Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Бормисов, Е. С. Гудкова, Ф. Х. Мукминов, Об интегрируемости гиперболических систем типа уравнения Риккати, *ТМФ*, 1997, том 113, номер 2, 261–275

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1076>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 15:33:49

А. А. Бормисов*, Е. С. Гудкова*, Ф. Х. Мукминов*
**ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ
СИСТЕМ ТИПА УРАВНЕНИЯ РИККАТИ**

Рассматриваются уравнения вида $U_{xy} = U * U_x$. Здесь $U(x, y)$ – функция, принимающая значения в произвольной конечномерной алгебре T над полем $\mathbb{C}$. Показано, что с каждым таким уравнением естественно связаны две характеристические алгебры Ли L_x и L_y . Определено понятие $\mathbb{Z}$ -градуированной алгебры Ли $\mathfrak{G}$, соответствующей уравнению. Доказано, что для каждого рассматриваемого уравнения соответствующую алгебру $\mathfrak{G}$ можно взять в виде прямой суммы векторных пространств L_x и L_y , определив коммутаторы элементов из L_x и L_y при помощи соотношений нулевой кривизны. В предположении, что алгебра T не имеет левосторонних идеалов, проведена классификация рассматриваемых уравнений с конечномерными характеристическими алгебрами Ли L_x и L_y . Все эти уравнения интегрируемы по Дарбу.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] рассмотрено следующее нелинейное гиперболическое уравнение:

$$U_{xy} = [[U, A], U_x], \quad (1)$$

где U – функция со значениями в произвольной конечномерной алгебре Ли $\mathfrak{A}$, A – постоянный элемент $\mathfrak{A}$. Уравнение (1) является условием совместности переопределенной линейной системы

$$L(\Psi) = \Psi_x - \frac{1}{\lambda} U_x \Psi = 0, \quad A(\Psi) = \Psi_y - \left(\lambda A + [U, A] \right) \Psi = 0. \quad (2)$$

С помощью (L, A) -пары (2) уравнение (1) может быть проинтегрировано методом обратной задачи рассеяния. В [2–4] подробно рассмотрен случай $\mathfrak{A} = sl(2)$.

Уравнение (1) представляет собой систему вида

$$u_{xy}^i = C_{jk}^i u^j u_x^k, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3)$$

где $U = u^i e_i$, $e_1, \dots, e_N$ – базис $\mathfrak{A}$, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Константы C_{jk}^i определяются координатами элемента A и структурными константами алгебры Ли $\mathfrak{A}$.

*Стерлитамакский государственный педагогический институт, Стерлитамак, Россия

В данной работе мы рассматриваем класс систем вида (3) с произвольными коэффициентами C_{jk}^i . Отметим, что он содержит в качестве подкласса системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$u_y^i = \alpha_{jk}^i u^j u^k + f^i(y), \quad i = 1, \dots, N. \quad (4)$$

А именно, если $C_{jk}^i = C_{kj}^i$, то уравнение (3) можно проинтегрировать по x и получить в результате систему вида (4). Поэтому в каком-то смысле системы (3) являются двумерным обобщением уравнения Риккати.

Отметим, что класс систем (3) чрезвычайно богат интегрируемыми случаями.

В качестве первого примера рассмотрим уравнение

$$U_{xy} = [U, U_x], \quad (5)$$

где U — функция со значениями в произвольной конечномерной алгебре Ли $\mathfrak{A}$. В работе [5] показано, что последнее уравнение эквивалентно обыкновенному дифференциальному уравнению

$$Y_x = yY\beta(x), \quad Y(0, y) = \alpha(y),$$

где $\beta(x)$ и $\alpha(y)$ — произвольные функции со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{A}$ и ее группе Ли, соответственно. Общее решение уравнения (5) выражается через Y формулой

$$U(x, y) = Y_y Y^{-1}.$$

Классу (3) принадлежат также системы вида

$$u_{xy}^i = a_j^i u^j u_x^i, \quad (6)$$

где a_j^i — элементы матрицы Картана простой алгебры Ли или алгебры Каца–Мули ранга N . Любая система (6) дифференциальной подстановкой $v^i = \ln(u_x^i)$ связана с соответствующей двумеризованной цепочкой Тоды (см., например, [6]) и поэтому является точно интегрируемой.

