. Справедлив аналог свойства (2.2): если $\tau_n^{l, \bar{l}}$ — решение уравнения (2.11), то $\chi_0(2n+2l)\chi_1(2l)\chi_2(2\bar{l})\chi_3(2n-2\bar{l})\tau_n^{l, \bar{l}}$ — тоже решение. Преобразование

$$\tau_n^{l, \bar{l}} \rightarrow \left(\frac{\mu}{\nu} - 1\right)^{-l\bar{l}} \left(-\frac{\mu}{\nu}\right)^{-n^2/2} \tau_n^{l, \bar{l}} \quad (2.12)$$

позволяет избавиться от коэффициентов в (2.11):

$$\tau_n^{l, \bar{l}+1}\tau_n^{l+1, \bar{l}} + \tau_n^{l, \bar{l}}\tau_n^{l+1, \bar{l}+1} + \tau_{n+1}^{l, \bar{l}+1}\tau_{n-1}^{l+1, \bar{l}} = 0. \quad (2.13)$$

По аналогии с предыдущими примерами мы будем называть эту форму канонической.

Для удобства читателя мы сейчас приведем линейные подстановки, переводящие друг в друга канонические формы уравнений **А**, **Б**, **В**.

А $\leftrightarrow$ **Б**: $\tau(x_1, x_2, x_3) = \tau^{p_1, p_2, p_3}$,

$$p_1 = \frac{1}{2}(-x_1 + x_2 + x_3), \quad p_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3), \quad p_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3), \quad (2.14)$$

$$x_1 = p_2 + p_3, \quad x_2 = p_1 + p_3, \quad x_3 = p_1 + p_2, \quad (2.15)$$

Б $\leftrightarrow$ **В**: $\tau^{p_1, p_2, p_3} = \tau_n^{l, \bar{l}}$,

$$n = p_2 + p_3, \quad l = p_1, \quad \bar{l} = p_2, \quad (2.16)$$

$$p_1 = l, \quad p_2 = n - \bar{l}, \quad p_3 = \bar{l}, \quad (2.17)$$

А $\leftrightarrow$ **В**: $\tau(x_1, x_2, x_3) = \tau_x^{l, \bar{l}}$,

$$n = x_1, \quad l = \frac{1}{2}(-x_1 + x_2 + x_3), \quad \bar{l} = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3), \quad (2.18)$$

$$x_1 = n, \quad x_2 = n + l - \bar{l}, \quad x_3 = l + \bar{l}. \quad (2.19)$$

Ясно, что эти подстановки не единственны. Все другие получаются из этих формул путем композиции с преобразованиями $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (\pm x_{P(1)}, \pm x_{P(2)}, \pm x_{P(3)})$, где P означает перестановку. Используя формулы (2.14)–(2.19), несложно выписать калибровочно-инвариантные формы уравнений **Б** и **В**.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЯ: НОМЕНКЛАТУРА ПОТОКОВ

Чтобы разобраться в многообразии солитонных уравнений и их коммутационных представлений, нам потребуется некоторый рабочий набор определений и аксиом. Они собраны в этой главе. На самом деле здесь содержится несколько больше того, что нужно для анализа разностного уравнения Хироты. Кроме собственно разностных уравнений предлагаемая схема включает как чисто дифференциальные, так и “смешанные” дифференциально-разностные уравнения. Отправной точкой нашего подхода служит конструкция алгебро-геометрических (конечнозонных) решений [20], выражающихся в терминах римановых тета-функций. Однако, поскольку наша цель заключается в проработке стоящих за ними чисто алгебраических структур, явный вид решений нигде не используется и не упоминается.

3.1. Набор переменных и кинематические связи

“Неизвестную функцию”, входящую в билинейные уравнения, мы всегда будем обозначать через τ . Удобно считать, что в самом общем возможном случае она зависит от бесконечного множества переменных, которые здесь будут называться *потоками* или *временами* (для нас это будут синонимы). В каждом конкретном уравнении только конечное число этих переменных может быть отлично от нуля.

Потоки будут “нумероваться” точками комплексной плоскости $\mathbf{C}$. Поэтому назовем точки $\lambda \in \mathbf{C}$ *метками*. Мы различаем *дискретные* и *непрерывные* потоки³⁾.

Дискретные потоки: Каждой упорядоченной паре точек $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$, $\lambda \neq \mu$, соответствует некоторый дискретный поток $l = l_{\lambda\mu}$. Другими словами, дискретные потоки находятся в биективном соответствии с векторами $\overrightarrow{\lambda\mu}$, т.е. каждый дискретный поток имеет *две* метки.

Непрерывные потоки: Каждой точке $\lambda \in \mathbf{C}$ поставим в соответствие бесконечную последовательность времен $\{t_1, t_2, t_3, \dots\}^{(\lambda)}$. Тем самым все эти (непрерывные) потоки t_j имеют общую метку λ .

На практике в любом конкретном уравнении всегда участвует только конечное число меток. Чтобы аксиоматизировать эту ситуацию, мы потребуем, чтобы для почти всех (т.е. для всех, кроме конечного числа) меток $\lambda \in \mathbf{C}$ и для почти всех упорядоченных пар меток соответствующие им переменные равнялись нулю. Это условие делает данное определение созвучным адевной идеологии, принятой в алгебраической теории чисел. Вероятно, определение, сделанное в такой общей форме, может показаться слишком абстрактным. Тем не менее нам хотелось бы подчеркнуть полезность и такой точки зрения. Данное определение является адекватной формализацией того простого факта, что число независимых переменных в уравнениях интегрируемой иерархии, если рассмотреть сразу всю их совокупность, может быть произвольно, но конечно.

Иногда удобно говорить, что те переменные, которые могут принимать ненулевые значения, *включены*, а все остальные *выключены*. Введенное выше условие означает, что метки включенных переменных всегда образуют конечное множество.

³⁾ Это не более чем условные названия, которые не следует понимать слишком буквально. Вообще говоря, и те, и другие переменные могут принимать любые комплексные значения.

Имея это в виду, полезно переформулировать сказанное выше чуть более конкретно⁴⁾.

Пусть $\{\lambda_\alpha\}$, $\alpha \in I$, – конечное множество отмеченных точек в $\mathbf{C}$. Здесь I – конечное множество меток, соответствующих включенным переменным. Пусть $l_{\alpha\beta}$ ($\alpha \neq \beta$) – “дискретная” временная переменная, ассоциированная с вектором $\overrightarrow{\lambda_\alpha \lambda_\beta}$, а $t_j^{(\alpha)}$ ($j = 1, 2, \dots$) – “непрерывные” переменные, ассоциированные с точкой λ_α . Все эти переменные являются аргументами τ -функции:

$$\tau = \tau(\{l_{\alpha\beta}\}; \{t_j^{(\alpha)}\}).$$

Обозначим через $\mathcal{G}$ граф, вершины которого – отмеченные точки (метки) λ_α , $\alpha \in I$, а ребра – векторы $\overrightarrow{\lambda_\alpha \lambda_\beta}$ (ребра имеют ориентацию, что отмечается стрелкой от α к β). Назовем $\mathcal{G}$ *графом потоков*. Он содержит информацию о кинематической структуре уравнения.

Подчеркнем, что единственными существенными объектами здесь являются вершины и их упорядоченные пары. Все остальные графические элементы введены только для наглядности. Так, например, векторы (ребра графа) могут пересекаться на комплексной плоскости, но точки их пересечения надо считать не принадлежащими графу. Не следует также забывать, что векторы – всего лишь удобные “названия” различных потоков. Они ни в каком смысле не должны ассоциироваться с “направлениями” этих потоков.

Набор только что введенных переменных переполнен. На них должны быть наложены некоторые “кинематические” связи.

Первая группа связей включает только дискретные потоки. Связь возникает всякий раз, когда граф потоков $\mathcal{G}$ содержит цикл. Достаточно фиксировать связи для следующих двух случаев:

i) 2-цикл:

$$\tau(l_{\alpha\beta} + 1, l_{\beta\alpha} + 1) = \tau(l_{\alpha\beta}, l_{\beta\alpha}), \quad (3.1)$$

Говоря неформально, это означает, что $l_{\beta\alpha}$ нужно отождествить с $-l_{\alpha\beta}$;

ii) 3-цикл:

$$\tau(l_{\alpha\beta} + 1, l_{\beta\gamma} + 1, l_{\gamma\alpha} + 1) = \tau(l_{\alpha\beta}, l_{\beta\gamma}, l_{\gamma\alpha}), \quad (3.2)$$

⁴⁾ Вводимые здесь обозначения, как и любая претендующая на полноту и универсальность номенклатура, не очень удобны для практической работы. В дальнейшем они будут упрощены. Но в этой главе, в целях большей определенности при объяснении вводимых понятий, мы придерживаемся систематических обозначений.

Правила наложения связей для более длинных циклов следуют из этих двух. Пользуясь ими, можно последовательно убирать в графе все циклы, тем самым превратив его в дерево. Древесные графы уже соответствуют наборам кинематически независимых дискретных потоков. Поэтому в принципе можно рассматривать только графы без циклов. Однако введение циклов иногда делает набор переменных более симметричным, хотя и не минимальным.

Связи последнего типа описывают “взаимодействие” между дискретным потоком $\overrightarrow{\lambda_\alpha \lambda_\beta}$ и “примыкающими к нему” непрерывными потоками (т.е. ассоциированными с “начальной” и “конечной” точками λ_α и λ_β):

iii) правило Мивы [11, 12] –

$$\tau(l_{\alpha\beta} + 1; t^{(\alpha)}, t^{(\beta)}) = \tau(l_{\alpha\beta}; t^{(\alpha)} - [\lambda_\beta - \lambda_\alpha], t^{(\beta)}), \quad (3.3)$$

$$\tau(l_{\alpha\beta} - 1; t^{(\alpha)}, t^{(\beta)}) = \tau(l_{\alpha\beta}; t^{(\alpha)}, t^{(\beta)} - [\lambda_\alpha - \lambda_\beta]), \quad (3.4)$$

Здесь $\tau(t) \equiv \tau(\{t_j\})$, и мы использовали сокращенное обозначение

$$f(t \pm [z]) \equiv f\left(t_1 \pm z, t_2 \pm \frac{1}{2}z^2, t_3 \pm \frac{1}{3}z^3, \dots\right), \quad (3.5)$$

где f – функция от переменных $t = \{t_1, t_2, \dots\}$. Соотношение (3.4) следует из (3.3) и правила (3.1).

Соотношения (3.3), (3.4) нужно понимать как формальные правила, позволяющие превращать бесконечную последовательность сдвигов непрерывных времен в сдвиг одного дискретного времени и наоборот. Нас здесь не волнуют вопросы сходимости, т.е. τ -функция рассматривается как формальный ряд по $\lambda_\alpha, \lambda_\beta$ (в левых частях равенств (3.3) и (3.4) $\lambda_\alpha, \lambda_\beta$ неявно присутствуют в определении дискретных потоков). В конечнотонных решениях τ -функция является *настоящей функцией*, а не просто формальным рядом. В этом случае имеются некоторые дополнительные ограничения на области определения переменных и меток, обеспечивающие сходимость. Отметим, что в конечнотонных решениях вершины и ребра графа потоков $\mathcal{G}$ приобретают дополнительный смысл как отмеченные точки и разрезы на римановой поверхности. При этом дискретные времена параметризуют скачки функции Бейкера–Ахиезера на разрезах.

Мы будем называть дискретные потоки, ассоциированные с $\overrightarrow{\lambda_\alpha \lambda_\beta}$, *элементарными дискретными потоками*. Можно также ввести более сложные потоки, являющиеся как бы “суперпозицией” элементарных. Именно, возьмем несколько элементарных потоков, скажем $l_1, l_2, \dots, l_M$ (здесь $l_i \equiv l_{\alpha_i \beta_i}$ для некоторых α_i, β_i), и рассмотрим τ -функцию как функцию новой переменной y , вводимой следующим образом: $\tau[y] \equiv \tau(l_1 + y, l_2 + y, \dots, l_M + y)$. То есть эволюция, описываемая переменной y , состоит в

том, что “элементарные” переменные l_i одновременно сдвигаются на y , а остальные не меняются. Потоки такого типа назовем *составными дискретными потоками*.

Иными словами, если ∂_i – векторное поле, соответствующее l_i , то векторное поле, отвечающее составному потоку y , – это

$$\partial_y := \sum_{i=1}^M \partial_i,$$

так что

$$\exp(\partial_y)\tau(\{l_{\alpha_i\beta_i}\}) = \tau(\{l_{\alpha_i\beta_i} + 1\}) \exp(\partial_y).$$

Следует, однако, несколько подправить определение, поскольку этим способом не всегда получается действительно составной поток. Например, из (3.2) следует, что одновременный сдвиг $l_{\alpha\beta}$ и $l_{\beta\gamma}$ эквивалентен некоторому элементарному потоку.

Точная формулировка такова:

Составные дискретные потоки нумеруются конечными множествами векторов $\{\lambda_{\alpha_i} \lambda_{\beta_i}\}$, $i = 1, 2, \dots, M$, такими, что $\beta_i \neq \alpha_j$ для всех i, j . Пусть y – соответствующая временная переменная, эволюция вдоль направления составного потока определяется формулой

$$\tau[y] = \tau(\{l_{\alpha_i\beta_i} + y\}),$$

причем $l_{\alpha_i\beta_i}$ и все другие элементарные переменные считаются постоянными.

Различие между элементарными и составными потоками можно распространить и на непрерывные потоки. По причине, которая станет ясна позднее, естественно назвать потоки $t_1^{(\alpha)}$ элементарными. Сейчас мы можем пояснить это, сославшись на правило Мивы (3.3), из которого следует, что они могут быть получены из дискретных элементарных потоков с помощью некоторой предельной процедуры. Аналогичным образом высшие непрерывные времена $t_j^{(\alpha)}$ с $j \geq 2$ получаются как предел составных дискретных времен. Поэтому естественно тоже назвать их составными.

Итак, нами были введены несколько понятий и определений, которые существенно используются далее. Прежде всего были предложены элементы классификации интегрируемых потоков в солитонных уравнениях. Мы выделили дискретные и непрерывные потоки. И те, и другие были разделены на элементарные и составные. С каждым уравнением можно связать некоторый граф, который наглядно отражает “кинематику” участвующих в уравнении потоков. Для иллюстрации мы сейчас приведем несколько примеров.

3.2. Примеры

Для того чтобы сделать граф потоков более информативным, полезно ввести дополнительный графический элемент: “жирная” точка будет означать, что “сидящие в ней” непрерывные времена могут быть отличны от нуля⁵⁾.

В иерархии КП граф потоков состоит всего из одной “жирной” точки, с которой ассоциированы времена $\{t_j\}$ (рис. 1). Множество дискретных потоков в данном случае пусто; τ -функция записывается в виде $\tau(t) \equiv \tau(t_1, t_2, \dots)$.

В иерархии 2ЦТ граф потоков состоит из двух “жирных” точек с временами $\{t_j\}$ и $\{\bar{t}_j\}$ (рис. 2). Элементарный дискретный поток, ассоциированный с вектором, соединяющим эти точки, – это “дискретное время” n в τ -функции $\tau_n(t; \bar{t})$ двумеризованной цепочки Тоды.

⁵⁾С учетом правила Мивы более точно было бы закончить фразу, например, так: непрерывные времена не могут быть сделаны равными нулю с помощью преобразования вида (3.3), (3.4).

Рис. 1. КП

Рис. 1. 2ЦТ

Графы потоков дискретного уравнения КП и дискретной 2ЦТ представлены соответственно на рис. 3 и рис. 4.

Рис. 3. Дискретное уравнение КП

Рис. 4. Дискретное уравнение 2ЦТ

Все непрерывные времена выключены. В обоих случаях включены только три независимых дискретных потока. Это вполне аналогично непрерывной версии, где первые нетривиальные уравнения иерархий КП и 2ЦТ имеют три независимые переменные: t_1 , t_2 , t_3 и t_1 , $\bar{t}_1$, n , соответственно. В непрерывном пределе все линии на рис. 3 и рис. 4 (кроме вертикальной линии у 2ЦТ) стягиваются в “жирные” точки.

Дискретным *иераргиям* КП и 2ЦТ отвечают графы, представленные на рис. 5 и рис. 6.

Рис. 5. Дискретная иерархия КП

Рис. 6. Дискретная иерархия 2ЦТ

Высшие уравнения иерархий содержат более чем три элементарных потока. Метки этих потоков аналогичны номерам высших потоков в непрерывных иерархиях. Напомним, что эти метки — просто комплексные числа. Это немного похоже на двойственность Фурье между “номером” потока (или, скажем, номером уравнения в иерархии) и временной переменной: непрерывные потоки маркируются дискретным значком, а дискретные

потoki — непрерывным.

4. ДИСКРЕТНАЯ ВЕРСИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЗАХАРОВА–ШАБАТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ХИРОТЫ

Переформулировка классических нелинейных уравнений как условия отсутствия кривизны у некоторой двумерной связности является основным элементом теории. Отсутствие кривизны означает, что последовательные сдвиги вдоль любой пары потоков коммутируют. Эти условия известны как *уравнения Захарова–Шабата* или *представление нулевой кривизны*. В работе [1] Хирота нашел пример дискретизованного представления нулевой кривизны для уравнения (1.1). На физическом языке дискретная связность — это калибровочное поле на решетке; тем самым дискретные солитонные уравнения должны быть тесно связаны с калибровочной теорией поля на решетке. Подход, акцентирующий внимание именно на этой стороне дела, был развит Саито и Саитох [21]. Ниже мы излагаем эти результаты в несколько модифицированном виде, подчеркивая аналогию с теорией двумеризованной цепочки Тоды [22].

Дискретное условие нулевой кривизны эквивалентно коммутативности некоторых разностных операторов от нескольких переменных. Существование “коммутационных представлений” такого рода — верный признак интегрируемости уравнения. Вместе с тем, если коммутационное представление существует, оно, как правило, далеко не единственно. В частности, имеются различные способы (на самом деле их даже бесконечно много) представить уравнение Хироты как условие нулевой кривизны.

Общая схема такова. Выберем некоторый (любой) поток в качестве “базисного”, т.е. все M -операторы будут дифференциальными или разностными операторами, действующими на функции от базисной временной переменной. Коммутативность потоков означает, что любая пара таких M -операторов удовлетворяет условию совместности, которое и есть одно из уравнений Захарова–Шабата. Эта точка зрения позволяет связать различные интегрируемые иерархии друг с другом. В общем случае M -операторы оказываются псевдоразностными⁶⁾ или чисто разностными операторами с матричными коэффициентами. В этой главе обсуждаются только чисто разностные операторы. Более общие примеры рассмотрены далее в главе 6. Если в качестве базисного выбрать какой-либо элементарный поток, коэффициенты оператора будут скалярными функциями. В разделе 4.3 содержится пример условия нулевой кривизны для уравнения Хироты, реализованного 2×2 -матричными разностными операторами.

4.1. Основные M -операторы

До сих пор все элементарные дискретные потоки выступали на равных правах, ни один из них не был чем-либо выделен. Сейчас мы собираемся временно нарушить это равноправие и зафиксировать некоторый *базисный поток*. Вообще говоря, он может быть *любым*, в том числе составным или непрерывным. Мы начнем с простейшего случая, когда в качестве базисного выбран некоторый элементарный дискретный поток. Другие возможности обсуждаются позднее.

Идея заключается в том, чтобы сопоставить всем потокам разностные операторы, которые будут действовать на функции от “базисной” переменной. Будем называть их *M -операторами*. В этой главе рассмотрены простейшие M -операторы. Они служат основой для построения более общих.

⁶⁾ Мы используем это короткое название вместо, возможно, формально более правильного, но громоздкого “квантовые псевдодифференциальные операторы”.

Пусть базисный поток соответствует вектору $\overrightarrow{\lambda_0 \lambda_1}$. Систематические обозначения с двойным индексом, введенные в предыдущей главе, слишком громоздки. Когда число участвующих в задаче потоков зафиксировано с самого начала, удобно дать им более простые и короткие имена. Если не оговорено противное, буква u будет зарезервирована для базисной переменной, отвечающей элементарному дискретному потоку. Тем самым мы полагаем

$$u = l_{01}.$$

Пусть λ_2 – любая метка, отличная от λ_0, λ_1 . Если включены все три элементарных дискретных потока с этими метками, а остальные выключены, граф потоков представляет собой треугольник (рис. 7). Его стороны $\overrightarrow{\lambda_0 \lambda_2}$ и $\overrightarrow{\lambda_1 \lambda_2}$ определяют потоки, которые мы будем называть примыкающими к базисному в очевидном из рисунка смысле. В общем случае (т.е. когда один из этих потоков не обязательно базисный и они не обязательно образуют треугольник) назовем поток $\overrightarrow{\lambda_\alpha \lambda_\gamma}$ (соответственно $\overrightarrow{\lambda_\beta \lambda_{\gamma'}}$) *левым примыкающим* (соответственно *правым примыкающим*) к потоку $\overrightarrow{\lambda_\alpha \lambda_\beta}$.

Рис. 7

Возвращаясь к треугольному графу, положим $l_{02} = l$, $l_{12} = l'$, а τ -функцию запишем в виде $\tau_u^{l, l'}$. Из этих трех потоков только два независимых, т.к. из правила (ii) имеем связь

$$\tau_{u+1}^{l, l'+1} = \tau_u^{l+1, l'}. \quad (4.1)$$

Коэффициенты M -операторов выражаются через τ . Выберем u, l в качестве независимых переменных. По определению M -оператор для потока l (левого примыкающего к базисному) имеет вид

$$M_u^l = e^{\partial_u} - \lambda_2^{01} \frac{\tau_u^l \tau_{u+1}^{l+1}}{\tau_u^{l+1} \tau_{u+1}^l}, \quad (4.2)$$

где численный коэффициент λ_2^{01} выражается через три метки $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ следующим образом:

$$\lambda_2^{01} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_0} - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_0}, \quad \lambda_1^{02} = -\lambda_2^{01}. \quad (4.3)$$

Оператор сдвига e^{∂_u} имеет стандартные коммутационные соотношения с функциями от u : $e^{\pm \partial_u} f(u) = f(u \pm 1) e^{\pm \partial_u}$. Отметим, что $M_u^u = e^{\partial_u}$. В (4.2) подразумевается, что τ -функция может зависеть также и от всех остальных переменных, которые в этом частном случае выключены. Будь они включены, формула (4.2) сохранит свой вид, а все эти переменные войдут в нее как параметры, поскольку их значения для каждой из τ -функций в правой части одинаковы. Как правило, мы не указываем такие переменные явно, если это не приводит к недоразумениям.

Введенный M -оператор может быть немедленно модифицирован для правого примыкающего потока l' путем перехода к независимым переменным u, l' . В правой части (4.2) (неявный) аргумент l' у каждой τ -функции один и тот же. Используя (4.1), можно переписать правую часть в таком виде, чтобы аргумент l стал везде одним и тем же. Правило (ii) гласит, что сдвиг $l' \rightarrow l' + 1$ эквивалентен одновременному сдвигу $u \rightarrow u + 1$ и $l \rightarrow l + 1$. Руководствуясь соображением, что M -операторы должны генерировать сдвиги дискретных времен на 1, естественно *определить* M -оператор для правого примыкающего потока l' формулой

$$\overline{M}_u^{l'} = e^{-\partial_u} M_u^l,$$

или более подробно:

$$\overline{M}_u^{l'} = 1 - \lambda_2^{01} \frac{\tau_{u+1}^{l'+1} \tau_{u-1}^{l'}}{\tau_u^{l'+1} \tau_u^{l'}} e^{-\partial_u}. \quad (4.4)$$

Полезно также ввести операторы

$$\mathcal{M}_u^l = e^{-\partial_l} M_u^l, \quad \overline{\mathcal{M}}_u^{l'} = e^{-\partial_{l'}} \overline{M}_u^{l'}, \quad (4.5)$$

действующие на функции двух переменных. Тривиальным следствием данных выше определений является их коммутативность:

$$[\mathcal{M}_u^l, \overline{\mathcal{M}}_u^{l'}] = 0. \quad (4.6)$$

Мы ввели M -операторы для элементарных дискретных потоков, примыкающих к базисному. В этом случае они имеют особенно простой вид, являясь разностными операторами первого порядка по u . Их вид для составных и не примыкающих к базисному потоков сложнее и будет обсуждаться в последующих главах.

В заключение этого раздела сделаем краткое замечание о непрерывных базисных потоках. Согласно (3.3) в непрерывном пределе по u имеем $e^{\partial_u} \rightarrow 1 - \lambda^{-1} \partial_{t_1} + O(\lambda^{-2})$, где t_1 – первое непрерывное время, несущее метку λ_0 , и $\lambda = (\lambda_1 - \lambda_0)^{-1}$. Поэтому предельная форма M -оператора (4.2) при $\lambda \rightarrow \infty$ имеет вид

$$M^{(l)} = \partial_{t_1} - \partial_{t_1} \log \frac{\tau^{l+1}}{\tau^l} - (\lambda_2 - \lambda_0)^{-1}.$$

Это дифференциальный оператор первого порядка по базисной переменной t_1 . Он генерирует сдвиг дискретной переменной l . Тот факт, что это оператор *первого* порядка, оправдывает причисление потока t_1 к *элементарным* (см. конец раздела 3.1).

4.2. Дискретные уравнения Захарова–Шабата

Двух независимых потоков еще недостаточно для написания содержательных уравнений. Нетривиальные билинейные уравнения на τ появляются начиная со случая трех независимых дискретных потоков. В этом случае граф потоков должен иметь как минимум 4 вершины. Зафиксируем 4 метки λ_α , $\alpha = 0, 1, 2, 3$, и рассмотрим граф общего вида с этими четырьмя вершинами (рис. 8). Упрощенные обозначения ясны из рисунка. Аналогично (4.3) положим

$$\lambda_\gamma^{\alpha\beta} = \frac{1}{\lambda_\gamma - \lambda_\alpha} - \frac{1}{\lambda_\beta - \lambda_\alpha}, \quad \lambda_\beta^{\alpha\gamma} = -\lambda_\gamma^{\alpha\beta} \quad (4.7)$$

Рис. 8

для всех возможных значений попарно различных индексов.

Пусть, как и раньше, $\lambda_0 \lambda_1$ – базисный поток. Левые (соответственно правые) примыкающие к нему потоки – это $\lambda_0 \lambda_2$, $\lambda_0 \lambda_3$ (соответственно $\lambda_1 \lambda_2$, $\lambda_1 \lambda_3$). Для каждого из них имеется свой M -оператор вида (4.2) (соответственно (4.4)).

Содержательная часть конструкции заключается в том, чтобы распространить тривиальные свойства коммутативности (4.6) на *все* потоки, примыкающие к u :

$$[\mathcal{M}_u^l, \mathcal{M}_u^m] = [\mathcal{M}_u^l, \bar{\mathcal{M}}_u^{\bar{l}}] = [\bar{\mathcal{M}}_u^{\bar{l}}, \bar{\mathcal{M}}_u^{\bar{m}}] = 0. \quad (4.8)$$

В отличие от (4.6) эти условия уже не выполняются автоматически, а приводят к билинейным уравнениям на τ . Записав эти условия в терминах M -операторов, мы получим дискретные уравнения Захарова–Шабата.

В следующем предложении мы используем обозначения типа $M_u^l = M_u^l(u, l, \bar{l}, \dots)$ для указания зависимости M -операторов от различных переменных.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Дискретные уравнения Захарова–Шабата*

$$M_u^m(m, l+1)M_u^l(m, l) = M_u^l(m+1, l)M_u^m(m, l), \quad (4.9)$$

$$\bar{M}_u^{\bar{m}}(\bar{m}, \bar{l}+1)\bar{M}_u^{\bar{l}}(\bar{m}, \bar{l}) = \bar{M}_u^{\bar{l}}(\bar{m}+1, \bar{l})\bar{M}_u^{\bar{m}}(\bar{m}, \bar{l}), \quad (4.10)$$

$$\bar{M}_u^{\bar{l}}(l+1, \bar{l})M_u^l(l, \bar{l}) = M_u^l(l, \bar{l}+1)\bar{M}_u^{\bar{l}}(l, \bar{l}) \quad (4.11)$$

эквивалентны соответственно следующим билинейным соотношениям для τ :

$$\lambda_2^{01} \tau_u^{l+1, m} \tau_{u+1}^{l, m+1} - \lambda_3^{01} \tau_u^{l, m+1} \tau_{u+1}^{l+1, m} + H_1(l, m; u) \tau_u^{l+1, m+1} \tau_{u+1}^{l, m} = 0, \quad (4.12)$$

$$\lambda_3^{01} \tau_u^{\bar{l}+1, \bar{m}} \tau_{u+1}^{\bar{l}, \bar{m}+1} - \lambda_2^{01} \tau_u^{\bar{l}, \bar{m}+1} \tau_{u+1}^{\bar{l}+1, \bar{m}} + H_2(\bar{l}, \bar{m}; u) \tau_u^{\bar{l}, \bar{m}} \tau_{u+1}^{\bar{l}+1, \bar{m}+1} = 0, \quad (4.13)$$

$$\lambda_3^{01} \tau_u^{l, \bar{l}+1} \tau_{u+1}^{l+1, \bar{l}} - \lambda_2^{01} \tau_{u+1}^{l, \bar{l}+1} \tau_u^{l+1, \bar{l}} + H_3(l, \bar{l}; u) \tau_u^{l, \bar{l}} \tau_{u+1}^{l+1, \bar{l}+1} = 0, \quad (4.14)$$

где H_i – произвольные функции, обладающие свойством $H_i(l, m; u+1) = H_i(l, m; u)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО заключается в непосредственной коммутации M -операторов. Выпишем их еще раз применительно к данному случаю:

$$M_u^l = e^{\partial_u} - \lambda_3^{01} \frac{\tau_u^l \tau_{u+1}^{l+1}}{\tau_u^{l+1} \tau_{u+1}^l}, \quad (4.15)$$

$$\overline{M}_u^{\overline{m}} = 1 - \lambda_3^{01} \frac{\tau_{u-1}^{\overline{m}} \tau_{u+1}^{\overline{m}+1}}{\tau_u^{\overline{m}+1} \tau_u^{\overline{m}}} e^{-\partial_u}; \quad (4.16)$$

M_u^m дается формулой (4.15), в которой надо заменить $l \rightarrow m$ и $3 \rightarrow 2$, а $\overline{M}_u^{\overline{l}}$ дается формулой (4.16), в которой надо заменить $\overline{m} \rightarrow \overline{l}$ и $3 \rightarrow 2$. Ниже со всеми подробностями приведены вычисления для случая (4.9).

Уравнение (4.9) имеет вид

$$\begin{aligned} & \left(e^{\partial_u} - \lambda_2^{01} \frac{\tau_u^{m,l+1} \tau_{u+1}^{m+1,l+1}}{\tau_u^{m+1,l+1} \tau_{u+1}^{m,l+1}} \right) \left(e^{\partial_u} - \lambda_3^{01} \frac{\tau_u^{m,l} \tau_{u+1}^{m,l+1}}{\tau_u^{m,l+1} \tau_{u+1}^{m,l}} \right) = \\ & = \left(e^{\partial_u} - \lambda_3^{01} \frac{\tau_u^{m+1,l} \tau_{u+1}^{m+1,l+1}}{\tau_u^{m+1,l+1} \tau_{u+1}^{m+1,l}} \right) \left(e^{\partial_u} - \lambda_2^{01} \frac{\tau_u^{m,l} \tau_{u+1}^{m+1,l}}{\tau_u^{m+1,l} \tau_{u+1}^{m,l}} \right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Члены $e^{2\partial_u}$ и члены, не содержащие оператора сдвига, сокращаются автоматически. Сравнение коэффициентов при e^{∂_u} дает

$$\frac{\tau_{u+1}^{m,l}}{\tau_{u+2}^{m,l}} \left(\lambda_3^{01} \frac{\tau_{u+2}^{m,l+1}}{\tau_{u+1}^{m,l+1}} - \lambda_2^{01} \frac{\tau_{u+2}^{m+1,l}}{\tau_{u+1}^{m+1,l}} \right) = \frac{\tau_{u+1}^{m+1,l+1}}{\tau_u^{m+1,l+1}} \left(\lambda_3^{01} \frac{\tau_u^{m+1,l}}{\tau_{u+1}^{m+1,l}} - \lambda_2^{01} \frac{\tau_u^{m,l+1}}{\tau_{u+1}^{m,l+1}} \right), \quad (4.18)$$

или

$$\frac{\lambda_3^{01} \tau_u^{m+1,l} \tau_{u+1}^{m,l+1} - \lambda_2^{01} \tau_u^{m,l+1} \tau_{u+1}^{m+1,l}}{\lambda_3^{01} \tau_{u+1}^{m+1,l} \tau_{u+2}^{m,l+1} - \lambda_2^{01} \tau_{u+1}^{m,l+1} \tau_{u+2}^{m+1,l}} = \frac{\tau_{u+1}^{m,l} \tau_u^{m+1,l+1}}{\tau_{u+2}^{m,l} \tau_{u+1}^{m+1,l+1}}. \quad (4.19)$$

Знаменатели в обеих частях отличаются от числителей сдвигом $u \rightarrow u+1$. Следовательно, их отношение — это “квазиконстанта” по u с периодом 1, так что уравнение действительно эквивалентно (4.12), что и завершает доказательство.

Теперь пришло время восстановить равноправие элементарных потоков, потребовав, чтобы уравнения Захарова–Шабата выполнялись для *любого* выбора базисного потока. Например, пусть теперь l — базисный поток. Построим M -операторы для потоков $u, \overline{u}$, примыкающих к l (см. рис. 8). Тогда то, что мы хотим потребовать, — это коммутативность операторов $M_l^u, M_l^{\overline{m}}, \overline{M}_l^{\overline{u}}, \overline{M}_l^{-\overline{m}}$ (конечно, некоторые из них коммутируют автоматически в силу (4.6)). Во избежание недоразумений отметим, что мы отнюдь не требуем тотальной коммутативности: так, M -операторы, отвечающие различным базисным потокам, вообще говоря, не коммутируют, т.е., например, $[\overline{M}_u^{\overline{m}}, M_l^{\overline{m}}] \neq 0$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть x — любой из элементарных потоков, показанных на рис. 8, и пусть $v, \overline{v}$ — соответствующие левый и правый примыкающие потоки такие, что $x, v, \overline{v}$ независимы. Тогда условия коммутативности

$$[\mathcal{M}_x^v, \overline{\mathcal{M}}_x^{\overline{v}}] = 0,$$

наложенные одновременно для любых трех независимых базисных потоков x , эквивалентны уравнениям

$$\lambda_1^{03} \tau_u^{l,m+1} \tau_{u+1}^{l+1,m} + \lambda_2^{01} \tau_u^{l+1,m} \tau_{u+1}^{l,m+1} + \lambda_3^{02} \tau_u^{l+1,m+1} \tau_{u+1}^{l,m} = 0, \quad (4.20)$$

$$\lambda_1^{02} \tau_u^{\overline{l},\overline{m}+1} \tau_{u+1}^{\overline{l}+1,\overline{m}} + \lambda_2^{03} \tau_u^{\overline{l},\overline{m}} \tau_{u+1}^{\overline{l}+1,\overline{m}+1} + \lambda_3^{01} \tau_u^{\overline{l}+1,\overline{m}} \tau_{u+1}^{\overline{l},\overline{m}+1} = 0, \quad (4.21)$$

$$\lambda_3^{01} \tau_u^{l,\overline{l}+1} \tau_{u+1}^{l+1,\overline{l}} - \lambda_3^{02} \tau_u^{l,\overline{l}} \tau_{u+1}^{l+1,\overline{l}+1} = \lambda_2^{01} \tau_{u+1}^{l,\overline{l}+1} \tau_{u-1}^{l+1,\overline{l}}. \quad (4.22)$$

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. В силу предложения 4.1 достаточно показать, что функции H_i являются константами: $H_1 = -H_2 = -H_3 = \lambda_3^{02}$. Это можно сделать, выписав билинейные уравнения, эквивалентные уравнениям Захарова–Шабата, для каждого выбора базисного потока и потребовав их совместности.

Мы видим, что уравнения (4.20), (4.22) совпадают с КП-подобной и 2ПТ-подобной формами уравнения Хироты ((2.7) и (2.11), соответственно). (Уравнение (4.21) совпадает с КП-подобной формой после замены $u \rightarrow -u$.) Эти три уравнения отличаются только выбором независимых переменных, что согласуется с линейными подстановками (2.14)–(2.19). Переход от одной тройки независимых переменных к другой производится по правилам (i) и (ii) (см. (3.1), (3.2)). Последовательно применяя их, несложно убедиться, что три уравнения (4.20)–(4.22) полностью эквивалентны.

МКП-подобная версия (2.10), включающая 4 переменные, следует из (4.20) и правила (3.2). Именно, фиксируем еще одну метку μ_0 и рассмотрим потоки $\mu_0 \lambda_\alpha$, $\alpha = 0, \dots, 3$, с соответствующими переменными p_α . Из (3.2) мы имеем $\tau_{u, p_0+1}^{m+1, p_2} = \tau_{u, p_0}^{m, p_2+1}$ и т.д. Эта замена переменных переводит (4.20) в (2.10).

4.3. Матричная реализация условия нулевой кривизны

Здесь мы ограничимся рассмотрением одного примера, который иллюстрирует общую схему, очерченную во введении к этой главе.

Выключив не относящиеся к делу переменные, рассмотрим редуцированную версию графа потоков из раздела 4.2 (рис. 9).

Рис. 9

Упрощенные обозначения, введенные для этого случая, ясны из рисунка. Сделанный здесь выбор независимых переменных соответствует дискретной 2ПТ.

Наша цель – написать условие нулевой кривизны в случае, когда базисный поток не элементарный, а составной. Пусть он задается парой векторов $\lambda_0 \lambda_3$, $\lambda_1 \lambda_2$, а y – соответствующая “составная” переменная. В соответствии с определением главы 3 τ -функция зависит от y следующим образом:

$$\tau_u^{l, \bar{l}}[y] := \tau_u^{l+y, \bar{l}+y}.$$

Иными словами, мы полагаем по определению $\partial_y := \partial_l + \partial_{\bar{l}}$, так что оператор сдвига e^{∂_y} действует на τ -функцию, сдвигая l и $\bar{l}$ одновременно:

$$e^{\partial_y} \tau_u^{l, \bar{l}} = \tau_u^{l+1, \bar{l}+1} e^{\partial_y}.$$

Введем следующие разностные операторы с 2×2 -матричными коэффициентами:

$$L_n(l, \bar{l}) = \begin{pmatrix} e^{\partial_y} + \nu \frac{\tau_n^{l, \bar{l}} \tau_{n+1}^{l+1, \bar{l}}}{\tau_n^{l+1, \bar{l}} \tau_{n+1}^{l, \bar{l}}} + \mu \frac{\tau_{n+1}^{l+1, \bar{l}+1} \tau_{n-1}^{l+1, \bar{l}}}{\tau_n^{l+1, \bar{l}+1} \tau_n^{l+1, \bar{l}}} & -\mu \nu \frac{\tau_{n+1}^{l+1, \bar{l}+1}}{\tau_n^{l+1, \bar{l}+1}} \\ \frac{\tau_n^{l, \bar{l}}}{\tau_{n+1}^{l, \bar{l}}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

$$M_n(l, \bar{l}) = \begin{pmatrix} \nu & -\mu \nu \frac{\tau_{n+1}^{l, \bar{l}+1}}{\tau_n^{l, \bar{l}+1}} \\ \frac{\tau_{n-1}^{l+1, \bar{l}+1}}{\tau_n^{l+1, \bar{l}+1}} & -e^{\partial_y} - \mu \frac{\tau_{n+1}^{l, \bar{l}+1} \tau_{n-1}^{l+1, \bar{l}+1}}{\tau_n^{l, \bar{l}+1} \tau_n^{l+1, \bar{l}+1}} \end{pmatrix},$$

где для краткости использованы обозначения $\mu \equiv \lambda_2^{01}$, $\nu \equiv \lambda_3^{01}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Матричное дискретное уравнение Захарова–Шабата

$$L_n(l, \bar{l}+1)M_n(l, \bar{l}) = M_{n+1}(l, \bar{l})L_n(l, \bar{l}) \quad (4.24)$$

эквивалентно билинейному соотношению

$$\tau_n^{l, \bar{l}+1} \tau_n^{l+1, \bar{l}} - H_n(l, \bar{l}) \tau_n^{l, \bar{l}} \tau_n^{l+1, \bar{l}+1} = (\mu/\nu) \tau_{n+1}^{l, \bar{l}+1} \tau_{n-1}^{l+1, \bar{l}}, \quad (4.25)$$

где функция $H_n(l, \bar{l})$ периодична по n с периодом 1: $H_{n+1}(l, \bar{l}) = H_n(l, \bar{l})$.

Это билинейное уравнение совпадает с (4.14). Мы опускаем доказательство, поскольку оно состоит в прямом вычислении и абсолютно банально после того, как выписана $(L-M)$ -пара. Систематический способ вывода матричных M -операторов из скалярных дается в главе 5.

Как и в теореме 4.1, выполнение условий нулевой кривизны для всех возможных выборов (составного) базисного потока приводит к билинейному уравнению с фиксированной постоянной H . Оно имеет вид (2.11).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. В 2ЦТ-интерпретации оператор M_n порождает эволюцию по дискретной переменной светового конуса $\bar{l}$, а L_n порождает сдвиг вдоль n -решетки. В нашей схеме как M_n , так и L_n являются “ M -операторами”, а не “ L -операторами”. Мы пишем L_n в соответствии с традицией, которая восходит к одномерной цепочке Тоды, где предполагается некоторая редукция.

Полезно сравнить это представление с непрерывной версией. Она дает представление нулевой кривизны для 2ЦТ, в котором в качестве базисного взят составной непрерывный поток, задаваемый векторным полем $\partial_y := \partial_{t_1} + \partial_{\bar{t}_1}$ в пространстве времен (см. гл. 3). Такое представление естественным образом возникает при вложении 2ЦТ в 2-компонентную иерархию КП. Уравнение Захарова–Шабата

$$\partial_{\bar{t}_1} L_n = M_{n+1} L_n - L_n M_n, \quad (4.26)$$

где

$$L_n = \begin{pmatrix} \partial_y - \partial_{t_1} \left(\log \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} \right) & -\frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} \\ \frac{\tau_n}{\tau_{n+1}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.27)$$

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} \\ -\frac{\tau_{n-1}}{\tau_n} & \partial_y \end{pmatrix},$$

дает уравнение 2ЦТ в билинейной форме:

$$\partial_{t_1} \partial_{\bar{t}_1} \log \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} = \frac{\tau_{n+1} \tau_{n-1}}{\tau_n^2} - \frac{\tau_{n+2} \tau_n}{\tau_{n+1}^2}. \quad (4.28)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Одномерная цепочка Тоды (1ЦТ) — это редукция 2ЦТ, в которой τ_n не зависит от $t_1 + \bar{t}_1$, т.е. ∂_y коммутирует с τ_n . Тем самым ∂_y в этом случае можно рассматривать как c -число. Отождествляя его со спектральным параметром, мы узнаем в (4.27) стандартную $(L-M)$ -пару для 1ЦТ, реализованную 2×2 -матрицами, зависящими от спектрального параметра (см., например, [23]).

5. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ХИРОТЫ

Условия нулевой кривизны эквивалентны совместности некоторой переопределенной системы линейных разностных уравнений на “волновую функцию” ψ . Эти линейные уравнения называются *вспомогательными линейными задачами* (ВЛЗ). Они играют очень важную роль в теории. Решения ВЛЗ несут полную информацию о нелинейных уравнениях. Все свойства последних могут быть сформулированы в терминах ВЛЗ, что и означает их “линеаризацию”.

В соответствии с разнообразием представлений нулевой кривизны существует много разных типов ВЛЗ. Эта глава посвящена изучению наиболее важных примеров.

Мы начнем со скалярных линейных задач, связанных с M -операторами (4.15), (4.16) для элементарных дискретных потоков, примыкающих к базисному. Они представляют собой линейные разностные уравнения первого порядка, коэффициентные функции которых выражаются через τ -функцию. Их общее формальное решение специального вида называется (формальной) функцией Бейкера–Ахиезера. Она зависит от некоторого спектрального параметра. Функции Бейкера–Ахиезера — это абстрактные аналоги блоховских решений. Формула для функции Бейкера–Ахиезера в терминах τ -функции была впервые предложена в [24]. Решения ВЛЗ общего вида можно строить как линейные комбинации функций Бейкера–Ахиезера с различными спектральными параметрами. Аналогичным образом вводится двойственная функция Бейкера–Ахиезера, которая является формальным решением линейных задач для сопряженных операторов.

Пусть дано какое-либо решение ВЛЗ; оно определяет некоторое преобразование Беклунда. Более того, “двойственность” между коэффициентными функциями и решениями ВЛЗ позволяет рассмотреть цепочку последовательных преобразований Беклунда и тем самым определить “беклундовский поток”. Мы изучим два типа таких потоков. Будет показано, что в частном случае, когда в качестве исходного решения ВЛЗ выбрана функция Бейкера–Ахиезера, беклундовские потоки можно отождествить с элементарными дискретными потоками, примыкающими к базисному.

В постановке ВЛЗ имеется “калибровочная свобода”, которая полностью или частично устраняется выбором нормировки “волновой функции” ψ . В основном мы пользуемся калибровкой, в которой разностные линейные уравнения выглядят наиболее простым образом. Другой выбор — z_0 -калибровка — кратко обсуждается в разделе 5.4. В этой калибровке уравнения приобретают более симметричный вид ценой введения некоторой вспомогательной точки $z_0 \in \mathbb{C}$ и усложнения коэффициентных функций.

Рассмотрены также ВЛЗ для матричных M -операторов. На самом деле все матричные M -операторы выводятся из скалярных ВЛЗ. Фактически матричные линейные задачи получаются в результате перезаписи скалярных. Точнее, попытайтесь представить скалярные ВЛЗ в таком виде, чтобы роль базисного играл некоторый составной поток, мы придем к разностным операторам с матричными коэффициентами.

5.1. Скалярные линейные задачи

Из коммутативности M -операторов (4.8) следует, что они имеют общий набор собственных функций. Это эквивалентно тому, что разностные уравнения Захарова–Шабата

(4.9)–(4.11) для M -операторов означают совместность линейных задач

$$M_u^l \psi^{l,\bar{l}}(u) = \psi^{l+1,\bar{l}}(u), \quad (5.1)$$

$$\overline{M}^{\bar{l}} \psi^{l,\bar{l}}(u) = \psi^{l,\bar{l}+1}(u) \quad (5.2)$$

для любых элементарных дискретных потоков $l, \bar{l}$, примыкающих к u . Заметим, что “собственные значения” в правых частях, положенные равными 1, могут быть сделаны произвольными путем изменения нормировки функции ψ . Наш выбор в (5.1), (5.2) наиболее удобен в чисто разностном случае, но не пригоден для изучения непрерывного предела.

В более подробной записи уравнения (5.1), (5.2) имеют вид (см. (4.15), (4.16))

$$\psi^{l,\bar{l}}(u+1) - \lambda_3^{01} V^{l,\bar{l}}(u) \psi^{l,\bar{l}}(u) = \psi^{l+1,\bar{l}}(u), \quad (5.3)$$

$$\psi^{l,\bar{l}}(u) - \lambda_2^{01} C^{l,\bar{l}}(u) \psi^{l,\bar{l}}(u-1) = \psi^{l,\bar{l}+1}(u), \quad (5.4)$$

где

$$V^{l,\bar{l}}(u) := \frac{\tau_u^{l,\bar{l}} \tau_{u+1}^{l+1,\bar{l}}}{\tau_{u+1}^{l+1,\bar{l}} \tau_u^{l,\bar{l}}}, \quad (5.5)$$

$$C^{l,\bar{l}}(u) := \frac{\tau_{u+1}^{l,\bar{l}+1} \tau_{u-1}^{l,\bar{l}}}{\tau_u^{l,\bar{l}+1} \tau_u^{l,\bar{l}}}. \quad (5.6)$$

Эти формулы становятся более симметричными в терминах так называемой “ненормированной волновой функции”

$$\rho_u^{l,\bar{l}} = \psi^{l,\bar{l}}(u) \tau_u^{l,\bar{l}}. \quad (5.7)$$

Подставив (5.7) в (5.3), (5.4), получаем

$$\tau_u^{l+1,\bar{l}} \rho_{u+1}^{l,\bar{l}} - \lambda_3^{01} \tau_{u+1}^{l+1,\bar{l}} \rho_u^{l,\bar{l}} = \tau_{u+1}^{l,\bar{l}} \rho_u^{l+1,\bar{l}}, \quad (5.8)$$

$$\tau_u^{l,\bar{l}+1} \rho_u^{l,\bar{l}} - \lambda_2^{01} \tau_{u+1}^{l,\bar{l}+1} \rho_{u-1}^{l,\bar{l}} = \tau_u^{l,\bar{l}} \rho_u^{l,\bar{l}+1}. \quad (5.9)$$

Теперь покажем, что должным образом взятый непрерывный предел приводит к хорошо известным линейным задачам для 2ЦТ. Положим

$$\lambda_3 = \lambda_0 + \epsilon, \quad \lambda_2 = \lambda_1 + \bar{\epsilon}, \quad \epsilon, \bar{\epsilon} \rightarrow 0,$$

так что

$$e^{\partial_t} \rightarrow 1 - \epsilon \partial_{t_1}, \quad e^{\partial_{\bar{t}}} \rightarrow 1 - \bar{\epsilon} \partial_{\bar{t}_1}$$

в силу правила Мивы (3.3), примененного к дискретным потокам $\overrightarrow{\lambda_0 \lambda_3}, \overrightarrow{\lambda_1 \lambda_2}$, соответственно. Для извлечения гладкого непрерывного предела необходимо изменить нормировку ψ -функции, введя φ -функцию:

$$\varphi^{l,\bar{l}}(u) = (\lambda_0 - \lambda_3)^l \psi^{l,\bar{l}}(u). \quad (5.10)$$

Линейные задачи приобретают вид

$$\begin{aligned} (\lambda_0 - \lambda_3) \varphi^{l,\bar{l}}(u+1) - \lambda(\lambda_3 - \lambda_1) V^{l,\bar{l}}(u) \varphi^{l,\bar{l}}(u) &= \varphi^{l+1,\bar{l}}(u), \\ (\lambda_0 - \lambda_2) \varphi^{l,\bar{l}}(u) - \lambda(\lambda_2 - \lambda_1) C^{l,\bar{l}}(u) \varphi^{l,\bar{l}}(u-1) &= (\lambda_0 - \lambda_2) \varphi^{l,\bar{l}+1}(u), \end{aligned} \quad (5.11)$$

где $\lambda \equiv (\lambda_1 - \lambda_0)^{-1}$. При $\epsilon, \bar{\epsilon} \rightarrow 0$ мы имеем

$$\begin{cases} \partial_{t_1} \varphi(u) = \varphi(u+1) + \left(\lambda + \partial_{t_1} \log \frac{\tau_{u+1}}{\tau_u} \right) \varphi(u), \\ \partial_{\bar{t}_1} \varphi(u) = \lambda^2 \frac{\tau_{u+1} \tau_{u-1}}{\tau_u^2} \varphi(u-1). \end{cases} \quad (5.12)$$

Преобразование

$$\tau_u \rightarrow \lambda^{-u^2} e^{-\lambda u t_1} \tau_u$$

уничтожает константу λ , приводя эти уравнения к стандартному виду:

$$\begin{cases} \partial_{t_1} \varphi(u) = \varphi(u+1) + v(u) \varphi(u), \\ \partial_{\bar{t}_1} \varphi(u) = c(u) \varphi(u-1). \end{cases} \quad (5.13)$$

Здесь

$$v(u) = \partial_{t_1} \log \frac{\tau_{u+1}}{\tau_u}, \quad c(u) = \frac{\tau_{u+1} \tau_{u-1}}{\tau_u^2}$$

(чтобы не перегружать обозначения, мы здесь используем ту же самую букву для преобразованной функции). Уравнения Захарова–Шабата

$$[\partial_{t_1} - e^{\partial_u} - v(u), \partial_{\bar{t}_1} - c(u) e^{-\partial_u}] = 0$$

дают первое уравнение 2ЦТ в виде

$$\partial_{t_1} \partial_{\bar{t}_1} \log \frac{\tau_{u+1}}{\tau_u} = \frac{\tau_{u+1} \tau_{u-1}}{\tau_u^2} - \frac{\tau_{u+2} \tau_u}{\tau_{u+1}^2}. \quad (5.14)$$

Эти уравнения – непрерывные аналоги (4.11) и (4.19), соответственно.

5.2. Преобразования Беклунда

ВЛЗ в виде (5.8), (5.9) обладают замечательным свойством (см. [21]): они почти симметричны относительно перестановки τ и ρ . Тем самым на них можно смотреть как на линейные задачи для τ , совместность которых влечет некоторое билинейное уравнение для ρ . Оно опять оказывается уравнением Хироты и имеет точно такой же вид, как и для τ . В [21] этот факт был назван *двойственностью* между “потенциалом” τ и “волновой функцией” ρ . Эта двойственность лучше всего проявляется именно в полностью дискретизованном случае.

Более точно, переписав (5.3) и (5.4) как линейные уравнения для

$$\tilde{\psi}^{l, \bar{l}}(u) = \frac{\tau_{u+1}^{l+1, \bar{l}+1}}{\rho_{u+1}^{l+1, \bar{l}+1}} = \left(\psi^{l+1, \bar{l}+1}(u+1) \right)^{-1}$$

(см. (5.7)), получаем

$$(e^{-\partial_u} - \lambda_3^{01} \tilde{V}^{l, \bar{l}}(u)) \tilde{\psi}^{l, \bar{l}}(u) = \tilde{\psi}^{l-1, \bar{l}}(u), \quad (5.15)$$

$$(1 - \lambda_2^{01} \tilde{C}^{l, \bar{l}}(u+1) e^{\partial_u}) \tilde{\psi}^{l, \bar{l}}(u) = \tilde{\psi}^{l, \bar{l}-1}(u), \quad (5.16)$$

где $\tilde{V}$ и $\tilde{C}$ даются теми же формулами (5.5), (5.6) с заменой τ на ρ . Разностные операторы в левых частях сопряжены операторам (4.15), (4.16), в которых сделана замена $\tau \rightarrow \rho$. Формально сопряженный оператор определяется правилом $(f(u) e^{k \partial_u})^\dagger = e^{-k \partial_u} f(u)$. Отсюда следует, что условие совместности описывается теоремой 4.1 с ρ вместо τ .

Таким образом, найдя ρ по некоторому данному решению τ , мы получим другое решение уравнения Хироты. Это преобразование типа Беклунда, известное также как преобразование Дарбу или Беклунда–Дарбу. Достаточно полный анализ таких преобразований содержится в [25]. Билинейная форма преобразований Беклунда была предложена Хиротой в [5].

Указанную процедуру можно повторить, начиная на сей раз с ρ и, более того, рассмотреть цепочку последовательных преобразований такого типа. Для их нумерации естественно ввести новую дискретную переменную b и рассмотреть “поток” вдоль цепочки. Пусть $\tau_{u,b}^{l,\bar{l}}, \rho_{u,b}^{l,\bar{l}}$ будут τ и ρ на b -м шаге. Первый беклундовский поток задается отождествлением

$$\tau_{u,b+1}^{l,\bar{l}} = \rho_{u,b}^{l,\bar{l}}. \quad (5.17)$$

Это значит, что τ в следующий момент беклундовского времени b полагается равным решению ρ линейных задач (5.8), (5.9). Тогда эти линейные задачи сами становятся билинейными уравнениями для τ_b :

$$\tau_{u,b}^{l+1} \tau_{u+1,b+1}^l - \lambda_3^{01} \tau_{u+1,b}^{l+1} \tau_{u,b+1}^l - \tau_{u+1,b}^l \tau_{u,b+1}^{l+1} = 0, \quad (5.18)$$

$$\tau_{u,b}^{\bar{l}+1} \tau_{u+1,b+1}^{\bar{l}}(u) - \tau_{u,b}^{\bar{l}}(u) \tau_{u+1,b+1}^{\bar{l}+1} = \lambda_2^{01} \tau_{u+1,b}^{\bar{l}+1} \tau_{u-1,b+1}^{\bar{l}}. \quad (5.19)$$

Здесь $\bar{l}$ (соответственно l) в (5.18) (соответственно в (5.19)) опущено, поскольку везде одинаково.

Аналогичным образом можно ввести второй беклундовский поток (беклундовское время теперь обозначим через $\bar{b}$):

$$\tau_{u,\bar{b}+1}^{l,\bar{l}} = \rho_{u-1,\bar{b}}^{l,\bar{l}}. \quad (5.20)$$

Из (5.8), (5.9) имеем

$$\lambda_3^{01} \tau_{u,\bar{b}}^{l+1} \tau_{u,\bar{b}+1}^l + \tau_{u,\bar{b}}^l \tau_{u,\bar{b}+1}^{l+1} = \tau_{u+1,\bar{b}+1}^l \tau_{u-1,\bar{b}}^{l+1}, \quad (5.21)$$

$$\tau_{u,\bar{b}}^{\bar{l}} \tau_{u+1,\bar{b}+1}^{\bar{l}+1} - \tau_{u,\bar{b}}^{\bar{l}+1} \tau_{u+1,\bar{b}+1}^{\bar{l}} + \lambda_2^{01} \tau_{u+1,\bar{b}}^{\bar{l}+1} \tau_{u,\bar{b}+1}^{\bar{l}} = 0. \quad (5.22)$$

Мы немедленно узнаем в этих соотношениях различные формы уравнения Хироты. Отметим, что преобразование Дарбу было использовано в [26] для построения дискретной по времени версии цепочки Тоды.

Для беклундовских потоков тоже существует представление нулевой кривизны. Пусть ψ – некоторое решение ВЛЗ (5.3), (5.4); введем оператор

$$\mathcal{B}_u^b = e^{-\partial_b} \left(e^{\partial_u} - \frac{\psi(u+1)}{\psi(u)} \right). \quad (5.23)$$

Тогда уравнение (5.18) представляется как условие коммутативности $[\mathcal{B}_u^b, \mathcal{M}_u^l] = 0$. Аналогичный $\mathcal{B}$ -оператор имеется и для второго беклундовского потока.

5.3. Функции Бейкера–Ахиезера

Каждая из линейных задач (5.3), (5.4) – это разностное линейное уравнение первого порядка в двух измерениях. В предположении, что справедливы уравнения Хироты (4.20)–(4.22), мы сейчас построим 1-параметрическое семейство их решений специального вида. Они называются функциями Бейкера–Ахиезера и зависят от спектрального параметра $z \in \mathbb{C}$: $\psi(u) = \psi(u; z)$.

Рис. 10

Включим еще один элементарный поток, показанный на рис. 10 штриховой линией. Соответствующее время обозначим через p_z . Положим

$$\lambda_z^{\alpha\beta} = \frac{1}{z - \lambda_\alpha} - \frac{1}{\lambda_\beta - \lambda_\alpha}. \quad (5.24)$$

Отметим полезное тождество, которому удовлетворяют $\lambda_z^{\alpha\beta}$:

$$\lambda_z^{\alpha\beta} \lambda_z^{\beta\gamma} = \lambda_\alpha^{\beta\gamma} \lambda_z^{\alpha\gamma}. \quad (5.25)$$

Тогда, если 3-членное уравнение Хироты выполняется для троек (u, l, p_z) и $(u, \bar{l}, p_z)$ независимых переменных, то функция

$$\psi^{l, \bar{l}}(u; z) = (\lambda_z^{01})^u (\lambda_z^{03})^l \left(\frac{\lambda_z^{02}}{\lambda_z^{01}} \right)^{\bar{l}} \frac{\tau_{u, p_z+1}^{l, \bar{l}}}{\tau_{u, p_z}^{l, \bar{l}}} \Big|_{p_z=0} \quad (5.26)$$

является формальным решением обоих уравнений (5.3) и (5.4) при любом z . Действительно, после подстановки (5.26) в уравнение (5.3) оно превращается в (4.20) для тройки (u, l, p_z) , а (5.4) после этой подстановки превращается в (4.22) для тройки $(u, \bar{l}, p_z)$. Следовательно, новую метку z можно отождествить со спектральным параметром. Формула (5.26) для ψ -функции совпадает с “японской формулой” [15, 24], т.к. в силу (3.3) мы имеем

$$\frac{\tau_{u, p_z+1}^{l, \bar{l}}}{\tau_{u, p_z}^{l, \bar{l}}} \Big|_{p_z=0} = \frac{\tau_u^{l, \bar{l}}(-[z - \lambda_0])}{\tau_u^{l, \bar{l}}(0)}.$$

Общее решение ВЛЗ можно записать в виде

$$\psi(u) = \int d^2 z \mu(z) \psi(u; z) \quad (5.27)$$

с произвольной мерой $\mu(z)$ на комплексной плоскости, т.е. представить как линейную комбинацию функций Бейкера–Ахиезера с разными спектральными параметрами.

Отметим, что если в “ $\mathcal{B}$ -операторе” (5.23) в качестве ψ взять функцию Бейкера–Ахиезера, то он превратится в $\mathcal{M}$ -оператор. Действительно, формулу для $\mathcal{M}$ -оператора (4.15) можно переписать в виде

$$M_u^l = \lim_{z \rightarrow \lambda_3} \left(e^{\partial_u} - \frac{\psi(u+1; z)}{\psi(u; z)} \right). \quad (5.28)$$

Двойственная функция Бейкера–Ахиезера ψ^* определяется формулой

$$\psi^{*l,\bar{l}}(u; z) = (\lambda_z^{01})^{-u} (\lambda_z^{03})^{-l} \left(\frac{\lambda_z^{02}}{\lambda_z^{01}} \right)^{-\bar{l}} \frac{\tau_{u,p_z-1}^{l,\bar{l}}}{\tau_{u,p_z}^{l,\bar{l}}} \Big|_{p_z=0}. \quad (5.29)$$

Она удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} (M_u^l(u-1, l-1))^\dagger \psi^{*l}(u; z) &= \psi^{*l-1}(u; z), \\ (\overline{M}_u^{\bar{l}}(u-1, \bar{l}-1))^\dagger \psi^{*\bar{l}}(u; z) &= \psi^{*\bar{l}-1}(u; z), \end{aligned} \quad (5.30)$$

где разностные операторы формально сопряжены операторам (4.15), (4.16).

5.4. z_0 -Калибровка

Уравнения (5.3), (5.4) зависят от выбора нормировки ψ -функции. В самом деле, при домножении ψ на какую-нибудь заданную функцию форма уравнений, вообще говоря, меняется. Это есть проявление некоторой калибровочной свободы. Канонического способа фиксировать калибровку нет. Та калибровка (нормировка), которой мы пользовались до сих пор и будем использовать далее, наиболее экономна в том смысле, что ВЛЗ для дискретных потоков принимают простейшую возможную форму. В этом разделе мы обсудим другой выбор, который имеет свои преимущества.

Рис. 11

Эта более общая калибровка использует произвольную, но фиксированную вспомогательную точку $z_0 \in \mathbf{C}$, отличную от вершин графа потоков, в связи с чем мы назовем ее z_0 -калибровкой. Она определяется следующим условием нормировки функции Бейкера–Ахиезера $\Psi(u; z)$:

$$\Psi(u; z_0) = 1. \quad (5.31)$$

Это условие позволяет представить Ψ в виде

$$\Psi(u; z) = \frac{\psi(u; z)}{\psi(u; z_0)}$$

и переписать ВЛЗ (5.3), (5.4) в терминах Ψ . Мы имеем

$$(\lambda_{z_0}^{01} U(u, l) e^{\partial_u} - \lambda_{z_0}^{03} W(u, l) e^{\partial_l}) \Psi(u; z) = \lambda_3^{01} \Psi(u; z), \quad (5.32)$$

где

$$U(u, l) = \frac{\tau_{u, p_0}^{l+1} \tau_{u+1, p_0+1}^l}{\tau_{u, p_0+1}^l \tau_{u+1, p_0}^{l+1}}, \quad W(u, l) = \frac{\tau_{u, p_0+1}^{l+1} \tau_{u+1, p_0}^l}{\tau_{u, p_0+1}^l \tau_{u+1, p_0}^{l+1}}. \quad (5.33)$$

Общий рецепт написания таких уравнений должен быть ясен из сравнения с рис. 11. Пользуясь этим простым рецептом, можно написать аналогичные уравнения для любой пары потоков таких, что один из них базисный, а другой – левый примыкающий к нему.

Одно из преимуществ z_0 -калибровки заключается в том, что не надо отдельно заботиться о правых примыкающих потоках. Уравнения для них пишутся автоматически по тому же рецепту, стоит только изменить “ориентацию” базисного потока (т.е. взять в качестве базисного поток $\overrightarrow{\lambda_1 \lambda_0}$). Если мы хотим, чтобы все было выражено через одни и те же переменные, надо воспользоваться связями (3.1) ($u \rightarrow -u$) и (3.2) ($\bar{p}_0 \rightarrow p_0$). Подчеркнем, что уравнение (5.4) не может быть таким же способом получено из (5.3). Калибровка, в которой они написаны, в этом смысле несимметрична – для левых и правых примыкающих потоков нужны отдельные уравнения.