Как (5), так и (6) относятся к системам, связанным с $\mathbb{Z}$ -градуированными алгебрами Ли.

Напомним, что алгебра Ли $\mathfrak{G} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{G}_i$ называется $\mathbb{Z}$ -градуированной, если $\mathfrak{G}_i$ — конечномерные векторные подпространства такие, что $[\mathfrak{G}_k, \mathfrak{G}_j] \subseteq \mathfrak{G}_{k+j}$. Ясно, что $\mathfrak{G}_0$ является подалгеброй в $\mathfrak{G}$.

Пусть $U(x, y)$ — функция со значениями в $\mathfrak{G}_{-1}$ и $A \in \mathfrak{G}_1$ — ненулевой элемент. Рассмотрим уравнение (1). Ясно, что и левая, и правая части (1) лежат в $\mathfrak{G}_{-1}$. Представляя U в виде $U = u^i t_i$, где $t_1, \dots, t_N$ — базис в $\mathfrak{G}_{-1}$, приходим к системе вида (3). В этом случае мы будем говорить, что алгебра $\mathfrak{G}$ порождает систему (3). Если же алгебра $\mathfrak{G}$ и элемент A таковы, что алгебра Ли $\mathfrak{G}_0$ порождается множеством $[A, \mathfrak{G}_{-1}]$, то будем говорить, что пара $(\mathfrak{G}, A)$ соответствует системе (3). Ясно, что упомянутая в начале статьи система из работы [1] порождается алгеброй Ли $\mathfrak{G}$, состоящей из полиномов Лорана с коэффициентами из $\mathfrak{A}$ и градуировкой $\mathfrak{G}_i = \mathfrak{A}\lambda^i$. Если же в качестве $\mathfrak{G}$ выбрать полиномы с неотрицательными степенями λ и коэффициентами из $\mathfrak{A}$ с градуировкой $\mathfrak{G}_{-i} = \mathfrak{A}\lambda^i$, $i = 0, 1, 2, \dots$, и положить $\mathfrak{G}_1 = \{A\}$, $A = \partial/\partial\lambda$, $\mathfrak{G}_i = 0$, $i \geq 2$, то получим уравнение (5).

Если интерпретировать постоянные C_{jk}^i как структурные константы некоторой конечномерной (вообще говоря, некоммутативной и неассоциативной) алгебры T с умножением $*$ и считать $U = u^i e_i$ (e_i – базис в T) элементом этой алгебры, то система (3) запишется в компактной форме:

$$U_{xy} = U * U_x. \quad (7)$$

Часто формальные выкладки, связанные с системой (3), удобно проводить в терминах алгебры T .

В случае, если система (3) порождена $\mathbb{Z}$ -градуированной алгеброй Ли $\mathfrak{G}$, в пространстве $\mathfrak{G}_{-1}$ формула $X * Y = [[X, A], Y]$ задает структуру алгебры T .

Легко проверить, что для любой $\mathbb{Z}$ -градуированной алгебры $\mathfrak{G}$ уравнение (1) допускает представление нулевой кривизны $L_y - A_x = [L, A]$, где $L = \partial/\partial x - U_x$, $A = \partial/\partial y - (A + [U, A])$. Однако, по-видимому, это уравнение точно интегрируется только в случае, если $\mathfrak{G}$ имеет конечный рост [7].

Одним из основных результатов работы является утверждение о том, что каждая система вида (3) порождается соответствующей $\mathbb{Z}$ -градуированной алгеброй Ли.