Функция Бейкера–Ахиезера в z_0 -калибровке, удовлетворяющая всем этим уравнениям, имеет вид

$$\Psi(u; z) = \prod_{\alpha\beta} \left(\frac{\lambda_z^{\alpha\beta}}{\lambda_{z_0}^{\alpha\beta}} \right)^{l_{\alpha\beta}} \frac{\tau_{p_0, p_z+1}}{\tau_{p_0+1, p_z}} \Big|_{p_0=p_z=0}. \quad (5.34)$$

Как обычно, τ -функции здесь зависят от всех остальных переменных как от параметров. В силу (5.25) вид нормировочного множителя обеспечивает выполнение свойств (3.1), (3.2).

Наша предыдущая “экономная” калибровка – это, грубо говоря, предельный случай z_0 -калибровки при $z_0 \rightarrow \lambda_0$. Однако этот предел сингулярен, и для придания ему смысла необходима регуляризация. В результате симметрия z_0 -калибровки оказывается нарушенной.

5.5. Двухкомпонентный формализм

Линейные уравнения (5.3), (5.4) можно привести к виду, в котором они превращаются в разностные уравнения для двухкомпонентной вектор-функции. Условие их совместности есть матричное уравнение Захарова–Шабата из раздела 4.3.

Здесь мы используем введенные там обозначения и соответственно положим $\psi_n \equiv \psi(n)$, $V_n^{l, \bar{l}} \equiv V^{l, \bar{l}}(n)$, $C_n^{l, \bar{l}} \equiv C^{l, \bar{l}}(n)$. Выпишем уравнения (5.3), (5.4) в этих обозначениях:

$$\psi_n^{l+1, \bar{l}} = \psi_{n+1}^{l, \bar{l}} - \nu V_n^{l, \bar{l}} \psi_n^{l, \bar{l}}, \quad (5.35)$$

$$\psi_n^{l, \bar{l}+1} = \psi_n^{l, \bar{l}} - \mu C_n^{l, \bar{l}} \psi_{n-1}^{l, \bar{l}}. \quad (5.36)$$

С их помощью нетрудно найти, как вектор

$$\begin{pmatrix} \psi_n^{l, \bar{l}} \\ \psi_{n-1}^{l, \bar{l}} \end{pmatrix} \quad (5.37)$$

преобразуется при сдвиге n или $\bar{l}$.

Из (5.35), (5.36) мы имеем, например (здесь $\partial_y \equiv \partial_l + \partial_{\bar{l}}$),

$$\begin{aligned}\psi_{n+1}^{l,\bar{l}} &= \psi_n^{l+1,\bar{l}} + \nu V_n^{l,\bar{l}} \psi_n^{l,\bar{l}} = \psi_n^{l+1,\bar{l}+1} + \mu C_n^{l+1,\bar{l}} \psi_{n-1}^{l+1,\bar{l}} + \nu V_n^{l,\bar{l}} \psi_n^{l,\bar{l}} = \\ &= (e^{\partial_y} + \nu V_n^{l,\bar{l}}) \psi_n^{l,\bar{l}} + \mu C_n^{l+1,\bar{l}} (\psi_n^{l,\bar{l}} - \nu V_{n-1}^{l,\bar{l}} \psi_{n-1}^{l,\bar{l}}) = \\ &= (e^{\partial_y} + \nu V_n^{l,\bar{l}} + \mu C_n^{l+1,\bar{l}}) \psi_n^{l,\bar{l}} - \mu \nu C_n^{l+1,\bar{l}} V_{n-1}^{l,\bar{l}} \psi_{n-1}^{l,\bar{l}}.\end{aligned}\quad (5.38)$$

Продолжая в том же духе, получаем

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \psi_{n+1}^{l,\bar{l}} \\ \psi_n^{l,\bar{l}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{\partial_y} + \nu V_n^{l,\bar{l}} + \mu C_n^{l+1,\bar{l}} & -\mu \nu C_n^{l+1,\bar{l}} V_{n-1}^{l,\bar{l}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_n^{l,\bar{l}} \\ \psi_{n-1}^{l,\bar{l}} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \psi_n^{l,\bar{l}+1} \\ \psi_{n-1}^{l,\bar{l}+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -\mu C_n^{l,\bar{l}} \\ (\nu V_{n-1}^{l,\bar{l}+1})^{-1} & -(\nu V_{n-1}^{l,\bar{l}+1})^{-1} (e^{\partial_y} + \mu C_n^{l,\bar{l}}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_n^{l,\bar{l}} \\ \psi_{n-1}^{l,\bar{l}} \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (5.39)$$

Операторы в правых частях образуют матричную $(L-M)$ -пару для уравнения Хироты, которая отличается от (4.23) диагональным калибровочным преобразованием. Вспомним, что функция Бейкера–Ахиезера (5.26) содержит в знаменателе τ_n ; при этом компоненты вектора (5.37) имеют разные знаменатели. В двухкомпонентном формализме обычно требуют, чтобы эти знаменатели были у обеих компонент одинаковы. Это условие частично фиксирует калибровку.

Таким образом, вводя вектор (ψ_n, χ_n) , где

$$\chi_n^{l,\bar{l}} = \frac{\tau_{n-1}^{l,\bar{l}}}{\tau_n^{l,\bar{l}}} \psi_{n-1}^{l,\bar{l}}, \quad (5.40)$$

мы можем переписать (5.39) в виде

$$L_n(l, \bar{l}) \begin{pmatrix} \psi_n^{l,\bar{l}} \\ \chi_n^{l,\bar{l}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{n+1}^{l,\bar{l}} \\ \chi_{n+1}^{l,\bar{l}} \end{pmatrix}, \quad (5.41)$$

$$M_n(l, \bar{l}) \begin{pmatrix} \psi_n^{l,\bar{l}+1} \\ \chi_n^{l,\bar{l}+1} \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} \psi_{n+1}^{l,\bar{l}+1} \\ \chi_{n+1}^{l,\bar{l}+1} \end{pmatrix}, \quad (5.42)$$

где L - и M -операторы совпадают с (4.23).

Из (5.41), (5.42) вытекают некоторые полезные разностные уравнения для $\psi_n^{l,\bar{l}}$. Исключая χ_n из (5.41), находим

$$\psi_n^{l+1,\bar{l}+1} = \psi_{n+1}^{l,\bar{l}} - \left(\nu \frac{\tau_n^{l,\bar{l}} \tau_{n+1}^{l+1,\bar{l}}}{\tau_{n+1}^{l+1,\bar{l}} \tau_n^{l,\bar{l}}} + \mu \frac{\tau_{n-1}^{l+1,\bar{l}} \tau_{n+1}^{l+1,\bar{l}+1}}{\tau_n^{l+1,\bar{l}+1} \tau_{n+1}^{l+1,\bar{l}}} \right) \psi_n^{l,\bar{l}} + \mu \nu \frac{\tau_{n-1}^{l,\bar{l}} \tau_{n+1}^{l+1,\bar{l}+1}}{\tau_n^{l,\bar{l}} \tau_{n+1}^{l+1,\bar{l}+1}} \psi_{n-1}^{l,\bar{l}}. \quad (5.43)$$

Аналогично, исключая χ_n из (5.42) и используя уравнение Хироты (2.11), получим 4-членное уравнение на ψ_n :

$$\psi_n^{l+1,\bar{l}+1} - \psi_{n+1}^{l+1,\bar{l}} = -\nu \frac{\tau_n^{l,\bar{l}+1} \tau_{n+1}^{l+1,\bar{l}+1}}{\tau_{n+1}^{l+1,\bar{l}+1} \tau_n^{l,\bar{l}+1}} \psi_n^{l,\bar{l}+1} + (\nu - \mu) \frac{\tau_n^{l,\bar{l}} \tau_{n+1}^{l+1,\bar{l}+1}}{\tau_{n+1}^{l+1,\bar{l}} \tau_n^{l,\bar{l}+1}} \psi_n^{l,\bar{l}}. \quad (5.44)$$

Здесь подразумевается, что $\tau_n^{l,\bar{l}}$ удовлетворяет уравнению Хироты (4.22) в соответствующих обозначениях. Уравнение (5.44) возникнет также в следующей главе.

Непрерывный аналог уравнения (5.43) выглядит следующим образом:

$$(\partial_{t_1} + \partial_{\bar{t}_1})\varphi_n = \varphi_{n+1} + \left(\partial_{t_1} \log \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} \right) \varphi_n + \frac{\tau_{n-1}\tau_{n+1}}{\tau_n^2} \varphi_{n-1}, \quad (5.45)$$

что легко видеть из (5.12) (здесь мы пишем φ_n вместо $\varphi(u)$). Это дискретное нестационарное уравнение Шредингера. Уравнение (5.44) в непрерывном пределе имеет вид

$$\partial_{t_1} \partial_{\bar{t}_1} \varphi_n - \left(\partial_{t_1} \log \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} \right) \partial_{\bar{t}_1} \varphi_n - \frac{\tau_{n-1}\tau_{n+1}}{\tau_n^2} \varphi_n = 0. \quad (5.46)$$

Это двумерное уравнение Шредингера в магнитном поле. Его квазипериодические решения изучались в [27] алгебро-геометрическими методами. Соответствующая теория для разностного двумерного уравнения, аналогичного (5.44), была предложена в [28].

6. ПСЕВДОРАЗНОСТНЫЕ M -ОПЕРАТОРЫ

В этой главе мы предьявим M -операторы общего вида, которые удовлетворяют условиям типа нулевой кривизны с M -операторами для элементарных дискретных потоков, примыкающих к базисному.

Взяв за основу скалярные ВЛЗ для пары левого и правого примыкающих потоков, не трудно найти M -операторы для *непримыкающих потоков*. Идея заключается в том, чтобы исключить базисный поток из соответствующей пары линейных уравнений. Тогда, скажем, правый примыкающий поток запишется целиком в терминах левого примыкающего. Выбрав этот последний в качестве базисного, мы и получим M -оператор для *произвольного* элементарного дискретного потока, реализованный как разностный оператор по любому другому (элементарному дискретному) потоку, рассматриваемому как базисный. В общем случае мы получим псевдоразностные операторы, т.е. операторы, содержащие отрицательные степени разностных операторов первого порядка.

Эту конструкцию можно распространить на более общие операторы, которые порождают некоторые новые потоки, коммутирующие с элементарными дискретными. Мы называем их присоединенными потоками. Псевдоразностные M -операторы для них построены в разделе 6.2 с помощью двух произвольных (и, вообще говоря, независимых) решений ψ , ψ^* ВЛЗ и сопряженных ВЛЗ.

6.1. M -операторы для произвольных элементарных дискретных потоков и линейные задачи для них

Преобразовав уравнения (5.3), (5.4), можно найти M -операторы для произвольных элементарных дискретных потоков, не обязательно примыкающих к базисному. Для этого достаточно, исключив сдвиги по u , выбрать l в качестве нового базисного потока.

Из (5.3) мы имеем

$$\psi^{l,\bar{l}}(u+1) = \psi^{l+1,\bar{l}}(u) + \lambda_3^{01} V^{l,\bar{l}}(u) \psi^{l,\bar{l}}(u).$$

Подставляя это вместо $\psi^{l,\bar{l}}(u+1)$ и $\psi^{l,\bar{l}+1}(u+1)$ в уравнение (5.4), переписанное в виде

$$\psi^{l,\bar{l}}(u+1) - \psi^{l,\bar{l}+1}(u+1) = \lambda_2^{01} C^{l,\bar{l}}(u+1) \psi^{l,\bar{l}}(u),$$

мы получим

$$\psi^{l+1,\bar{l}+1}(u) + \lambda_3^{01} V^{l,\bar{l}+1}(u) \psi^{l,\bar{l}+1}(u) = \psi^{l+1,\bar{l}}(u) + (\lambda_3^{01} V^{l,\bar{l}}(u) - \lambda_2^{01} C^{l,\bar{l}}(u+1)) \psi^{l,\bar{l}}(u).$$

Используя затем (4.22), находим

$$\lambda_3^{01} V^{l,\bar{l}}(u) - \lambda_2^{01} C^{l,\bar{l}}(u+1) = \lambda_3^{01} V^{l,\bar{l}+1}(u) - \lambda_2^{01} C^{l+1,\bar{l}}(u) = \lambda_3^{01} \frac{\tau_u^{l,\bar{l}} \tau_{u+1}^{l+1,\bar{l}+1}}{\tau_{u+1}^{l+1,\bar{l}} \tau_{u+1}^{l,\bar{l}+1}}. \quad (6.1)$$

Отметим, что первое равенство следует уже из уравнения (4.11), несколько более слабого, чем (4.22).

Таким образом, мы пришли к выводу, что ψ удовлетворяет следующему 4-членному линейному уравнению:

$$\psi^{l+1,\bar{l}+1}(u) - \psi^{l+1,\bar{l}}(u) = \lambda_1^{03} \frac{\tau_u^{l,\bar{l}+1} \tau_{u+1}^{l+1,\bar{l}+1}}{\tau_{u+1}^{l+1,\bar{l}+1} \tau_{u+1}^{l,\bar{l}+1}} \psi^{l,\bar{l}+1}(u) + \lambda_3^{02} \frac{\tau_u^{l,\bar{l}} \tau_{u+1}^{l+1,\bar{l}+1}}{\tau_u^{l+1,\bar{l}} \tau_{u+1}^{l,\bar{l}+1}} \psi^{l,\bar{l}}(u), \quad (6.2)$$

в котором мы узнаем уравнение (5.43) из раздела 5.5.

Соотношение (6.1) позволяет переписать (6.2) в виде

$$\frac{\tau_{u-1}^{l+1,\bar{l}}}{\tau_{u-1}^{l+1,\bar{l}}} \tilde{\Delta}_l \frac{\tau_u^{l,\bar{l}+1}}{\tau_{u+1}^{l,\bar{l}+1}} \bar{\Delta}_{\bar{l}} \psi^{l,\bar{l}}(u) + \lambda_2^{01} \psi^{l,\bar{l}}(u) = 0, \quad (6.3)$$

где

$$\tilde{\Delta}_l \equiv e^{\partial_l} + \lambda_3^{01}, \quad \bar{\Delta}_{\bar{l}} \equiv e^{\partial_{\bar{l}}} - 1. \quad (6.4)$$

В этой форме оно похоже на двумерное дискретное уравнение Лапласа в искривленном пространстве. Оно может быть переписано также в виде

$$\left(\bar{\Delta}_{\bar{l}} + \lambda_2^{01} \frac{\tau_{u+1}^{l,\bar{l}+1}}{\tau_u^{l,\bar{l}+1}} \tilde{\Delta}_l^{-1} \frac{\tau_{u-1}^{l+1,\bar{l}}}{\tau_{u+1}^{l+1,\bar{l}}} \right) \psi^{l,\bar{l}}(u) = 0, \quad (6.5)$$

или окончательно

$$\psi^{l,\bar{l}+1}(u) = \left(1 - \frac{\tau_{u+1}^{l,\bar{l}+1}}{\tau_u^{l,\bar{l}+1}} \frac{\lambda_2^{01}}{e^{\partial_l} + \lambda_3^{01}} \frac{\tau_{u-1}^{l+1,\bar{l}}}{\tau_{u+1}^{l+1,\bar{l}}} \right) \psi^{l,\bar{l}}(u). \quad (6.6)$$

Во избежание недоразумений подчеркнем, что псевдоразностный оператор внутри скобок действует на переменную l , а u входит как параметр. Этот оператор, реализованный как *псевдоразностный оператор по l* , и надо рассматривать в качестве M -оператора, генерирующего поток $\bar{l}$ (рис. 12). Иными словами, считая l базисной переменной, мы тем самым нашли M -оператор для произвольного потока $\bar{l}$, не примыкающего к l .

Рис. 12

В пределе, когда точки λ_0, λ_1 сливаются, поток $\bar{l}$ становится левым примыкающим к l . Покажем, как соответствующий разностный M -оператор восстанавливается из правой части уравнения (6.6). Положим $\lambda_1 - \lambda_0 = \epsilon$, $\epsilon \rightarrow 0$. Имеем при $\epsilon \rightarrow 0$

$$\frac{\lambda_2^{01}}{e^{\partial_l} + \lambda_3^{01}} \rightarrow 1 + \epsilon(e^{\partial_l} + \lambda_3^{02}) + O(\epsilon^2),$$

$$\frac{\tau_{u \pm 1}^{l, \bar{l}}}{\tau_u^{l, \bar{l}}} \rightarrow 1 + O(\epsilon),$$

$$\frac{\tau_{u+1}^{l, \bar{l}+1} \tau_{u-1}^{l+1, \bar{l}}}{\tau_u^{l+1, \bar{l}} \tau_u^{l, \bar{l}+1}} \rightarrow 1 - \epsilon \lambda_3^{02} \left(1 - \frac{\tau^{l, \bar{l}} \tau^{l+1, \bar{l}+1}}{\tau^{l+1, \bar{l}} \tau^{l, \bar{l}+1}} \right) + O(\epsilon^2)$$

(в последней строчке использовано уравнение (4.22)), так что наивный предел правой части (6.6) обращается в ноль. Однако надо учесть изменение нормировки ψ -функции, которое неявно подразумевается при отождествлении $\bar{l}$ с потоком, левым примыкающим к l . Это достигается заменой $\psi^{\bar{l}} \rightarrow (-\epsilon)^{\bar{l}} \psi^{\bar{l}}$, так что в пределе воспроизводится правильный M -оператор

$$M_l^{\bar{l}} = e^{\partial_l} - \lambda_2^{03} \frac{\tau^{l, \bar{l}} \tau^{l+1, \bar{l}+1}}{\tau^{l+1, \bar{l}} \tau^{l, \bar{l}+1}}.$$

Приведем непрерывные аналоги этих формул. Вместо того чтобы брать предел непосредственно, гораздо проще с самого начала воспользоваться непрерывной версией (5.13) линейных задач. С помощью (5.14) находим аналог уравнения (6.2):

$$\partial_{t_1} \partial_{\bar{t}_1} \varphi(u) - v(u) \partial_{\bar{t}_1} \varphi(u) - c(u) \varphi(u) = 0, \quad (6.7)$$

а также уравнений (6.3) и (6.6), соответственно:

$$\frac{\tau_u}{\tau_{u-1}} \partial_{t_1} \frac{\tau_u}{\tau_{u+1}} \partial_{\bar{t}_1} \varphi(u) = \varphi(u), \quad (6.8)$$

$$\left(\partial_{\bar{t}_1} - \frac{\tau_{u+1}}{\tau_u} \partial_{t_1}^{-1} \frac{\tau_{u-1}}{\tau_u} \right) \varphi(u) = 0. \quad (6.9)$$

6.2. Присоединенные потоки

Наконец, мы обобщим предложенную выше конструкцию, чтобы ввести более общие потоки, которые назовем *присоединенными*. Рассмотрим псевдоразностный оператор

$$A_l^a = 1 + w \Delta_l^{-1} w^*, \quad \Delta_l = e^{\partial_l} - 1, \quad (6.10)$$

где w, w^* — пока еще не определенные функции всех участвующих в задаче переменных. Обозначим через a время, соответствующее присоединенному потоку, который сейчас будем определять. В этом разделе роль базисной переменной будет играть l . M -оператор для элементарного дискретного потока p (см. рис. 13) имеет стандартный вид

$$M_l^p = e^{\partial_l} - \lambda_p \frac{\tau_l^p \tau_{l+1}^{p+1}}{\tau_{l+1}^p \tau_l^{p+1}}, \quad \lambda_p \equiv \lambda_4^{03}. \quad (6.11)$$

Рис. 13

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Условие коммутации*

$$[e^{-\partial_a} A_l^a, e^{-\partial_p} M_l^p] = 0 \quad (6.12)$$

выполняется, только если w и w^* удовлетворяют линейным уравнениям

$$\begin{cases} (e^{\partial_l} + \lambda_p V_l^{p,a+1}) w_l^p = \omega w_l^{p+1}, \\ (e^{-\partial_l} + \lambda_p V_l^{p,a}) w_l^{*p+1} = \omega w_l^{*p}, \end{cases} \quad (6.13)$$

где

$$V_l^{p,a} \equiv \frac{\tau_l^{p,a} \tau_{l+1}^{p+1,a}}{\tau_{l+1}^{p,a} \tau_l^{p+1,a}}$$

и ω – произвольная константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в прямом вычислении. Уравнения (6.13) – необходимые условия обращения в нуль псевдоразностной части коммутатора. Вот промежуточные шаги этого вычисления. Уравнение (6.12), т.е.

$$(e^{\partial_l} - \lambda_p V_l^{p,a+1})(1 + w_l^p \Delta_l^{-1} w_l^{*p}) = (1 + w_l^{p+1} \Delta_l^{-1} w_l^{*p+1})(e^{\partial_l} - \lambda_p V_l^{p,a}),$$

после раскрытия скобок преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \lambda_p (V_l^{p,a+1} - V_l^{p,a}) + w_l^{p+1} w_{l-1}^{*p+1} - w_{l+1}^p w_l^{*p} = \\ & = (w_{l+1}^p - \lambda_p V_l^{p,a+1} w_l^p - \omega w_l^{p+1}) \Delta_l^{-1} w_l^{*p} - \\ & - w_l^{p+1} \Delta_l^{-1} (w_{l-1}^{*p+1} - \lambda_p V_l^{p,a} w_l^{*p+1} - \omega w_l^{*p}). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Поскольку левая часть заведомо не содержит отрицательных степеней Δ_l , правая часть должна быть равна нулю. Это и дает уравнения (6.13).

ВЛЗ для левого примыкающего p к потоку l (здесь базисному) и их сопряженные имеют вид (ср. с (5.3)):

$$\begin{cases} \psi^p(l+1) - \lambda_p V_l^p \psi^p(l) = \psi^{p+1}(l), \\ \psi^{*p}(l-1) - \lambda_p V_{l-1}^{p-1} \psi^{*p}(l) = \psi^{*p-1}(l). \end{cases} \quad (6.15)$$

Сравнив с (6.13), отождествляем

$$w_l^{p,a} = \psi^{p,a+1}(l), \quad w_l^{*p,a} = \psi^{*p,a}(l+1),$$

где ψ, ψ^* – произвольные решения линейных задач (6.15).

Оператор (6.10) после этого приобретает вид

$$A_l^a = 1 + \psi^{a+1}(l) \Delta_l^{-1} \psi^{*a}(l+1). \quad (6.16)$$

Условие коммутации (6.12) эквивалентно некоторому билинейному уравнению на $\tau_l^{p,a}$. Присоединенный поток a тем самым определяется двумя *произвольными* решениями ψ, ψ^* линейных задач (6.15). Для непрерывных иерархий псевдодифференциальные аналоги операторов (6.16) и соответствующие присоединенные потоки изучались в [29].

В качестве примера рассмотрим случай, когда ψ, ψ^* – функция Бейкера–Ахиезера $\psi(l; z)$ и двойственная к ней. Как и следовало ожидать, в этом случае воспроизводится уравнение (6.6). Из раздела 5.3 мы извлекаем следующие формулы для функции Бейкера–Ахиезера и двойственной к ней:

$$\psi^a(l; z) = \zeta^a (\lambda_z^{03})^l \frac{\tau_{p_z+1}^{l,a}}{\tau_{p_z}^{l,a}} \Big|_{p_z=0}, \quad \psi^{*a}(l; z) = \zeta^{-a} (\lambda_z^{03})^{-l} \frac{\tau_{p_z-1}^{l,a}}{\tau_{p_z}^{l,a}} \Big|_{p_z=0}. \quad (6.17)$$

Здесь ζ^a – некоторый нормировочный фактор, который будет зафиксирован чуть ниже, p_z – время, соответствующее потоку $\lambda_0 z$. Пусть $z \rightarrow \lambda_1$. В пределе p_z совпадает с u . Подставляя (6.17) с $\zeta = \lambda_z^{02}$ в (6.16), мы действительно получаем псевдоразностный оператор в правой части (6.6).

7. ОБ ИЕРАРХИЯХ БИЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Интегрируемые нелинейные уравнения в частных производных всегда можно включить в некоторую *бесконечную иерархию*. Бесконечный набор коммутирующих потоков порождает бесконечный набор эволюционных уравнений.

Иерархии разностных интегрируемых уравнений изучены не так хорошо. Прежде всего не вполне ясно, что следует называть “высшими дискретными потоками” в пространстве псевдоразностных операторов. Понимание этого необходимо для обобщения формализма Захарова–Шабата на высшие уравнения Хироты, известные в литературе [12, 30].

В этой связи имеются две “дополнительные” точки зрения. Во-первых, можно рассматривать само 3-членное уравнение Хироты (4.20) как аналог целой бесконечной иерархии. В этой интерпретации его следует трактовать как бесконечный набор уравнений (пронумерованных непрерывными метками λ_α) на функцию от бесконечного числа переменных $l_{\alpha\beta}$, ассоциированных с $\overrightarrow{\lambda_\alpha \lambda_\beta}$. Во-вторых, роль правильных аналогов высших непрерывных потоков могут играть составные дискретные потоки. Эта точка зрения оправдывается непрерывным пределом. В самом деле, любой высший непрерывный поток можно получить как предел составного дискретного потока со специально подобранными метками.

Цель этой главы – показать, каким образом можно совместить эти две разные точки зрения. Естественная гипотеза состоит в том, что N -членные “высшие” уравнения Хироты на функцию от N переменных являются следствиями основных 3-членных уравнений (4.20), рассматриваемых как *иераргия*. Последнее означает, что 3-членное уравнение предполагается выполненным для любой тройки, выбранной из N переменных. Эта гипотеза подтверждается детальным анализом случая 4-членного уравнения. Кроме того, предложено обобщение формализма Захарова–Шабата на этот случай.

7.1. Высшие уравнения иерархии

Высшие уравнения Хироты, известные в литературе [30], — это билинейные уравнения на функцию $\tau(l_1, \dots, l_N)$ от N переменных. Они имеют вид

$$\begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^{N-2} & \tau_1 \hat{\tau}_1 \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \dots & z_2^{N-2} & \tau_2 \hat{\tau}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z_N & z_N^2 & \dots & z_N^{N-2} & \tau_N \hat{\tau}_N \end{vmatrix} = 0, \quad (7.1)$$

где z_i — произвольные константы и

$$\begin{aligned} \tau_i &\equiv \tau(l_1, l_2, \dots, l_{i-1}, l_i + 1, l_{i+1}, \dots, l_N), \\ \hat{\tau}_i &\equiv \tau(l_1 + 1, l_2 + 1, \dots, l_{i-1} + 1, l_i, l_{i+1} + 1, \dots, l_N + 1). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Разлагая детерминант по последнему столбцу, можно записать это уравнение более компактно:

$$\sum_{j=1}^N \Lambda_j \tau_j \hat{\tau}_j = 0. \quad (7.3)$$

Константы Λ_j здесь подчинены единственному условию

$$\sum_{j=1}^N \Lambda_j = 0.$$

При $N = 3$ мы получаем обычное трехчленное уравнение Хироты, в котором z_i становятся некоторыми рациональными функциями от λ_α . Как и в том случае, переменные l_i будут отождествлены с элементарными дискретными потоками.

Преобразование

$$\tau(l_1, \dots, l_N) \rightarrow \exp \left[\frac{1}{2N-4} \sum_{k=1}^N \log \Lambda_k \left(\sum_{j=1, j \neq k}^N l_j \right)^2 \right] \tau(l_1, \dots, x_N) \quad (7.4)$$

приводит уравнение (7.3) к канонической форме, т.е.

$$\sum_{j=1}^N \tau_j \hat{\tau}_j = 0, \quad (7.5)$$

которая не содержит свободных параметров.

В обозначениях Хироты эти уравнения приобретают вид

$$\left(\sum_{j=1}^N \Lambda_j \exp(D_{x_j}) \right) \tau \cdot \tau = 0, \quad (7.6)$$

что достигается заменой

$$x_j = -l_j + \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N l_i, \quad (7.7)$$

обобщающей (2.15).

7.2. Представление нулевой кривизны для составных потоков

Мы покажем, что условие нулевой кривизны, надлежащим образом обобщенное для составных дискретных потоков, введенных в разделе 3.1, приводит к высшим билинейным уравнениям вида (7.1). Высшие M -операторы строятся при этом как произведения элементарных.

В этом разделе мы будем заниматься анализом следующего графа потоков:

Рис. 14

Возьмем u в качестве базисной переменной. Остальные обозначения ясны из рисунка. Для простоты мы рассматриваем только левые примыкающие потоки. Переформулировка в терминах правых примыкающих не составляет труда.

Руководствуясь определением составных дискретных потоков (см. раздел 3.1), введем “высший” M -оператор M_u^{qr} , порождающий эволюцию вдоль составного потока, задаваемого парой векторов $\lambda_0 \lambda_2, \lambda_0 \lambda_3$, как произведение элементарных M -операторов вида (4.15):

$$M_u^{qr} = e^{\partial_r} M_u^q e^{-\partial_r} M_u^r. \quad (7.8)$$

Полезно также переписать это равенство, явно указав аргументы:

$$M_u^{qr}(q, r) = M_u^q(q, r+1) M_u^r(q, r). \quad (7.9)$$

В силу условия нулевой кривизны для элементарных потоков имеем $M_u^{qr} = M_u^{rq}$. Совместность составного потока с элементарным $\lambda_0 \lambda_4$ запишется тогда следующим образом:

$$M_u^p(p, q+1, r+1) M_u^{qr}(p, q, r) = M_u^{qr}(p+1, q, r) M_u^p(p, q, r). \quad (7.10)$$

Ясно, что это условие нулевой кривизны – тривиальное следствие условия (4.9) и определения (7.8), если уравнение (4.9) выполняется для любой пары переменных из тройки p, q, r .

Несколько слов об обозначениях, используемых далее в этом разделе. Для простоты мы положим

$$\lambda_2^{01} = \lambda_r, \quad \lambda_3^{01} = \lambda_q, \quad \lambda_4^{01} = \lambda_p.$$

Поскольку нам предстоит работать с довольно большим числом переменных, удобно выделить базисную переменную, записывая ее в скобках в аргументе τ -функции: $\tau_u \rightarrow \tau(u)$. Другие аргументы τ -функции будут записываться в виде индексов, как и раньше. Кроме того, в этом разделе мы широко пользуемся обозначением

$$V_u^{(p)}(p, q, r) = \frac{\tau^{p,q,r}(u) \tau^{p+1,q,r}(u+1)}{\tau^{p+1,q,r}(u) \tau^{p,q,r}(u+1)}. \quad (7.11)$$

Теперь можно заняться уравнением (7.10) вплотную. Запишем его в виде

$$\begin{aligned} (e^{\partial_u} - \lambda_p V_u^{(p)}(p, q+1, r+1))(e^{\partial_u} - \lambda_q V_u^{(q)}(p, q, r+1))(e^{\partial_u} - \lambda_r V_u^{(r)}(p, q, r)) = \\ = (e^{\partial_u} - \lambda_q V_u^{(q)}(p+1, q, r+1))(e^{\partial_u} - \lambda_r V_u^{(r)}(p+1, q, r))(e^{\partial_u} - \lambda_p V_u^{(p)}(p, q, r)). \end{aligned} \quad (7.12)$$

Сравнение коэффициентов перед $e^{2\partial_u}$ дает

$$\begin{aligned} \lambda_p V_u^{(p)}(p, q+1, r+1) + \lambda_q V_{u+1}^{(q)}(p, q, r+1) + \lambda_r V_{u+2}^{(r)}(p, q, r) = \\ = \lambda_p V_{u+2}^{(p)}(p, q, r) + \lambda_q V_u^{(q)}(p+1, q, r+1) + \lambda_r V_{u+1}^{(r)}(p+1, q, r). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Это соотношение – прямое следствие трехчленного уравнения Хироты. Чтобы это увидеть, вспомним (4.18) из доказательства предложения 4.1. В наших новых обозначениях оно примет вид

$$\lambda_p V_u^{(p)}(p, q+1, r+1) + \lambda_q V_{u+1}^{(q)}(p, q, r+1) = \lambda_p V_{u+1}^{(p)}(p, q, r+1) + \lambda_q V_u^{(q)}(p+1, q, r+1). \quad (7.14)$$

Здесь $r+1$ входит как параметр. Аналогичное уравнение можно написать для пары p, r ; теперь q войдет в него как параметр:

$$\lambda_p V_{u+1}^{(p)}(p, q, r+1) + \lambda_r V_{u+2}^{(r)}(p, q, r) = \lambda_p V_{u+2}^{(p)}(p, q, r) + \lambda_r V_{u+1}^{(r)}(p+1, q, r). \quad (7.15)$$

Сложив эти уравнения, получим (7.13).

Сравнение коэффициентов при e^{∂_u} дает

$$\begin{aligned} \lambda_p \lambda_q V_u^{(q)}(p, q, r+1) V_u^{(p)}(p, q+1, r+1) + \lambda_q \lambda_r V_{u+1}^{(r)}(p, q, r) V_{u+1}^{(q)}(p, q, r+1) + \\ + \lambda_p \lambda_r V_u^{(p)}(p, q+1, r+1) V_{u+1}^{(r)}(p, q, r) = \\ = \lambda_p \lambda_q V_u^{(q)}(p+1, q, r+1) V_{u+1}^{(p)}(p, q, r) + \lambda_q \lambda_r V_u^{(r)}(p+1, q, r) V_u^{(q)}(p+1, q, r+1) + \\ + \lambda_p \lambda_r V_{u+1}^{(p)}(p, q, r+1) V_{u+1}^{(r)}(p, q, r). \end{aligned} \quad (7.16)$$

Точно таким же образом можно показать, что это равенство тоже следует из уравнения Хироты. Конечно, этот результат был совершенно очевиден, поскольку условия нулевой кривизны (4.9) выполняются для обоих элементарных M -операторов в произведении (7.9).

Тем не менее из уравнений (7.14), (7.15), (7.16) можно извлечь следствие, которое не очевидно с самого начала. Оказывается, из них вытекает одно из *высших уравнений Хироты* (а именно, (7.1) при $N = 4$). Действуя так же, как при доказательстве предложения 4.1, перепишем (7.16) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\tau(u+1)}{\tau(u+2)} \left(\lambda_q \lambda_r \frac{\tau^{q+1, r+1}(u+2)}{\tau^{q+1, r+1}(u+1)} - \lambda_p \lambda_r \frac{\tau^{p+1, r+1}(u+2)}{\tau^{p+1, r+1}(u+1)} - \right. \\ \left. - \lambda_p \lambda_q \frac{\tau^{p+1, r+1}(u) \tau^{p+1, q+1, r+1}(u+1) \tau^{p+1}(u+2)}{\tau^{p+1, q+1, r+1}(u) \tau^{p+1, r+1}(u+1) \tau^{p+1}(u+1)} \right) = \\ = \frac{\tau^{p+1, q+1, r+1}(u+1)}{\tau^{p+1, q+1, r+1}(u)} \left(\lambda_q \lambda_r \frac{\tau^{p+1}(u)}{\tau^{p+1}(u+1)} - \lambda_p \lambda_q \frac{\tau^{r+1}(u)}{\tau^{r+1}(u+1)} - \right. \\ \left. - \lambda_p \lambda_r \frac{\tau^{q+1, r+1}(u) \tau(u+1) \tau^{r+1}(u+2)}{\tau^{r+1}(u+1) \tau^{q+1, r+1}(u+1) \tau(u+2)} \right) \end{aligned} \quad (7.17)$$

(ср. с (4.18)). Умножая обе части на $(\lambda_q - \lambda_r)\tau^{q+1,r+1}(u+1)\tau^{p+1}(u+1)$ и используя уравнение Хироты в виде

$$(\lambda_q - \lambda_r)\tau^{q+1,r+1}(u)\tau(u+1) = \lambda_q\tau^{r+1}(u)\tau^{q+1}(u+1) - \lambda_r\tau^{q+1}(u)\tau^{r+1}(u+1), \quad (7.18)$$

придем к соотношению

$$\frac{\tau(u+1)\tau^{p+1,q+1,r+1}(u)}{\tau(u+2)\tau^{p+1,q+1,r+1}(u+1)}A^{p,q,r}(u) = B^{p,q,r}(u), \quad (7.19)$$

где

$$\begin{aligned} A^{p,q,r}(u) &= (\lambda_q - \lambda_r)\lambda_q\lambda_r\tau^{q+1,r+1}(u+2)\tau^{p+1}(u+1) - \\ &\quad - \lambda_p\lambda_q\frac{\tau^{p+1,q+1}(u+2)}{\tau^{p+1,q+1,r+1}(u)}(\lambda_q\tau^{p+1,r+1}(u)\tau^{q+1,r+1}(u+1)) + \\ &\quad + \lambda_p\lambda_r\frac{\tau^{p+1,r+1}(u+2)}{\tau^{p+1,q+1,r+1}(u)}(\lambda_r\tau^{p+1,q+1}(u)\tau^{q+1,r+1}(u+1)), \\ B^{p,q,r}(u) &= (\lambda_q - \lambda_r)\lambda_q\lambda_r\tau^{p+1}(u)\tau^{q+1,r+1}(u+1) - \\ &\quad - \lambda_p\lambda_q\frac{\tau^{r+1}(u)}{\tau(u+2)}(\lambda_q\tau^{p+1}(u+1)\tau^{q+1}(u+2)) + \\ &\quad + \lambda_p\lambda_r\frac{\tau^{q+1}(u)}{\tau(u+2)}(\lambda_r\tau^{p+1}(u+1)\tau^{r+1}(u+2)). \end{aligned}$$

Два последних члена можно преобразовать, воспользовавшись (7.18) еще раз:

$$\begin{aligned} A^{p,q,r}(u) &= h^{p,q,r}(u+1) - \lambda_p^2(\lambda_q - \lambda_r)\frac{\tau^{q+1,r+1}(u)\tau^{p+1,q+1,r+1}(u+1)\tau^{p+1}(u+2)}{\tau^{p+1,q+1,r+1}(u)}, \\ B^{p,q,r}(u) &= h^{p,q,r}(u) - \lambda_p^2(\lambda_q - \lambda_r)\frac{\tau^{q+1,r+1}(u)\tau(u+1)\tau^{p+1}(u+2)}{\tau(u+2)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} h^{p,q,r}(u) &= \lambda_q\lambda_r(\lambda_q - \lambda_r)\tau^{p+1}(u)\tau^{q+1,r+1}(u+1) + \\ &\quad + \lambda_r\lambda_p(\lambda_r - \lambda_p)\tau^{q+1}(u)\tau^{p+1,r+1}(u+1) + \\ &\quad + \lambda_p\lambda_q(\lambda_p - \lambda_q)\tau^{r+1}(u)\tau^{p+1,q+1}(u+1). \end{aligned} \quad (7.20)$$

В результате (7.19) принимает вид

$$\frac{\tau(u+1)\tau^{p+1,q+1,r+1}(u)}{\tau(u+2)\tau^{p+1,q+1,r+1}(u+1)} = \frac{h^{p,q,r}(u)}{h^{p,q,r}(u+1)}, \quad (7.21)$$

что ведет к уравнению

$$h^{p,q,r}(u) + (\lambda_p - \lambda_q)(\lambda_q - \lambda_r)(\lambda_r - \lambda_p)\tau(u+1)\tau^{p+1,q+1,r+1}(u) = 0, \quad (7.22)$$

которое имеет вид (7.1) для $N = 4$. На этом наше вычисление закончено.

M -операторы для произвольных составных потоков можно ввести, обобщая (7.8):

$$M_u^{p_N \cdots p_2 p_1} = \exp\left(\sum_{j=1}^N \partial_{p_j}\right) \prod_{i=1}^N (e^{-\partial_{p_i}} M_u^{p_i}). \quad (7.23)$$

Отметим, что порядок операторов в этом произведении не важен, т.к. $e^{-\partial_{p_i}} M_u^{p_i}$ коммутируют в силу условия нулевой кривизны (4.9). Для простоты здесь предполагается, что все p_i примыкают к u слева. Операторы (7.23) порождают дискретные аналоги высших потоков иерархии КП (см. граф потоков в разделе 3.2). Не составляет труда ввести подобные операторы и для правых примыкающих потоков. Все вместе они порождают высшие потоки дискретной иерархии 2ЦТ.

ГИПОТЕЗА. Все высшие уравнения Хироты (7.1) следуют из совместности составных потоков, порождаемых M -операторами (7.23), и элементарных дискретных потоков.

Приведенные выкладки доказывают справедливость этой гипотезы для 4-членных уравнений. К сожалению, мы не знаем другого доказательства, кроме этого запутанного вычисления, идея которого так и осталась неясной, и которое поэтому трудно провести в общем случае. Фактически гипотеза утверждает, что все высшие билинейные уравнения являются следствиями уравнения (4.20), рассматриваемого как иерархия, т.е. справедливого для всех троек примыкающих потоков.

8. РЕДУКЦИИ УРАВНЕНИЯ ХИРОТЫ

Уравнения Хироты допускают несколько важных редукций. Под *редукцией* мы понимаем наложение связи, согласованной с уравнением, что уменьшает число независимых переменных. Так получаются дискретные аналоги уравнений КдФ, sine-Гордон и других.

Простейший способ наложить такую связь – это потребовать, чтобы τ -функция была *стационарна* относительно некоторого выделенного потока s (возможно, с точностью до “калибровочного” преобразования (2.2)). В содержательных примерах стационарный поток должен быть составным. Как и при работе с коммутационными представлениями, имеются две возможности.

Во-первых, стационарный поток можно выбрать базисным. Тогда M -операторы не будут содержать операторов сдвига (поскольку символ ∂_s коммутирует со всеми коэффициентами). Другими словами, ∂_s можно рассматривать как s -число и отождествить со *спектральным параметром*. Это и есть типичный способ возникновения M -операторов, зависящих от (рационального) спектрального параметра.

Альтернативным образом в качестве базисного можно выбрать любой другой поток u , отличный от s . Тогда любой M -оператор $M^{(f)}$ (порождающий некоторый поток f) содержит операторы сдвига ∂_u . Поскольку коэффициенты оператора $M^{(f)}$ не зависят от s , условие совместности для s и f принимает форму Лакса

$$M^{(s)}(f+1)M^{(f)} = M^{(f)}M^{(s)}(f),$$

где $M^{(f)}$ играет роль *оператора Лакса*. В отличие от схемы Захарова–Шабата, в которой каждое условие нулевой кривизны включает два потока (не считая базисного), уравнения Лакса пишутся для каждого потока по отдельности. Уравнение Лакса представляет временной поток как изоспектральное преобразование (т.е. преобразование подобия) оператора Лакса. Естественно назвать $M^{(s)}$ *L -оператором редуцированной иерархии*. Это типичный способ возникновения L -операторов, которые являются разностными (или дифференциальными), а не псевдоэллиптическими (или псевдодифференциальными) операторами⁷⁾. Для иллюстрации этой общей схемы перейдем к рассмотрению примеров.

8.1. Редукции типа КдФ

1. *Дискретное уравнение Д’Аламбера (тривиальный пример)*. Пусть u – элементарный дискретный поток из главы 4. Условие стационарности по отношению к нему,

⁷⁾ Оператор Лакса для иерархии уравнений Хироты без редукций представляет собой некоторый бесконечный ряд по отрицательным степеням разностного оператора первого порядка. Такое представление Лакса мы здесь обсуждать не будем.