Следуя работе Каца, будем называть $\mathbb{Z}$ -градуированную алгебру Ли $\mathfrak{G} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{G}_i$ транзитивной, если

для $x \in \mathfrak{G}_i$, $i \geq 0$, из $[x, \mathfrak{G}_{-1}] = 0$ следует $x = 0$,

для $x \in \mathfrak{G}_i$, $i \leq 0$, из $[x, \mathfrak{G}_1] = 0$ следует $x = 0$.

ТЕОРЕМА 1. *Для любой системы (3) существуют соответствующие ей $\mathbb{Z}$ -градуированная алгебра Ли $\mathfrak{G} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{G}_i$ и элемент $A \in \mathfrak{G}_1$. Если T не является алгеброй Ли и не содержит левосторонних идеалов, то эта алгебра Ли транзитивна.*

В работах [8, 9] для систем типа двумеризованной цепочки Тоды было определено понятие характеристической алгебры Ли. В работе [10] указано, что системы гиперболического типа обладают двумя характеристическими алгебрами Ли (по одной вдоль каждой характеристики). Там же было высказано предположение, что для систем вида (3) и более общих соответствующая $\mathbb{Z}$ -градуированная алгебра может быть получена “склеивкой” двух характеристических алгебр Ли при помощи соотношений представления нулевой кривизны. В этом случае алгебра была названа полной.

Характеристические алгебры Ли векторных полей определяются на бесконечно продолженной системе (3). Введем обозначения $p_i = D_y^i U$, $q_i = D_x^{i+1} U$, $i = 0, 1, 2, \dots$, где D_x и D_y – операторы полных производных вследствие уравнения (7). Переменные p_i, q_i являются элементами алгебры T и в выбранном базисе имеют некоторые координаты $p_i = (p_i^1, \dots, p_i^N)$, $q_i = (q_i^1, \dots, q_i^N)$.

Система (3), записанная в виде (7), естественным образом продолжается на переменные $p_i, q_i, i = 0, 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} (p_0)_x &= q_0, \quad (p_1)_x = D_y q_0 = p_0 * q_0, \\ (p_2)_x &= D_y^2 q_0 = p_1 * q_0 + p_0 * (p_0 * q_0), \dots; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} (q_0)_y &= p_0 * q_0, \quad (q_1)_y = D_x(p_0 * q_0) = q_0 * q_0 + p_0 * q_1, \\ (q_2)_y &= D_x^2(p_0 * q_0) = q_1 * q_0 + 2q_0 * q_1 + p_0 * q_2, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть $A[p]$, $A[q]$ – алгебры гладких функций от конечного числа переменных p_i^j, q_i^j , соответственно, $i = 0, 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots, N$. Из формул (8) и (9) следует существование таких элементов $X_j \in \text{Der } A[p]$, что для любой функции $v \in A[p]$

$$D_x(v) = \sum_{j=1}^N q_0^j X_j(v). \quad (10)$$

Аналогично имеем

$$D_y(w) = Y_0(w) + \sum_{j=1}^N p^j Y_j(w), \quad Y_j \in \text{Der } A[q], \quad (11)$$

для любой функции $w \in A[q]$. Поэтому соотношение $D_x(v) = 0$ эквивалентно переопределенной системе $X_j(v) = 0, j = 1, \dots, N$, а соотношение $D_y(w) = 0$ – системе $Y_j(w) = 0, j = 0, \dots, N$.

Подалгебра $L_x \subset \text{Der } A[p]$, порождаемая как алгебра Ли элементами $X_j, j = 1, \dots, N$, называется x -характеристической алгеброй Ли системы (3). Аналогично $L_y \subset \text{Der } A[q]$ – y -характеристическая алгебра – порождается векторными полями $Y_j, j = 0, \dots, N$.

Следующая теорема доказывает упомянутое выше предположение для систем (3).

ТЕОРЕМА 2. Пусть L_x и L_y – характеристические алгебры системы (3). Тогда существуют $\mathbb{Z}$ -градуированная алгебра Ли $\mathfrak{G}$ и элемент A , соответствующие системе (3), и изоморфизмы $\varphi: \bigoplus_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{G}_{-i} \rightarrow L_x$ и $\psi: \bigoplus_{i=0}^{+\infty} \mathfrak{G}_i \rightarrow L_y$.