т.е. $\tau(u+1) = \tau(u)$, немедленно ведет к соотношению (см. (4.20))

$$\tau^{l+1,m} \tau^{l,m+1} = \tau^{l,m} \tau^{l+1,m+1}, \quad (8.1)$$

где l, m – любые другие элементарные потоки. Мы получили дискретное двумерное уравнение Д’Аламбера, записанное в переменных светового конуса. Его общее решение имеет вид $\tau^{l,m} = \chi_+(l)\chi_-(m)$, где функции $\chi_{\pm}$ произвольны. Именно так выглядит “калибровочный” множитель перед τ -функцией (см. (2.8)), т.е. применительно к уравнению Хироты это решение эквивалентно постоянному $\tau^{l,m} = \text{const}$. Таким образом, наша редукция оказалась чересчур сильной – с ней совместны только тривиальные решения. Чтобы получить содержательные примеры, надо либо наложить условие стационарности по отношению к составному потоку, либо потребовать периодичности по u с периодом $N > 1$ (например, $\tau(u+2) = \tau(u)$).

Рис. 15

2. *Дискретное уравнение КдФ.* Рассмотрим граф потоков, представленный на рис. 15, и положим для краткости $\lambda_2^{01} = \lambda_q$, $\lambda_3^{01} = \lambda_p$. В этих обозначениях уравнение (4.20) принимает вид

$$\lambda_q \tau_u^{p+1,q} \tau_{u+1}^{p,q+1} - \lambda_p \tau_u^{p,q+1} \tau_{u+1}^{p+1,q} + (\lambda_p - \lambda_q) \tau_u^{p+1,q+1} \tau_{u+1}^{p,q} = 0. \quad (8.2)$$

Редукция к дискретному уравнению КдФ осуществляется наложением связи

$$\tau_u^{p+1,q+1} = \tau_u^{p,q}, \quad (8.3)$$

т.е. τ -функция должна быть стационарна относительно составного потока, отвечающего паре векторов $\overrightarrow{\lambda_0 \lambda_2}, \overrightarrow{\lambda_0 \lambda_3}$. Это условие превращает трехмерное уравнение (8.2) в двумерное:

$$\lambda_q \tau_u^{p+1} \tau_{u+1}^{p-1} - \lambda_p \tau_u^{p-1} \tau_{u+1}^{p+1} + (\lambda_p - \lambda_q) \tau_u^p \tau_{u+1}^p = 0. \quad (8.4)$$

Это и есть дискретное уравнение КдФ в билинейной форме [2, 30]. Оно также известно в другом виде [30]:

$$V(u, p) - V(u-1, p-1) = \kappa (V^{-1}(u, p-1) - V^{-1}(u-1, p)). \quad (8.5)$$

Их эквивалентность вытекает из следующего отождествления:

$$V(u, p) = \frac{\tau_u^p \tau_{u+1}^{p+1}}{\tau_u^{p+1} \tau_{u+1}^p}, \quad \kappa = \frac{\lambda_q}{\lambda_p}.$$

Обсудим теперь специфику M - и L -операторов. Следуя истории уравнения КдФ, мы начнем с разностных операторов со скалярными коэффициентами. Пусть u – базисная переменная. Тогда (составной) стационарный поток порождается M -оператором вида (7.9)

$$\begin{aligned} M_u^{pq} &= M_u^p(p, q+1)M_u^q(p, q) = L^{(\text{КдФ})} = \\ &= e^{2\partial_u} - \left(\lambda_p \frac{\tau_u^{p-1}\tau_{u+1}^p}{\tau_u^p\tau_{u+1}^{p-1}} + \lambda_q \frac{\tau_{u+1}^p\tau_{u+2}^{p-1}}{\tau_{u+1}^{p-1}\tau_{u+2}^p} \right) e^{\partial_u} + \lambda_p\lambda_q. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Этот разностный оператор второго порядка называется *оператором Лакса дискретного уравнения КдФ*. Спектральная задача $L^{(\text{КдФ})}\psi = E\psi$ – разностный аналог стационарного уравнения Шредингера, известного как одна из форм вспомогательной линейной задачи для КдФ. Эволюция в p -направлении, порождаемая M -оператором вида (4.15), изоспектральна: $L^{(\text{КдФ})}(p+1) = M_u^p L^{(\text{КдФ})}(p)(M_u^p)^{-1}$.

Если же базисный поток совпадает со стационарным, мы получаем M -оператор в виде числовой матрицы 2×2 , зависящей от спектрального параметра z , который есть просто собственное значение оператора сдвига ψ -функции вдоль стационарного потока: $\exp(\partial_p + \partial_q)\psi = z^2\psi$. Рассмотрим вектор

$$\begin{pmatrix} \psi_u^p \\ \chi_u^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi^p(u) \\ \frac{\tau_u^{p+1}}{\tau_u^p} \psi_u^{p+1} \end{pmatrix}.$$

Повторяя выкладки из раздела 5.5, находим линейные задачи для сдвигов по u и p :

$$\begin{pmatrix} \psi_{u+1}^p \\ \chi_{u+1}^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_p \frac{\tau_u^p \tau_{u+1}^{p+1}}{\tau_{u+1}^{p+1} \tau_u^p} & \frac{\tau_u^p}{\tau_{u+1}^{p+1}} \\ z^2 \frac{\tau_{u+1}^{p+1}}{\tau_{u+1}^p} & \lambda_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_u^p \\ \chi_u^p \end{pmatrix}, \quad (8.7)$$

$$\begin{pmatrix} \psi_u^{p+1} \\ \chi_u^{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\tau_u^p}{\tau_{u+1}^{p+1}} \\ z^2 \frac{\tau_{u+1}^{p+2}}{\tau_{u+1}^{p+1}} & \lambda_q - \lambda_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_u^p \\ \chi_u^p \end{pmatrix}. \quad (8.8)$$

Их совместность выражается в виде разностного уравнения Захарова–Шабата на матричные функции, зависящие от z .

Первая компонента вектора удовлетворяет уравнениям

$$\psi_{u+1}^p + \frac{1}{\lambda_p - \lambda_q} \left(\lambda_q^2 \frac{\tau_{u-1}^{p+1}\tau_{u+1}^{p-1}}{\tau_{u-1}^p\tau_{u+1}^p} - \lambda_p^2 \frac{\tau_{u-1}^{p-1}\tau_{u+1}^{p+1}}{\tau_{u-1}^p\tau_{u+1}^p} \right) \psi_u^p = (z^2 - \lambda_p\lambda_q)\psi_{u-1}^p, \quad (8.9)$$

$$\psi_u^{p+1} + (\lambda_p - \lambda_q) \frac{(\tau_u^p)^2}{\tau_{u-1}^{p-1}\tau_{u+1}^{p+1}} \psi_u^p = z^2 \psi_u^{p-1}. \quad (8.10)$$

Уравнение (8.9) совпадает со спектральной задачей для оператора Лакса (8.6) в предположении, что τ -функция удовлетворяет билинейному уравнению (8.4).

3. *Дискретное уравнение Буссинеска* [13]. В этом примере условие стационарности имеет вид $\tau_{u+1}^{p+1, q+1} = \tau_u^{p, q}$. Уравнение (8.2) сводится при этом к

$$\lambda_q \tau^{p+1, q} \tau^{p-1, q} - \lambda_p \tau^{p, q+1} \tau^{p, q-1} + (\lambda_p - \lambda_q) \tau^{p+1, q+1} \tau^{p-1, q-1} = 0 \quad (8.11)$$

(здесь u неявно входит как параметр). Различные типы представлений Лакса и Захарова–Шабата могут быть без труда выписаны. Мы не будем на этом останавливаться.

Условие

$$\exp\left(\sum_{\alpha=1}^{n+1}\partial_{p_\alpha}\right)\tau = \tau$$

задает более общие редукции A_n -типа. Отметим, что оно действительно понижает размерность уравнения только для тех высших членов иерархии, в которых число независимых переменных было больше n .

8.2. Цепочка Тоды в дискретном времени и родственные модели

Эта группа примеров включает цепочку Тоды (ЦТ) в дискретном времени, дискретную систему АКНС (в частности, дискретное нелинейное уравнение Шредингера), релятивистскую цепочку Тоды в дискретном времени и дискретный магнетик Гейзенберга. Эти модели отличаются только выбором зависимых и независимых переменных, а тип редукции для них один и тот же.

Мы будем работать с графом потоков из раздела 4.3 и пользоваться введенными там обозначениями. Потребуем, чтобы τ -функция была стационарна относительно составного потока, отвечающего паре векторов $\overrightarrow{\lambda_0\lambda_3}, \overrightarrow{\lambda_1\lambda_2}$, т.е.

$$\tau_n^{l+1, \bar{l}+1} = \tau_n^{l, \bar{l}}. \quad (8.12)$$

Стационарный поток порождается “составным” M -оператором $e^{\partial_l} \overline{M}_n^{\bar{l}} e^{-\partial_l} M_n^l$, где n играет роль базисной переменной. Согласно точке зрения, изложенной во введении к этой главе, его следует назвать оператором Лакса ЦТ в дискретном времени:

$$L^{(\text{ЦТ})} = e^{\partial_n} - \left(\nu \frac{\tau_n^l \tau_{n+1}^{l+1}}{\tau_n^{l+1} \tau_{n+1}^l} + \mu \frac{\tau_{n-1}^{l+1} \tau_{n+1}^l}{\tau_n^l \tau_n^{l+1}} \right) + \nu \mu \frac{\tau_{n-1}^l \tau_{n+1}^l}{(\tau_n^l)^2} e^{-\partial_n}. \quad (8.13)$$

Это разностный оператор второго порядка по n со скалярными коэффициентами. Спектральная задача $L^{(\text{ЦТ})}\psi = E\psi$ представляет собой некоторое *стационарное* разностное уравнение Шредингера (ср. с (5.43)). Динамика по l сохраняет спектр $L^{(\text{ЦТ})}$.

Подставив $e^{\partial_y} = e^{\partial_l + \partial_{\bar{l}}} \rightarrow z^2$, получаем из (4.23) $(L-M)$ -пару для ЦТ в дискретном времени в виде матриц 2×2 , зависящих от спектрального параметра z :

$$L_n^{(\text{ЦТ})}(z) = \begin{pmatrix} z^2 + \nu \frac{\tau_n^l \tau_{n+1}^{l+1}}{\tau_n^{l+1} \tau_{n+1}^l} + \mu \frac{\tau_{n-1}^{l+1} \tau_{n+1}^l}{\tau_n^l \tau_n^{l+1}} & -\mu \nu \frac{\tau_{n+1}^l}{\tau_n^l} \\ \frac{\tau_n^l}{\tau_{n+1}^l} & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.14)$$

$$M_n^{(\text{ЦТ})}(z) = \begin{pmatrix} \nu & -\mu \nu \frac{\tau_{n+1}^{l-1}}{\tau_n^{l-1}} \\ \frac{\tau_{n-1}^l}{\tau_n^l} & -z^2 - \mu \frac{\tau_{n+1}^{l-1} \tau_{n-1}^l}{\tau_n^{l-1} \tau_n^l} \end{pmatrix}. \quad (8.15)$$

Двумерное дискретное уравнение Шредингера (5.44) становится одномерной спектральной задачей по переменной l :

$$\psi_n^{l+1} + (\nu - \mu) \frac{\tau_n^l \tau_{n+1}^{l-1}}{\tau_n^{l+1} \tau_{n+1}^l} \psi_n^l = z^2 \left(\psi_n^l + \nu \frac{\tau_n^{l-1} \tau_{n+1}^l}{\tau_n^l \tau_{n+1}^{l-1}} \psi_n^{l-1} \right). \quad (8.16)$$

Обратим внимание на нестандартную зависимость от спектрального параметра. Вот другая полезная форма этого уравнения:

$$\overline{\psi}_n^{l+1} - \nu \frac{\tau_n^{l-1} \tau_{n+1}^l}{\tau_n^l \tau_{n+1}^{l-1}} \overline{\psi}_n^{l-1} = \left(z + (\mu - \nu) z^{-1} \frac{\tau_n^l \tau_{n+1}^l}{\tau_n^{l+1} \tau_{n+1}^{l-1}} \right) \overline{\psi}_n^l. \quad (8.17)$$

Она получается из предыдущей подстановкой $\overline{\psi}_n^l = z^{-l} \psi_n^l$.

Билинейная форма уравнений движения — это двумерная редукция уравнения (2.11):

$$\nu \tau_n^{l+1} \tau_n^{l-1} - \mu \tau_{n+1}^{l-1} \tau_{n-1}^{l+1} = (\nu - \mu) (\tau_n^l)^2. \quad (8.18)$$

После линейной замены $l \rightarrow m = l + n$, $\tau_n^l \rightarrow \tau_n(m)$ она совпадает с дискретной ЦТ в билинейной форме, впервые предложенной Хиротой [3]:

$$(1 + g^{-2}) \tau_n(m+1) \tau_n(m-1) - \tau_{n+1}(m) \tau_{n-1}(m) = g^{-2} (\tau_n(m))^2, \quad (8.19)$$

где

$$g^{-2} = \frac{\nu}{\mu} - 1.$$

В терминах функции

$$\phi_n(m) = \log \frac{\tau_{n+1}(m)}{\tau_n(m)} \quad (8.20)$$

(8.19) принимает вид

$$\exp(\phi_n(m+1) + \phi_n(m-1) - 2\phi_n(m)) = \frac{1 + g^2 \exp(\phi_{n+1}(m) - \phi_n(m))}{1 + g^2 \exp(\phi_n(m) - \phi_{n-1}(m))}, \quad (8.21)$$

что есть ЦТ в дискретном времени, изучавшаяся Сурисом [31].

Непрерывный предел по m не вызывает трудностей: положим $m \rightarrow m/\epsilon$, $g^2 = -\epsilon^2$, тогда

$$\phi_n(m \pm 1) \rightarrow \phi_n \pm \epsilon \phi'_n + \frac{1}{2} \epsilon^2 \phi''_n \quad \text{при} \quad \epsilon \rightarrow 0.$$

Разложив (8.21) в ряд по ϵ , приходим к хорошо известному уравнению ЦТ:

$$\phi''_n = e^{\phi_n - \phi_{n-1}} - e^{\phi_{n+1} - \phi_n}. \quad (8.22)$$

Интересно, что уравнение (8.21) имеет другой непрерывный предел, который приводит к уравнению sine-Гордон. Чтобы его увидеть, надо переопределить ϕ перед взятием предела:

$$\phi_n(m) = i(-1)^{n-m} \varphi_n(m), \quad (8.23)$$

так что уравнение примет вид

$$\begin{aligned} \exp(i\varphi_{n+1}(m) + i\varphi_{n-1}(m) - i\varphi_n(m+1) - i\varphi_n(m-1)) = \\ = \frac{1 + g^{-2} \exp(i\varphi_{n+1}(m) + i\varphi_n(m))}{1 + g^{-2} \exp(-i\varphi_{n-1}(m) - i\varphi_n(m))}. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Предположим теперь, что $\varphi_n(m)$ имеет гладкий непрерывный предел по n, m . Положив $m \rightarrow m/\epsilon$, $n \rightarrow n/\epsilon$, $g^{-2} = -i\epsilon^2$, $\epsilon \rightarrow 0$ и делая разложение по ϵ , как и раньше, мы получим уравнение sine-Гордон:

$$(\partial_n^2 - \partial_m^2) \varphi = 2 \sin(2\varphi). \quad (8.25)$$

(Этот же предел для ϕ в (8.21) дал бы уравнение Д'Аламбера $(\partial_n^2 - \partial_m^2)\varphi = 0$.) Другая дискретная версия уравнения sine-Гордон обсуждается в разделе 8.3.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.1. Редукция к дискретному уравнению КдФ (см. раздел 8.1) формально содержится в обсуждаемом здесь классе редукций как специальный случай, когда точки λ_0 и λ_1 сливаются. Несмотря на это удобнее рассматривать их отдельно. Отметим еще, что уравнение (8.18) тоже имеет непрерывный предел, приводящий к уравнению КдФ. В этом смысле про ЦТ иногда говорят как про дискретную версию уравнения КдФ.

Рассмотрим теперь дискретную версию несамосопряженного уравнения Шредингера (которое также называется системой АКНС). Это та же самая редукция уравнения Хироты, т.е. стационарный поток точно такой же, как и ранее в этом разделе. Разница заключается в выборе независимых переменных, которые будут участвовать в уравнении. А именно, вместо динамики по n можно рассмотреть динамику по отношению к произвольному потоку p , левому примыкающему к l .

Мы покажем, как вывести уравнения системы АКНС непосредственно из билинейных уравнений Хироты. Рассмотрим билинейные уравнения

$$\lambda_p \tau_n^{p, \bar{l}+1} \tau_n^{p+1, \bar{l}} + (\mu - \lambda_p) \tau_n^{p, \bar{l}} \tau_n^{p+1, \bar{l}+1} = \mu \tau_{n+1}^{p, \bar{l}+1} \tau_{n-1}^{p+1, \bar{l}}, \quad (8.26)$$

$$\nu \tau_n^{p+1, \bar{l}+1} \tau_{n+1}^{p, \bar{l}} - \lambda_p \tau_n^{p, \bar{l}} \tau_{n+1}^{p+1, \bar{l}+1} = (\nu - \lambda_p) \tau_n^{p+1, \bar{l}} \tau_{n+1}^{p, \bar{l}+1}. \quad (8.27)$$

Первое из них — это (4.22), написанное для тройки $(p, n, \bar{l})$. Второе получается из (4.20), написанного для тройки (l, p, n) , при учете условия стационарности $\tau^{l+1, \bar{l}+1} = \tau^{l, \bar{l}}$. Нетрудно видеть, что в терминах функций

$$Q^{p, \bar{l}} = \frac{\tau_{n+1}^{p, \bar{l}}}{\tau_n^{p, \bar{l}}}, \quad R^{p, \bar{l}} = \frac{\tau_{n-1}^{p, \bar{l}}}{\tau_n^{p, \bar{l}}} \quad (8.28)$$

(n фиксировано) эти уравнения можно переписать следующим образом:

$$(\nu - \lambda_p)(\lambda_p - \mu)Q^{p, \bar{l}+1} = (\lambda_p - \mu Q^{p, \bar{l}+1} R^{p+1, \bar{l}})(\nu Q^{p, \bar{l}} - \lambda_p Q^{p+1, \bar{l}+1}), \quad (8.29)$$

$$(\nu - \lambda_p)(\lambda_p - \mu)R^{p+1, \bar{l}} = (\lambda_p - \mu Q^{p, \bar{l}+1} R^{p+1, \bar{l}})(\nu R^{p+1, \bar{l}+1} - \lambda_p R^{p, \bar{l}}). \quad (8.30)$$

В этом виде они эквивалентны дискретной системе АКНС из [13].

При другом выборе зависимых переменных уравнения (8.18), (8.26) и (8.27) превращаются в релятивистскую цепочку Тоды (РЦТ) [32] в дискретном времени. Снова переходя к переменной $m = l + n$, как и в (8.20), положим

$$x_m(p) = -\log \frac{\tau_n^p(m+1)}{\tau_n^p(m)}. \quad (8.31)$$

Уравнение движения для $x_m(p)$ имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{(1 - \alpha \exp(x_{m+1}(p) - x_m(p)))}{(1 - \alpha \exp(x_m(p) - x_{m-1}(p)))} \times \\ & \times \frac{(1 - \beta \exp(x_m(p) - x_{m-1}(p-1)))(1 - \gamma \exp(x_m(p) - x_m(p+1)))}{(1 - \beta \exp(x_{m+1}(p+1) - x_m(p)))(1 - \gamma \exp(x_m(p-1) - x_m(p)))} = 1, \end{aligned} \quad (8.32)$$

где

$$\alpha = \frac{\nu}{\nu - \mu}, \quad \beta = \frac{\nu(\mu - \lambda_p)}{\lambda_p(\mu - \nu)}, \quad \gamma = \frac{\lambda_p}{\lambda_p - \mu}. \quad (8.33)$$

Оно лишь несущественно отличается от уравнения РЦТ в дискретном времени, предложенного в [33].

Поясним, как выводится уравнение (8.32)⁸). Выпишем еще раз наши основные билинейные уравнения (8.18), (8.26), (8.27):

$$(\nu - \mu)(\tau_n^p(m))^2 - \nu\tau_n^p(m+1)\tau_n^p(m-1) = -\mu\tau_{n+1}^p(m)\tau_{n-1}^p(m), \quad (8.34)$$

$$(\mu - \lambda_p)\tau_n^p(m+1)\tau_n^{p+1}(m) + \lambda_p\tau_n^{p+1}(m+1)\tau_n^p(m) = \mu\tau_{n+1}^p(m+1)\tau_{n-1}^{p+1}(m), \quad (8.35)$$

$$\nu\tau_{n+1}^p(m+1)\tau_n^{p+1}(m-1) - \lambda_p\tau_n^p(m)\tau_{n+1}^{p+1}(m) = (\nu - \lambda_p)\tau_n^{p+1}(m)\tau_{n+1}^p(m). \quad (8.36)$$

Нам потребуются еще два билинейных соотношения, которые суть прямые алгебраические следствия основных:

$$\begin{aligned} (\nu - \lambda_p)\tau_{n+1}^p(m)\tau_n^{p+1}(m+1) - (\mu - \lambda_p)\tau_{n+1}^{p+1}(m)\tau_n^p(m+1) = \\ = (\nu - \mu)\tau_{n+1}^p(m+1)\tau_n^{p+1}(m), \end{aligned} \quad (8.37)$$

$$\begin{aligned} \lambda_p(\nu - \mu)\tau_n^p(m)\tau_n^{p+1}(m) + \nu(\mu - \lambda_p)\tau_n^p(m+1)\tau_n^{p+1}(m-1) = \\ = \mu(\nu - \lambda_p)\tau_{n+1}^p(m)\tau_{n-1}^{p+1}(m). \end{aligned} \quad (8.38)$$

Уравнение (8.37) получается в результате исключения $\tau_n^p(m)$ из (8.35) и (8.36) (а именно, их надо разделить на $\tau_n^{p+1}(m+1)$, $\tau_{n+1}^{p+1}(m)$, соответственно, и затем сложить) и применения (8.34). Уравнение (8.38) получается совершенно аналогично в результате исключения $\tau_n^{p+1}(m)$ из (8.35), (8.36) и применения (8.37). Теперь (8.32) совсем просто следует из (8.34), (8.35) и (8.38).

ЗАМЕЧАНИЕ 8.2. Билинеаризация обычной (непрерывной) РЦТ была предложена в [34]. Эквивалентность РЦТ и “полунепрерывной” системы АКНС (с дискретным пространством и непрерывным временем) была недавно доказана в [35].

В заключение этого раздела несколько слов о дискретной модели магнетика Гейзенберга (МГ) [12]. Вот как эта модель вписывается в нашу схему. Тип редукции такой же, как и ранее в этом разделе, но независимые переменные выбираются по-другому. Наряду с потоком p из предыдущего примера вводится еще один элементарный дискретный поток q , левый примыкающий к l . Теперь τ -функция зависит от четырех переменных: $\tau = \tau_n^{\bar{l}}(p, q)$. Зафиксируем n , $\bar{l}$ и рассмотрим следующие четыре функции от p и q : $\tau_n^{\bar{l}+1}(p, q)$, $\tau_n^{\bar{l}-1}(p, q)$, $\tau_{n+1}^{\bar{l}+1}(p, q)$, $\tau_{n-1}^{\bar{l}-1}(p, q)$. Из билинейных уравнений вытекает, что некоторые рациональные комбинации этих функций удовлетворяют системе нелинейных разностных уравнений по p и q , которые играют роль дискретных пространственно-временных переменных. Эта система эквивалентна дискретной модели МГ, детально разобранной в [12], где она вводилась несколько по-другому с помощью вложения в редуцированную 2-компонентную иерархию 2ЦТ. Как и в случае дискретной системы АКНС, вложение в 1-компонентную иерархию 2ЦТ, которое мы только что описали, приводит к эквивалентным уравнениям движения. Мы опускаем дальнейшие подробности.

⁸) Идея этого вывода принадлежит С. Харчеву (неопубликовано).

8.3. Периодические редукции

Периодические редукции непрерывной иерархии 2ЦТ приводят к ряду важных уравнений. Например, 2-периодическая редукция $\tau_{n+2} = \tau_n$ содержит уравнение sine-Гордон. Такая же редукция может быть наложена и в дискретном случае. При этом мы получаем одну из возможных дискретных версий уравнения sine-Гордон.

Заметим, что периодические редукции формально можно рассматривать как частный случай стационарных. Действительно, поток $p \rightarrow p + 2$ есть (формально) вырождение составного потока, при котором соответствующие метки попарно сливаются на комплексной плоскости. Периодичность $\tau^{p+2} = \tau^p$ означает стационарность по отношению к этому вырожденному составному потоку. Однако эта точка зрения не очень полезна на практике. Обычно бывает более удобно рассматривать периодические редукции независимо.

Рассмотрим 2ЦТ-подобную форму (2.11) уравнения Хироты с дополнительной связью

$$\tau_{n+2}^{l,\bar{l}} = \tau_n^{l,\bar{l}}. \quad (8.39)$$

Тогда трехмерное уравнение Хироты переписывается как система двух двумерных уравнений:

$$\begin{aligned} \nu \tau_0^{l,\bar{l}+1} \tau_0^{l+1,\bar{l}} - (\nu - \mu) \tau_0^{l,\bar{l}} \tau_0^{l+1,\bar{l}+1} &= \mu \tau_1^{l,\bar{l}+1} \tau_1^{l+1,\bar{l}}, \\ \nu \tau_1^{l,\bar{l}+1} \tau_1^{l+1,\bar{l}} - (\nu - \mu) \tau_1^{l,\bar{l}} \tau_1^{l+1,\bar{l}+1} &= \mu \tau_0^{l,\bar{l}+1} \tau_0^{l+1,\bar{l}}. \end{aligned} \quad (8.40)$$

Поле модели sine-Гордон $\Phi^{l,\bar{l}}$ на квадратной решетке $(l, \bar{l})$ дается формулой

$$\Phi^{l,\bar{l}} = \frac{1}{2} \log \frac{\tau_0^{l,\bar{l}}}{\tau_1^{l,\bar{l}}}. \quad (8.41)$$

Преобразовав уравнения (8.40), можно получить замкнутое уравнение для $\Phi^{l,\bar{l}}$:

$$\nu \operatorname{sh}(\Phi^{l,\bar{l}} + \Phi^{l+1,\bar{l}+1} - \Phi^{l,\bar{l}+1} - \Phi^{l+1,\bar{l}}) = \mu \operatorname{sh}(\Phi^{l,\bar{l}} + \Phi^{l+1,\bar{l}+1} + \Phi^{l,\bar{l}+1} + \Phi^{l+1,\bar{l}}), \quad (8.42)$$

которое и называется дискретным уравнением sine-Гордон [4] в переменных светового конуса.

Приведем также другую его полезную форму [36, 37]. Положим

$$S^{l,\bar{l}} = \exp(-2\Phi^{l+1,\bar{l}} - 2\Phi^{l,\bar{l}+1}) = \frac{\tau_1^{l+1,\bar{l}} \tau_1^{l,\bar{l}+1}}{\tau_0^{l+1,\bar{l}} \tau_0^{l,\bar{l}+1}}, \quad (8.43)$$

$$\tilde{S}^{l,\bar{l}} = \exp(-2\Phi^{l,\bar{l}} - 2\Phi^{l+1,\bar{l}+1}) = \frac{\tau_1^{l,\bar{l}} \tau_1^{l+1,\bar{l}+1}}{\tau_0^{l,\bar{l}} \tau_0^{l+1,\bar{l}+1}}, \quad (8.44)$$

тогда

$$\tilde{S}^{l,\bar{l}+1} \tilde{S}^{l+1,\bar{l}} = S^{l,\bar{l}} S^{l+1,\bar{l}+1}.$$

С другой стороны,

$$\tilde{S}^{l,\bar{l}} = \frac{\mu - \nu S^{l,\bar{l}}}{\mu S^{l,\bar{l}} - \nu}, \quad (8.45)$$

так что (8.42) принимает вид

$$S^{l,\bar{l}} S^{l+1,\bar{l}+1} = \frac{(\mu - \nu S^{l,\bar{l}+1})(\mu - \nu S^{l+1,\bar{l}})}{(\mu S^{l,\bar{l}+1} - \nu)(\mu S^{l+1,\bar{l}} - \nu)} \quad (8.46)$$

(ср. с (2.5)).

Обратимся к представлению нулевой кривизны. Пусть сначала l – базисная переменная. Сдвиг $n \rightarrow n + 2$ порождается скалярным L -оператором

$$L^{(\text{CG})} = e^{2\partial_l} + \nu \left(\frac{\tau_1^{l,\bar{l}} \tau_0^{l+1,\bar{l}}}{\tau_0^{l,\bar{l}} \tau_1^{l+1,\bar{l}}} + \frac{\tau_0^{l+1,\bar{l}} \tau_1^{l+2,\bar{l}}}{\tau_1^{l+1,\bar{l}} \tau_0^{l+2,\bar{l}}} \right) e^{\partial_l} + \nu^2. \quad (8.47)$$

Такое представление не совсем удобно для описания динамики по $\bar{l}$.

Для этого лучше приспособлена матричная $(L-M)$ -пара со спектральным параметром. Чтобы ее получить, нужно выбрать стационарный “поток” $2n$ в качестве базисного и действовать в духе раздела 5.5. Оператор $e^{2\partial_n}$ при этом, естественно, нужно заменять на спектральный параметр z^2 . Не останавливаясь на деталях, приведем конечный результат.

Матричные линейные задачи имеют вид

$$-\nu^{-1} \begin{pmatrix} \psi^{l+1,\bar{l}} \\ \chi^{l+1,\bar{l}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\tau_0^{l,\bar{l}} \tau_1^{l+1,\bar{l}}}{\tau_0^{l+1,\bar{l}} \tau_1^{l,\bar{l}}} & -z \frac{\tau_0^{l,\bar{l}}}{\tau_1^{l,\bar{l}}} \\ -z \frac{\tau_1^{l+1,\bar{l}}}{\tau_0^{l+1,\bar{l}}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^{l,\bar{l}} \\ \chi^{l,\bar{l}} \end{pmatrix}, \quad (8.48)$$

$$\mu \begin{pmatrix} \psi^{l,\bar{l}+1} \\ \chi^{l,\bar{l}+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\mu}{z} \frac{\tau_1^{l,\bar{l}+1}}{\tau_0^{l,\bar{l}+1}} \\ -\frac{\mu}{z} \frac{\tau_0^{l,\bar{l}}}{\tau_1^{l,\bar{l}}} & \frac{\tau_0^{l,\bar{l}} \tau_1^{l,\bar{l}+1}}{\tau_0^{l,\bar{l}+1} \tau_1^{l,\bar{l}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^{l,\bar{l}} \\ \chi^{l,\bar{l}} \end{pmatrix}, \quad (8.49)$$

что поучительно сравнить с (8.7). Обозначим матрицы в правых частях уравнений (8.48), (8.49) через $M^{(+)}$, $M^{(-)}$, соответственно, и запишем условие совместности

$$M^{(+)}(l, \bar{l} + 1) M^{(-)}(l, \bar{l}) = M^{(-)}(l + 1, \bar{l}) M^{(+)}(l, \bar{l}). \quad (8.50)$$

Отсюда вытекает дискретное уравнение sine-Гордон.

N -периодические редукции ($\tau_{n+N} = \tau_n$) рассматриваются аналогично. Их можно назвать N -периодическими дискретными 2ПТ. Можно также потребовать периодичности по отношению к любому из составных потоков. В заключение этого раздела сделаем несколько замечаний о редукциях, приводящих к уравнениям, которые являются дискретными аналогами уравнений ILW (Intermediate Long Wave).

Редукции из 2ПТ к семейству непрерывных ILW-уравнений лучше всего записываются в терминах τ -функции. Редукция к уравнению ILW_k выглядит следующим образом [38]:

$$\tau_{n+k}(t_1 + h, t_2, \dots; \bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots) = \tau_n(t_1, t_2, \dots; \bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots), \quad (8.51)$$

где h – фиксированный параметр. Он интерполирует между k -периодическими редукциями ($h = 0$) и уравнением Бенджамина–Оно ($h \rightarrow \infty$). Это условие означает, что τ -функция не зависит от некоторой линейной комбинации переменных n и t_1 . Отсюда очевиден дискретный вариант уравнения ILW_k. В соответствии с нашими общими правилами нужно заменить t_1 на некоторый элементарный дискретный поток p . Вместо (8.51) мы напишем

$$\tau_{n+k}^{p+l} = \tau_n^p, \quad (8.52)$$

где l и k — целочисленные параметры. В частности, таким образом получаются дискретное уравнение КдФ ($l = k = 1$) и k -периодическая редукция ($l = 0$). В непрерывном пределе воспроизводится обычное уравнение PLW_k .

8.4. Дискретное уравнение Лиувилля

Дискретное уравнение Лиувилля (ДУЛ) и его A_n -обобщения [39] (2ЦТ со свободными концами) образуют очень важный подкласс интегрируемых нелинейных уравнений, стоящий несколько особняком. Мы обсуждаем их здесь по единственной причине, что ДУЛ в полной аналогии с непрерывным случаем формально можно рассматривать как вырождение дискретного уравнения sine -Гордон. Тем не менее взаимоотношения этих двух типов интегрируемых систем отнюдь не исчерпываются этим обстоятельством и заслуживают дальнейшего изучения.

ДУЛ можно получить из дискретного уравнения sine -Гордон некоторым специальным скейлинговым пределом. Заменим $S_L^{l, \bar{l}} \rightarrow \mu S_L^{l, \bar{l}}$ в (8.46). Эта замена просто означает добавление к полю постоянного “фона”:

$$\Phi^{l, \bar{l}} \rightarrow \Phi^{l, \bar{l}} - \frac{1}{4} \log \mu.$$

Устремляя $\mu \rightarrow 0$ в (8.46) (но не трогая при этом сдвиги по $\bar{l}!$), приходим к ДУЛ

$$S_L^{l, \bar{l}} S_L^{l+1, \bar{l}+1} = (\nu^{-1} - S_L^{l, \bar{l}+1})(\nu^{-1} - S_L^{l+1, \bar{l}}). \quad (8.53)$$

здесь

$$S_L^{l, \bar{l}} = \lim_{\mu \rightarrow 0} (\mu^{-1} S_L^{l, \bar{l}}). \quad (8.54)$$

Положив

$$S_L^{l, \bar{l}} = \exp(-2\Phi_L^{l+1, \bar{l}} - 2\Phi_L^{l, \bar{l}+1}), \quad (8.55)$$

получим ДУЛ, записанное в терминах лиувиллиевского поля в дискретном пространстве-времени [6] (ср. с (8.42)):

$$2\nu \operatorname{sh}(\Phi_L^{l, \bar{l}} + \Phi_L^{l+1, \bar{l}+1} - \Phi_L^{l, \bar{l}+1} - \Phi_L^{l+1, \bar{l}}) = \exp(\Phi_L^{l, \bar{l}} + \Phi_L^{l+1, \bar{l}+1} + \Phi_L^{l, \bar{l}+1} + \Phi_L^{l+1, \bar{l}}), \quad (8.56)$$

или в более простой форме

$$\exp(-2\Phi_L^{l+1, \bar{l}} - 2\Phi_L^{l, \bar{l}+1}) - \exp(-2\Phi_L^{l, \bar{l}} - 2\Phi_L^{l+1, \bar{l}+1}) = \nu^{-1}. \quad (8.57)$$

Для перехода к непрерывному пределу нужно сделать замены $l \rightarrow \nu^{1/2}x_+$, $\bar{l} \rightarrow \nu^{1/2}x_-$, $S_L^{l, \bar{l}} \rightarrow \exp(-4\Phi(x_+, x_-))$ и разложить (8.57) в ряд по $\nu^{-1} \rightarrow 0$, что в лидирующем порядке дает непрерывное уравнение Лиувилля

$$2\partial_{x_+}\partial_{x_-}\Phi(x_+, x_-) = e^{4\Phi(x_+, x_-)}. \quad (8.58)$$

Подстановка, приводящая (8.53) к билинейной форме, имеет вид

$$S_L^{l, \bar{l}} = \frac{T^1(l+1, \bar{l})T^1(l, \bar{l}+1)}{T^0(l+1, \bar{l})T^2(l, \bar{l}+1)}, \quad (8.59)$$

после чего ДУЛ становится эквивалентным (с точностью до калибровки, см. ниже) билинейному соотношению

$$T^a(l+1, \bar{l})T^a(l, \bar{l}+1) - T^a(l, \bar{l})T^a(l+1, \bar{l}+1) = \nu^{-1}T^{a-1}(l+1, \bar{l})T^{a+1}(l, \bar{l}+1) \quad (8.60)$$

с условием

$$T^a(l, \bar{l}) = 0 \quad \text{при всех } a, \text{ кроме } a = 0, 1, 2. \quad (8.61)$$

Из этого условия сразу следует, что T^0 и T^2 удовлетворяют дискретному уравнению Д'Аламбера (8.1) и потому могут быть представлены в виде $T^0(l, \bar{l}) = \chi^0(l)\bar{\chi}^0(\bar{l})$, $T^2(l, \bar{l}) = \chi^2(l)\bar{\chi}^2(\bar{l})$ с произвольными (и независимыми) функциями $\chi^{0,2}$, $\bar{\chi}^{0,2}$. Это и есть упомянутая выше калибровочная свобода.

Заметим, наконец, что если отождествить $T^a(l, \bar{l})$ с $\tau_a^{l, \bar{l}}$ и вдобавок принять во внимание условие периодичности $\tau_2^{l, \bar{l}} = \tau_0^{l, \bar{l}}$, уравнения (8.43) и (8.56) становятся идентичными. (Воспользовавшись калибровочной свободой, можно выбрать $T^2(l, \bar{l}) = T^0(l, \bar{l})$ в (8.56).) Было бы чрезвычайно интересно связать эти уравнения не на формальном, а на содержательном уровне, т.е. проследить, что происходит с решениями при взятии скейлингового предела.

Я благодарен П. Вигману, А. Горскому, Д. Лебеву, О. Липану, А. Маршакову, А. Миронову, А. Орлову и особенно И. Кричеву и С. Харчеву за множество интересных и полезных обсуждений. Хотелось бы также поблагодарить за гостеприимство СМАТ de l'Ecole Polytechnique, где эта работа была начата.

Работа была частично поддержана грантом РФФИ № 97-02-19085.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Билинейные разностные уравнения из непрерывных иерархий

В настоящем приложении излагается альтернативная точка зрения на разностные уравнения Хироты. Она основана на знаменитом преобразовании Мивы (3.3), которое до сих пор оставалось в тени. Если дана некоторая непрерывная интегрируемая иерархия (например, КП или 2ЦТ), то это соотношение можно использовать как *определение* элементарных дискретных потоков. Определенные таким образом потоки совпадают с теми, которые были введены в разделе 4.2. У этого подхода имеются как преимущества, так и недостатки. Основное преимущество – чрезвычайно простая и явная связь с описанием непрерывных иерархий и их τ -функций в терминах бесконечномерного грассманиана. Серьезный недостаток – существенно менее инвариантная формулировка, что в ряде случаев может затемнять суть дела.

Преобразование Мивы. Пусть $\tau(t_1, t_2, t_3, \dots) \equiv \tau(t)$ – τ -функция непрерывной иерархии КП. Она зависит от бесконечного числа времен t_i и удовлетворяет бесконечному количеству билинейных соотношений. Она является решением всех уравнений иерархии одновременно.

В общем случае τ -функция представляется в виде некоторого бесконечномерного детерминанта [15–17]. Оказывается, что существует такой выбор независимых переменных, что этот детерминант становится конечномерным. Переход к таким переменным производится с помощью преобразования Мивы [11]

$$t_k = t_k^{(0)} - \frac{1}{k} \sum_{\alpha \in I} p_\alpha \mu_\alpha^{-k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (\text{П.1})$$

Здесь суммирование идет по конечному множеству I , $t_k^{(0)}$ – “фоновые” значения времен, μ_α – произвольные комплексные числа (они называются переменными Мивы), p_α – целые числа (они иногда называются кратностями мивовских переменных μ_α).

ЗАМЕЧАНИЕ. Преобразование Мивы возникает в самых разных ситуациях и играет важную роль при идентификации интегрируемых структур в матричных моделях двумерной гравитации. В частности, наиболее простое доказательство того факта, что статсумма модели Концевича [40] и ее обобщений [41] является τ -функцией иерархии КП, основано на преобразовании Мивы.

В дальнейшем мы пользуемся сокращенным обозначением (3.5).

Важный факт: τ -функция иерархии КП удовлетворяет тождеству

$$\tau\left(t^{(0)} + \sum_{\alpha=1}^N ([\nu_{\alpha}^{-1}] - [\mu_{\alpha}^{-1}])\right) = \frac{\tau(t^{(0)}) \prod_{\alpha,\beta}^N (\nu_{\alpha} - \mu_{\beta})}{\prod_{\alpha>\beta}^N (\nu_{\alpha} - \nu_{\beta}) \prod_{\alpha<\beta}^N (\mu_{\alpha} - \mu_{\beta})} \det_{1 \leq \alpha, \beta \leq N} K(\nu_{\alpha}, \mu_{\beta}), \quad (\text{П.2})$$

где

$$K(\nu, \mu) = \frac{\tau(t^{(0)} + [\nu^{-1}] - [\mu^{-1}])}{(\nu - \mu)\tau(t^{(0)})}. \quad (\text{П.3})$$

Здесь $N \geq 1$ и $\mu_{\alpha}, \nu_{\alpha}$ — произвольные комплексные числа. Приведем также важный частный случай этой формулы:

$$\tau\left(t^{(0)} - \sum_{\alpha=1}^N [\mu_{\alpha}^{-1}]\right) = \frac{\det_{1 \leq \alpha, \beta \leq N} (\varphi_{\alpha}(\mu_{\beta}))}{\prod_{\alpha<\beta}^N (\mu_{\alpha} - \mu_{\beta})}, \quad (\text{П.4})$$

где

$$\varphi_m(\mu) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \nu^{2m-1} \frac{\partial^{m-1}}{\partial \nu^{m-1}} K(\nu, \mu). \quad (\text{П.5})$$

При переводе теории иерархии КП на язык свободных фермионов [15] формула (П.2) сразу же следует из теоремы Вика, а $K(\nu, \mu)$ интерпретируется как фермионный пропагатор на римановой поверхности.

Пусть дана некоторая функция $K(\nu, \mu)$ с простым полюсом при $\nu = \mu$. Тогда уравнение (П.2) может быть прочитано не как тождество, а как *определение* левой части. Встав на эту точку зрения, мы можем вообще забыть про зависимость от фоновых времен $t_k^{(0)}$ (которые предполагаются постоянными). Формула (П.2) дает решение билинейных уравнений для τ -функции в мивовских переменных в виде конечномерного детерминанта.

Для иерархии 2ЦТ преобразование Мивы вводится аналогично. Теперь τ -функция $\tau_n(t_1, t_2, \dots; \bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots) \equiv \tau_n(t; \bar{t})$ зависит от дискретной переменной n и двух бесконечных наборов непрерывных времен $t_i, \bar{t}_i$. Положим

$$\begin{aligned} t_k &= t_k^{(0)} - \frac{1}{k} \sum_{\alpha \in I} p_{\alpha} \mu_{\alpha}^{-k}, \\ \bar{t}_k &= \bar{t}_k^{(0)} - \frac{1}{k} \sum_{\alpha \in \bar{I}} \bar{p}_{\alpha} \bar{\mu}_{\alpha}^k, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

где $\bar{\mu}_{\alpha}$ — второй набор мивовских переменных с кратностями $\bar{p}_{\alpha}$.