Важным следствием этой теоремы является интегрируемость по Дарбу систем, соответствующих конечномерным алгебрам Ли $\mathfrak{G}$.

Рассмотрим случай, когда алгебра Ли $\mathfrak{G}$ конечномерна. Сюда, например, относятся системы (6), построенные по матрице Картана простой алгебры Ли $\mathfrak{G}$. Они соответствуют выбору канонической $\mathbb{Z}$ -градуировки в $\mathfrak{G}$ [11]. Кроме канонической, на простых алгебрах Ли существуют и другие $\mathbb{Z}$ -градуировки, которые приводят, вообще говоря, к другим системам. Ниже будет рассмотрен случай стандартных градуировок [7].

Система (3) называется интегрируемой по Дарбу, если существуют функции $v_i(p_0, \dots, p_{n_i}), w_i(q_0, \dots, q_{k_i}), i = 1, \dots, N$, удовлетворяющие условию независимости в главном

$$\det \left[\frac{\partial v_1}{\partial p_{n_1}}, \dots, \frac{\partial v_N}{\partial p_{n_N}} \right] \neq 0, \quad \det \left[\frac{\partial w_1}{\partial q_{k_1}}, \dots, \frac{\partial w_N}{\partial q_{k_N}} \right] \neq 0$$

такие, что

$$D_x(v_i) = 0, \quad D_y(w_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть характеристические алгебры системы (3) L_x и L_y конечномерны. Тогда система (3) интегрируема по Дарбу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы аналогично доказательству соответствующего утверждения для двумеризованной цепочки Тоды [9] и поэтому опускается.

Известно, что нахождение общего решения системы, интегрируемой по Дарбу, сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений, обладающих богатым запасом лиевских симметрий.

Будем называть $\mathbb{Z}$ -градуированную алгебру Ли $\mathfrak{G} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{G}_i$ неприводимой, если представление $\mathfrak{G}_0$ на $\mathfrak{G}_{-1}$ неприводимо.

В этой работе мы ограничиваемся рассмотрением только таких систем вида (3), которые не содержат в себе подсистем. Легко видеть, что отсутствие подсистем в (3) эквивалентно отсутствию двусторонних идеалов в алгебре T с операцией $*$. Если наложить более жесткое условие — отсутствие левосторонних идеалов в T , то, как легко видеть, для пары $(\mathfrak{G}, A)$, соответствующей системе (3), оно эквивалентно неприводимости представления $\mathfrak{G}_0$ на $\mathfrak{G}_{-1}$. В этом случае согласно теореме 1 мы можем воспользоваться результатами работы [7] о классификации транзитивных $\mathbb{Z}$ -градуированных неприводимых алгебр Ли. В [7], в частности, утверждается, что если конечномерная транзитивная $\mathbb{Z}$ -градуированная алгебра неприводима, то она совпадает с одной из конечномерных простых алгебр Ли в одной из стандартных градуировок. Апостериори оказывается, что за исключением систем, связанных с алгебрами G_2 и F_4 в стандартных градуировках, оставшиеся системы либо имеют подсистемы, либо соответствующая алгебра Ли в стандартной градуировке имеет высоту 1, т.е. $\mathfrak{G}_i = 0$ при $|i| > 1$. В последнем случае алгебра T оказывается йордановой [12], а соответствующая система представляет собой производную по x от системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4).

Алгебре G_2 в стандартной градуировке соответствует система

$$\begin{cases} u_{xy}^1 = 2u^1u_x^1 - 3u^3u_x^2 - u^4u_x^1, \\ u_{xy}^2 = u^1u_x^2 + u^2u_x^1 - 4u^3u_x^3, \\ u_{xy}^3 = u^2u_x^2 + u^3u_x^4 + u^4u_x^3, \\ u_{xy}^4 = 2u^4u_x^4 - 3u^2u_x^3 - u^1u_x^4, \end{cases} \quad (12)$$

не содержащая подсистем. Интересно, что в той же градуировке иной выбор элемента A приводит к линейно-неэквивалентной системе (см. раздел 4). В другой стандартной градуировке алгебры G_2 система состоит из двух уравнений и имеет подсистему.

Системы, соответствующие алгебрам Ли конечного роста, предполагается рассмотреть в другой работе.

1. ПОСТРОЕНИЕ $\mathbb{Z}$ -ГРАДУИРОВАННОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ, СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ СИСТЕМЕ

В этом разделе будет доказана теорема 1.

Нам понадобятся определение локальной алгебры Ли и некоторые связанные с ним утверждения из работы [7].

Пусть $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{-1} \oplus \mathfrak{G}_0 \oplus \mathfrak{G}_1$ — прямая сумма конечномерных векторных пространств. Пусть во всех случаях, когда $|i + j| \leq 1$, определена антикоммутативная билинейная операция $\mathfrak{G}_i \times \mathfrak{G}_j \rightarrow \mathfrak{G}_{i+j}$ ($(x, y) \rightarrow [xy]$), причем для любой тройки векторов выполняется тождество Якоби, если все коммутаторы, входящие в это тождество, определены. Тогда $\tilde{\mathfrak{G}}$ мы будем называть локальной алгеброй Ли.

Транзитивность, неприводимость и гомоморфизм локальных алгебр определяются так же, как и для градуированных алгебр Ли.

Градуированной алгебре $\mathfrak{G} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{G}_i$ соответствует локальная алгебра Ли $\mathfrak{G}_{-1} \oplus \mathfrak{G}_0 \oplus \mathfrak{G}_1$, которую мы будем называть локальной частью алгебры Ли $\mathfrak{G}$.

Градуированная алгебра Ли $\mathfrak{G} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{G}_i$ называется минимальной, если для любой другой градуированной алгебры G' всякий изоморфизм локальных частей алгебр G и G' продолжается до гомоморфизма G' на G .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\tilde{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}_{-1} \oplus \mathfrak{G}_0 \oplus \mathfrak{G}_1$ – локальная алгебра Ли. Существует минимальная градуированная алгебра $\mathfrak{G}$, локальная часть которой изоморфна $\tilde{\mathfrak{G}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Минимальная градуированная алгебра Ли с транзитивной локальной частью транзитивна.

Приступим к ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМЫ 1

Рассмотрим следующие элементы алгебры Ли $\text{Der } A[q]$:

$$B_i^k = \sum_{l=0}^{+\infty} q_l^k \frac{\partial}{\partial q_l^i}, \quad B_i^{jk} = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^l C_l^m q_{m-1}^j q_{l-m}^k \frac{\partial}{\partial q_l^i},$$

где C_l^m – биномиальные коэффициенты, и пусть $H_0 = \{B_i^k\}$, $H_1 = \{B_i^{jk}\}$ – линейные пространства, натянутые на соответствующие множества. Ясно, что все дифференцирования B_i^k и B_i^{jk} линейно независимы. Пусть $t_1, \dots, t_N$ – базис некоторого линейного пространства H_{-1} . Рассмотрим локальную алгебру Ли $H = H_{-1} \oplus H_0 \oplus H_1$ с операцией коммутирования, определенной следующим образом:

$$\begin{aligned} [B_i^k, t_j] &= -\delta_j^k t_i, & [B_i^{jk}, t_p] &= \delta_p^j B_i^k, & [B_i^k, B_m^p] &= \delta_i^p B_m^k - \delta_m^k B_i^p, \\ [B_i^{jk}, B_m^p] &= \delta_i^p B_m^{jk} - \delta_m^j B_i^{pk} - \delta_m^k B_i^{jp} \end{aligned}$$

(последние два коммутатора определены так же, как и в $\text{Der } A[q]$).