Справедлив следующий аналог соотношения (П.2):

$$\begin{aligned} \tau_{n-N}\left(t^{(0)} - \sum_{\alpha=1}^N [\mu_{\alpha}^{-1}]; \bar{t}^{(0)} + \sum_{\alpha=1}^N [\bar{\mu}_{\alpha}]\right) &= \\ &= \frac{\tau_n(t^{(0)}; \bar{t}^{(0)}) \prod_{\alpha=1}^N \mu_{\alpha}^{N-1}}{\prod_{\alpha<\beta}^N (\mu_{\alpha} - \mu_{\beta}) (\bar{\mu}_{\beta} - \bar{\mu}_{\alpha})} \det_{1 \leq \alpha, \beta \leq N} J_n(\mu_{\alpha}, \bar{\mu}_{\beta}), \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

где

$$J_n(\mu, \bar{\mu}) = \frac{\tau_{n-1}(t^{(0)} - [\mu^{-1}]; \bar{t}^{(0)} + [\bar{\mu}])}{\tau_n(t^{(0)}; \bar{t}^{(0)})}. \quad (\text{П.8})$$

В этом случае функция $J_n(\mu, \bar{\mu})$ уже не обязана иметь полюс при $\mu = \bar{\mu}$.

Дискретные потоки. Разностные уравнения для τ -функций, собранные в гл. 2, получаются, если зафиксировать мивовские переменные μ_α и рассматривать зависимость от их кратностей p_α . Приведем несколько примеров.

ПРИМЕР 1. Положим

$$\tau^{p_1, p_2, p_3} = \tau\left(t^{(0)} - \sum_{\alpha=1}^3 p_\alpha [\mu_\alpha^{-1}]\right) \quad (\text{П.9})$$

и рассмотрим

$$\tilde{t}^{(0)} = t^{(0)} - \sum_{\alpha=1}^3 p_\alpha [\mu_\alpha^{-1}]$$

как новый “фон”. Из (П.4) имеем

$$\begin{aligned} \tau^{p_1+1} &= \tilde{\varphi}_1(\mu_1), \\ \tau^{p_1+1, p_2+1} &= \frac{\begin{vmatrix} \tilde{\varphi}_1(\mu_1) & \tilde{\varphi}_1(\mu_2) \\ \tilde{\varphi}_2(\mu_1) & \tilde{\varphi}_2(\mu_2) \end{vmatrix}}{\mu_1 - \mu_2} \end{aligned} \quad (\text{П.10})$$

с некоторыми функциями $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$. Составим заведомо равный нулю детерминант

$$0 = \begin{vmatrix} \tilde{\varphi}_1(\mu_1) & \tilde{\varphi}_1(\mu_2) & \tilde{\varphi}_1(\mu_3) \\ \tilde{\varphi}_1(\mu_1) & \tilde{\varphi}_1(\mu_2) & \tilde{\varphi}_1(\mu_3) \\ \tilde{\varphi}_2(\mu_1) & \tilde{\varphi}_2(\mu_2) & \tilde{\varphi}_2(\mu_3) \end{vmatrix} \quad (\text{П.11})$$

с двумя одинаковыми строками и разложим его по первой строке. Используя формулы (П.10), получим уравнение (2.7). Так как его коэффициенты не зависят от выбранного фона, оно имеет место для любых значений p_1, p_2, p_3 .

ПРИМЕР 2. Повторяя эти рассуждения для

$$\tau_{p_0}^{p_1, p_2, p_3} = \tau\left(t^{(0)} + p_0([\mu_0^{-1}] - [\nu^{-1}]) + \sum_{\alpha=1}^3 p_\alpha([\nu^{-1}] - [\mu_\alpha^{-1}])\right)$$

и используя (П.2), придем к уравнению (2.10).

ПРИМЕР 3. В (П.7) положим $N = 2$, $\mu_1 = \mu$, $\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}$, $\mu_2 \rightarrow \infty$, $\bar{\mu}_2 \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} &\tau_{n-2}(t^{(0)} - [\mu^{-1}]; \bar{t}^{(0)} + [\bar{\mu}]) \tau_n(t^{(0)}; \bar{t}^{(0)}) = \\ &= \frac{\mu}{\bar{\mu}} \begin{vmatrix} \tau_{n-1}(t^{(0)} - [\mu^{-1}]; \bar{t}^{(0)} + [\bar{\mu}]) & \tau_{n-1}(t^{(0)} - [\mu^{-1}]; \bar{t}^{(0)}) \\ \tau_{n-1}(t^{(0)}; \bar{t}^{(0)} + [\bar{\mu}]) & \tau_{n-1}(t^{(0)}; \bar{t}^{(0)}) \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{П.12})$$

Введя обозначение

$$\tau_n^{l, \bar{l}} = \tau_n(t^{(0)} - l[\mu^{-1}]; \bar{t}^{(0)} - \bar{l}[\bar{\mu}]), \quad (\text{П.13})$$

получим уравнение

$$\tau_n^{l, \bar{l}+1} \tau_n^{l+1, \bar{l}} - \tau_n^{l, \bar{l}} \tau_n^{l+1, \bar{l}+1} = (\bar{\mu}/\mu) \tau_{n+1}^{l, \bar{l}+1} \tau_{n-1}^{l+1, \bar{l}}. \quad (\text{П.14})$$

ПРИМЕР 4. Пример 1 обобщается следующим образом. Рассмотрим матрицу $N \times N$ со строками $\varphi_1(\mu_i), \varphi_1(\mu_i), \varphi_2(\mu_i), \varphi_3(\mu_i), \dots, \varphi_{N-1}(\mu_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$, так что первые две строки совпадают и детерминант этой матрицы равен нулю. Разложив его по первой строке, как и в примере 1, получим высшее уравнение Хироты (7.1).

ПРИМЕР 5. Наконец, мы покажем, как вывести уравнение Хироты из (П.4) “в лоб”⁹⁾. Если две или больше переменных μ_α совпадают, числитель и знаменатель в правой части (П.4) обращаются в нуль. Раскрывая неопределенность, получим

$$\tau \left(t^{(0)} - \sum_{\alpha=1}^N p_\alpha [\mu_\alpha^{-1}] \right) = \frac{\det(M_{ij}^{(\mathcal{N})})}{\prod_{\alpha < \beta}^N (\mu_\alpha - \mu_\beta)^{p_\alpha p_\beta}}, \quad 1 \leq i, j \leq \mathcal{N}, \quad (\text{П.15})$$

где среди μ_α теперь нет совпадающих. Здесь

$$\mathcal{N} \equiv \sum_{\alpha=1}^N p_\alpha,$$

$M_{ij}^{(\mathcal{N})}$ – матрица $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ со строками

$$\begin{aligned} & \varphi_i(\mu_1), \quad \varphi'_i(\mu_1), \quad \varphi''_i(\mu_1), \quad \dots, \quad \varphi_i^{(p_1-1)}(\mu_1), \\ & \varphi_i(\mu_2), \quad \varphi'_i(\mu_2), \quad \varphi''_i(\mu_2), \quad \dots, \quad \varphi_i^{(p_2-1)}(\mu_2), \\ & \dots \dots \dots \varphi_i(\mu_N), \quad \varphi'_i(\mu_N), \quad \varphi''_i(\mu_N), \quad \dots, \quad \varphi_i^{(p_N-1)}(\mu_N), \quad 1 \leq i \leq \mathcal{N}. \end{aligned} \quad (\text{П.16})$$

Нам понадобится тождество Якоби для детерминантов:

$$D[i_1 | j_1] D[i_2 | j_2] - D[i_1 | j_2] D[i_2 | j_1] = D[i_1, i_2 | j_1, j_2] D, \quad i_1 < i_2, j_1 < j_2. \quad (\text{П.17})$$

Здесь D – детерминант квадратной матрицы, а $D[i_1, i_2 | j_1, j_2]$ означает минор этой матрицы с выкинутыми строками $i_{1,2}$ и выкинутыми столбцами $j_{1,2}$. Применяя тождество Якоби к матрице $M_{ij}^{(\mathcal{N})}$ в (П.15) для

$$i_1 = \mathcal{N} - 1, \quad i_2 = \mathcal{N}, \quad j_1 = \sum_{\alpha=1}^a p_\alpha, \quad j_2 = j_1 + \sum_{\alpha=a+1}^b p_\alpha, \quad 1 \leq a < b \leq N,$$

мы получим в сокращенных обозначениях

$$(\mu_a - \mu_b) \tau \tau^{p_a-1, p_b-1} = \tau^{p_b-1} \hat{\tau}^{p_a-1} - \tau^{p_a-1} \hat{\tau}^{p_b-1}, \quad (\text{П.18})$$

где $\hat{\tau}$ определяется той же формулой (П.15) с матрицей $\widehat{M}_{ij}^{(\mathcal{N}-1)} = M_{ij}^{(\mathcal{N}-1)}$ для $1 \leq i \leq \mathcal{N} - 2$, $\widehat{M}_{\mathcal{N}-1, j}^{(\mathcal{N}-1)} = M_{\mathcal{N}, j}^{(\mathcal{N})}$.

Пусть μ_c – третья переменная Мивы (отличная от μ_a, μ_b) с кратностью p_c , не указанной явно в (П.18). Умножим это равенство на τ^{p_c-1}/τ , напомним затем еще два аналогичных равенства, полученных циклическими перестановками индексов a, b, c , и сложим все три равенства. В результате мы придем к уравнению (2.7).

⁹⁾ Следующие ниже выкладки взяты из [41].

ЗАМЕЧАНИЕ. Кратности мивовских переменных задают дискретные потоки, которые можно отождествить с дискретными потоками из глав 3 и 4, если раз и навсегда зафиксировать метки λ_0 и λ_1 , поместив одну из них на бесконечность, а вторую в ноль: $\lambda_0 = \infty$, $\lambda_1 = 0$. (Чтобы работать с меткой на бесконечности, нужно изменить нормировку.)

Непрерывный предел. Как видно из (П.1), величина μ_α^{-1} , обратная мивовской переменной, играет роль постоянной решетки для соответствующего дискретного потока. Переход к непрерывным уравнениям должен заключаться в том, что μ_α стремится к бесконечности с одновременным изменением масштаба переменной p_α .

Вот типичный пример (иерархия КП). (Здесь мы следуем работе [30].) Введем три (вообще говоря, различные) постоянные решетки $\varepsilon_i = \mu_i^{-1}$, $i = 1, 2, 3$, и сделаем растяжения $p_i \rightarrow p_i/\varepsilon_i$. Перепишем КП-подобную форму уравнения Хироты (2.7) через D -операторы Хироты (1.2):

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)e^{-(\varepsilon_1/2)D_{p_1} + (\varepsilon_2/2)D_{p_2} + (\varepsilon_3/2)D_{p_3}} + \\ & + \varepsilon_2(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)e^{(\varepsilon_1/2)D_{p_1} - (\varepsilon_2/2)D_{p_2} + (\varepsilon_3/2)D_{p_3}} + \\ & + \varepsilon_3(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)e^{(\varepsilon_1/2)D_{p_1} + (\varepsilon_2/2)D_{p_2} - (\varepsilon_3/2)D_{p_3}}) \tau \cdot \tau = 0. \end{aligned} \quad (\text{П.19})$$

Это соотношение служит “производящей функцией” для части непрерывной иерархии КП. Чтобы это увидеть, выразим операторы D_{p_i} через производные Хироты по непрерывным временам t_k :

$$D_{p_i} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \varepsilon_i^{k-1} D_{t_k}, \quad i = 1, 2, 3$$

(см. (П.1)). Подставляя их в (П.19) и разлагая в степенной ряд по ε_i , получим

$$\begin{aligned} & \left(\varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \varepsilon_1^j \varepsilon_2^k \varepsilon_3^l \mathcal{P}_j \left(\frac{1}{2} \tilde{D} \right) \mathcal{P}_k \left(-\frac{1}{2} \tilde{D} \right) \mathcal{P}_l \left(-\frac{1}{2} \tilde{D} \right) + \right. \\ & + \varepsilon_2(\varepsilon_3 - \varepsilon_1) \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \varepsilon_1^j \varepsilon_2^k \varepsilon_3^l \mathcal{P}_j \left(-\frac{1}{2} \tilde{D} \right) \mathcal{P}_k \left(\frac{1}{2} \tilde{D} \right) \mathcal{P}_l \left(-\frac{1}{2} \tilde{D} \right) + \\ & \left. + \varepsilon_3(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \varepsilon_1^j \varepsilon_2^k \varepsilon_3^l \mathcal{P}_j \left(-\frac{1}{2} \tilde{D} \right) \mathcal{P}_k \left(-\frac{1}{2} \tilde{D} \right) \mathcal{P}_l \left(\frac{1}{2} \tilde{D} \right) \right) \tau \cdot \tau = 0, \end{aligned} \quad (\text{П.20})$$

где $\tilde{D} \equiv (D_{t_1}, D_{t_2}/2, \dots, D_{t_k}/k, \dots)$ и $\mathcal{P}_j(t)$ — полиномы Шура, определяемые по формуле

$$\exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k z^k \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{P}_m(t) z^m. \quad (\text{П.21})$$

Сравнивая коэффициенты при $\varepsilon_1^j \varepsilon_2^k \varepsilon_3^l$, мы придем к бесконечной последовательности уравнений

$$\begin{vmatrix} \mathcal{P}_{j-1} \left(\frac{1}{2} \tilde{D} \right) & \mathcal{P}_{j-1} \left(-\frac{1}{2} \tilde{D} \right) & \mathcal{P}_j \left(-\frac{1}{2} \tilde{D} \right) \\ \mathcal{P}_{k-1} \left(\frac{1}{2} \tilde{D} \right) & \mathcal{P}_{k-1} \left(-\frac{1}{2} \tilde{D} \right) & \mathcal{P}_k \left(-\frac{1}{2} \tilde{D} \right) \\ \mathcal{P}_{l-1} \left(\frac{1}{2} \tilde{D} \right) & \mathcal{P}_{l-1} \left(-\frac{1}{2} \tilde{D} \right) & \mathcal{P}_l \left(-\frac{1}{2} \tilde{D} \right) \end{vmatrix} \tau \cdot \tau = 0, \quad (\text{П.22})$$

которая при $1 \leq j < k < l$ образует подмножество в полной иерархии КП.

Лидирующий член при $\varepsilon_i \rightarrow 0$ в (П.20) получается при $(j, k, l) = (1, 2, 3)$ в (П.22). В этом случае мы находим из (П.22) уравнение КП в билинейной форме:

$$(D_{t_1}^4 - 4D_{t_1}D_{t_3} + 3D_{t_2}^2)\tau \cdot \tau = 0. \quad (\text{П.23})$$

Этот пример еще раз показывает, что дискретные иерархии имеют более прозрачную структуру, чем непрерывные. Непрерывный предел вносит искусственные усложнения.

Список литературы

- [1] *R. Hirota.* J. Phys. Soc. Japan. 1981. V. 50. P. 3785–3791.
- [2] *R. Hirota.* J. Phys. Soc. Japan. 1977. V. 43. P. 1424–1433.
- [3] *R. Hirota.* J. Phys. Soc. Japan. 1977. V. 43. P. 2074–2078.
- [4] *R. Hirota.* J. Phys. Soc. Japan. 1977. V. 43. P. 2079–2086.
- [5] *R. Hirota.* J. Phys. Soc. Japan. 1978. V. 45. P. 321–332.
- [6] *R. Hirota.* J. Phys. Soc. Japan. 1979. V. 46. P. 312–319.
- [7] *I. Krichever, O. Lipan, P. Wiegmann, A. Zabrodin.* Quantum integrable models and discrete classical Hirota equations. Preprint ESI-330. Vienna, 1996; hep-th/9604080.
- [8] *A. Zabrodin.* Discrete Hirota's equation in quantum integrable models. Preprint ITEP-TH-44/96. Moscow, 1996; hep-th/9610039.
- [9] *A. Klümper, P. Pearce.* Physica A. 1992. V. 183. P. 304–350.
- [10] *A. Kuniba, T. Nakanishi, J. Suzuki.* Int. J. Mod. Phys. A. 1994. V. 9. P. 5215–5312.
- [11] *T. Miwa.* Proc. Japan Acad. A. 1982. V. 58. P. 9–12.
- [12] *E. Date, M. Jimbo, T. Miwa.* J. Phys. Soc. Japan. 1982. V. 51. P. 4116–4131.
- [13] *E. Date, M. Jimbo, T. Miwa.* J. Phys. Soc. Japan. 1983. V. 52. P. 388, 761.
- [14] *M. Sato.* RIMS Kokyuroku. 1981. V. 439. P. 30–46.
- [15] *M. Jimbo, T. Miwa.* Publ. RIMS, Kyoto Univ. 1983. V. 19. P. 943–1001.
- [16] *E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa.* Transformation groups for soliton equations. In: Nonlinear Integrable Systems. Eds M. Jimbo, T. Miwa. Singapore: World Scientific, 1983.
- [17] *G. Segal, G. Wilson.* Publ. IHES. 1985. V. 61. P. 5–65.
- [18] *Al. B. Zamolodchikov.* Phys. Lett. B. 1991. V. 253. P. 391–394.
- [19] *F. Ravanini, A. Valleriani, R. Tateo.* Int. J. Mod. Phys. A. 1993. V. 8. P. 1707–1727; *M. J. Martins.* Nucl. Phys. B. 1993. V. 394. P. 339–355.
- [20] *Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков.* УМН. 1976. Т. 31:1. С. 55–136; *И. М. Кривевер.* Нелинейные уравнения и эллиптические кривые. В кн.: Современные проблемы математики, Итоги науки и техники. Т. 23. М.: ВИНТИ АН СССР, 1983. С. 79–136.
- [21] *S. Saito, N. Saitoh.* Phys. Lett. A. 1987. V. 120. P. 322–326; *J. Math. Phys.* 1987. V. 28. P. 1052–1055.
- [22] *K. Ueno, K. Takasaki.* Adv. Studies in Pure Math. 1984. V. 4. P. 1–95.
- [23] *Л. Д. Фаддеев, Л. А. Тхатадзеян.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
- [24] *E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa.* J. Phys. Soc. Japan. 1981. V. 50. P. 3806–3812.
- [25] *V. B. Matveev.* Lett. Math. Phys. 1979. V. 3. P. 213–216; P. 217–222; *V. B. Matveev, M. A. Salle.* Lett. Math. Phys. 1979. V. 3. P. 425–429.
- [26] *V. Spiridonov, A. Zhedanov.* Methods and Applications of Analysis. 1995. V. 2. P. 369–398.
- [27] *Б. А. Дубровин, И. М. Кривевер, С. П. Новиков.* ДАН СССР. 1976. Т. 229:1. С. 15–18.
- [28] *И. М. Кривевер.* ДАН СССР. 1985. Т. 285:1. С. 31–36.
- [29] *A. Orlov.* Symmetries for unifying different soliton systems into a single integrable hierarchy. Preprint IINS/Oce-04/03. Moscow, 1991; *A. Orlov, S. Rauch-Wojciechowski.* Physica D. 1993. V. 69. P. 77–84.
- [30] *Y. Ohta, R. Hirota, S. Tsujimoto, T. Imai.* J. Phys. Soc. Japan. 1993. V. 62. P. 1872–1886.
- [31] *Ю. Сурис.* Алгебра и анализ. 1990. Т. 2. С. 141–154; *Yu. Suris.* Phys. Lett. A. 1990. V. 145. P. 113–119.
- [32] *S. N. M. Ruijsenaars.* Commun. Math. Phys. 1990. V. 133. P. 217–247.

- [33] *Yu. Suris*. J. Phys. A. 1996. V. 29. P. 451–465; A collection of integrable systems of the Toda type in continuous and discrete time, with 2×2 Lax representations, solv-int/9703004.
- [34] *Y. Ohta, K. Kajiwara, J. Matsukidaira, J. Satsuma*. Casorati determinant solution of the relativistic Toda lattice equation, solv-int/9304002.
- [35] *S. Kharchev, A. Mironov, A. Zhedanov*. Int. J. Mod. Phys. A. 1997. V. 12. P. 2675–2724.
- [36] *А. Ю. Волков, Л. Д. Фаддеев*. ТМФ. 1992. Т. 92. С. 207–214; *L. D. Faddeev*. Current-like variables in massive and massless integrable models. In: Lectures at E. Fermi Summer School. Varenna, 1994; hep-th/9406196.
- [37] *A. Bobenko, N. Kutz, V. Pinkall*. Phys. Lett. A. 1993. V. 177. P. 399–404.
- [38] *D. Lebedev, A. Orlov, S. Pakuliak, A. Zabrodin*. Phys. Lett. A. 1991. V. 160. P. 166–172.
- [39] *R. Hirota*. J. Phys. Soc. Japan. 1987. V. 56. P. 4285–4288.
- [40] *М. Концевич*. Функц. анализ и его прилож. 1991. Т. 25:2. С. 50–57.
- [41] *S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, A. Zabrodin*. Nucl. Phys. B. 1992. V. 380. P. 181–240.

Поступила в редакцию 20.VI.1997 г.

A. V. Zabrodin

A SURVEY OF HIROTA'S DIFFERENCE EQUATIONS

A review of selected topics in Hirota's bilinear difference equation (HBDE) is given. This famous 3-dimensional difference equation is known to provide a canonical integrable discretization for most important types of soliton equations. Similarly to the continuous theory, HBDE is a member of an infinite hierarchy. The central point of our exposition is a discrete version of the zero curvature condition explicitly written in the form of discrete Zakharov–Shabat equations for M -operators realized as difference or pseudo-difference operators. A unified approach to various types of M -operators and zero curvature representations is suggested. Different reductions of HBDE to 2-dimensional equations are considered. Among them discrete counterparts of the KdV, sine-Gordon, Toda chain, relativistic Toda chain and other typical examples are discussed in detail.