Убедимся в корректности такого определения локальной алгебры Ли H . В случае, если коммутаторы не содержат элементов H_{-1} , тождество Якоби выполняется, т.к. $\text{Der } A[q]$ – алгебра Ли. Ясно, что если коммутатор содержит более одного элемента из H_{-1} , то тождество Якоби не определено. Рассмотрим оставшиеся случаи:

1) $[[B_i^k, B_m^p], t_j] = \delta_i^p [B_m^k, t_j] - \delta_m^k [B_i^p, t_j] = -\delta_i^p \delta_j^k t_m + \delta_m^k \delta_j^p t_i$, $[[B_i^k, t_j], B_m^p] + [B_i^k, [B_m^p, t_j]] = -\delta_j^k [t_i, B_m^p] - \delta_j^p [B_i^k, t_m] = -\delta_i^p \delta_j^k t_m + \delta_m^k \delta_j^p t_i$;

2) $[[B_i^{jk}, B_m^p], t_l] = \delta_i^p [B_m^{jk}, t_l] - \delta_m^j [B_i^{pk}, t_l] - \delta_m^k [B_i^{jp}, t_l] = \delta_i^p \delta_l^j B_m^k - \delta_m^j \delta_l^p B_i^k - \delta_m^k \delta_l^j B_i^p$, $[B_i^{jk}, [B_m^p, t_l]] + [[B_i^{jk}, t_l], B_m^p] = -\delta_l^p [B_i^{jk}, t_m] + \delta_l^j [B_i^k, B_m^p] = -\delta_l^p \delta_m^j B_i^k + \delta_l^j \delta_i^p B_m^k - \delta_l^j \delta_m^k B_i^p$.

Таким образом, H – действительно локальная алгебра Ли.

Рассмотрим локальную подалгебру $\mathfrak{G} \subset H$, порожденную элементами $t_1, \dots, t_N$ и $A = C_{jk}^i B_i^{jk}$. Пусть $\mathfrak{G}_i = \mathfrak{G} \cap H_i$, $i = 0, \pm 1$, тогда $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{-1} \oplus \mathfrak{G}_0 \oplus \mathfrak{G}_1$.

Обозначим через $\mathfrak{G}_A$ левую оболочку множества $[\mathfrak{G}_{-1}, A]$, тогда

$$[\mathfrak{G}_{-1}, [\mathfrak{G}_A, A]] \subset [[\mathfrak{G}_{-1}, \mathfrak{G}_A], A] + [\mathfrak{G}_A, \mathfrak{G}_A] \subset \mathfrak{G}_A,$$

а, следовательно, $\mathfrak{G}_A = \mathfrak{G}_0$. Рассмотрим минимальную алгебру Ли $\mathfrak{G}$, локальная часть которой совпадает с $\mathfrak{G}$. Введем обозначения $s_j = [A, t_j] = C_{jk}^i B_i^k$, тогда $[t_k, s_j] = C_{jk}^i t_i$ и алгебра $\mathfrak{G}$ соответствует системе (3). Первое утверждение теоремы доказано.

Докажем транзитивность $\mathfrak{G}$.

Пусть $s \in \mathfrak{G}_1$, $s = a_{jk}^i B_i^{jk}$ — его разложение по базису и $[s, \mathfrak{G}_{-1}] = 0$, тогда $0 = a_{jk}^i [B_i^{jk}, t_p] = a_{pk}^i B_i^k$. Так как B_i^k линейно независимы и номер p произволен, то все $a_{jk}^i = 0$ и $s = 0$.

Аналогично, если $s \in \mathfrak{G}_0$ и $[s, \mathfrak{G}_{-1}] = 0$, то $s = a_k^i B_i^k$, $0 = a_k^i [B_i^k, t_p] = a_p^i t_i$, поэтому все $a_p^i = 0$ и $s = 0$.

Пусть $K = \{t \in \mathfrak{G}_{-1} | [t, \mathfrak{G}_1] = 0\}$. Допустим, что $K \neq \{0\}$. Если $s \in \mathfrak{G}_0$ и $t \in K$, то $[[t, s], \mathfrak{G}_1] = [t, [s, \mathfrak{G}_1]] + [[t, \mathfrak{G}_1], s] = 0$ и $[K, \mathfrak{G}_0] \subseteq K$. Так как отсутствие в T левосторонних идеалов равносильно отсутствию в $\mathfrak{G}_{-1}$ подпространств, инвариантных относительно действия $\mathfrak{G}_0$, то $K = \mathfrak{G}_{-1}$, и т.к. $A \in \mathfrak{G}_1$, то по определению K имеем $[A, \mathfrak{G}_{-1}] = 0$. Последнее равенство по доказанному выше влечет за собой $A = 0$, что невозможно. Таким образом, $K = \{0\}$.

Пусть $K = \{s \in \mathfrak{G}_0 | [s, \mathfrak{G}_1] = 0\}$. Допустим, что $K \neq \{0\}$. Если $s \in K$ и $s' \in \mathfrak{G}_0$, то $[[s, s'], \mathfrak{G}_1] = [s, [s', \mathfrak{G}_1]] + [[s, \mathfrak{G}_1], s'] = 0$ и $[K, \mathfrak{G}_0] \subseteq K$. Обозначим $P = [K, \mathfrak{G}_{-1}]$, тогда по тождеству Якоби и инвариантности K относительно $\mathfrak{G}_0$ имеем

$$[\mathfrak{G}_0, P] = [\mathfrak{G}_0, [K, \mathfrak{G}_{-1}]] = [[\mathfrak{G}_0, K], \mathfrak{G}_{-1}] + [K, \mathfrak{G}_{-1}] \subseteq P.$$

Следовательно, подпространство P также инвариантно относительно действия $\mathfrak{G}_0$. Так как $K \neq \{0\}$, то по доказанному выше и $P \neq \{0\}$, следовательно $P = \mathfrak{G}_{-1}$. Пользуясь определением множества K и его инвариантностью относительно $\mathfrak{G}_0$, устанавливаем, что

$$[\mathfrak{G}_{-1}, \mathfrak{G}_1] = [P, \mathfrak{G}_1] = [[K, \mathfrak{G}_{-1}], \mathfrak{G}_1] \subseteq [K, [\mathfrak{G}_{-1}, \mathfrak{G}_1]] \subseteq K.$$

Однако $[\mathfrak{G}_{-1}, \mathfrak{G}_1]$ порождает $\mathfrak{G}_0$, поэтому $K = \mathfrak{G}_0$ и (по определению K) $[\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1] = 0$. Если так, то $\mathfrak{G}_1 = \{A\}$, $[s_j, A] = 0$ и тогда $0 = [t_k, [s_j, A]] = -C_{jk}^i s_i - [s_j, s_k]$. Имеем $[s_j, s_k] = -C_{jk}^i s_i$ и аналогично $[s_k, s_j] = -C_{kj}^i s_i$, поэтому $(C_{jk}^i + C_{kj}^i) s_i = 0$. Уже доказано, что из $[t, \mathfrak{G}_1] = 0$ следует $t = 0$, т.е. из $[t, A] = 0$ следует $t = 0$, поэтому из $0 = (C_{jk}^i + C_{kj}^i) s_i = [A, (C_{jk}^i + C_{kj}^i) t_i]$ следует $(C_{jk}^i + C_{kj}^i) t_i = 0$. Поскольку $t_1, \dots, t_N$ — базис, то последнее равенство влечет за собой равенства $C_{jk}^i = -C_{kj}^i$ для всех $i, j, k = 1, \dots, N$. Таким образом операция $*$ антикоммутирует. Пусть $U, V, W \in \mathfrak{G}_{-1}$, тогда по определению операции $*$ имеем

$$\begin{aligned} U * (V * W) &= [[U, A], [[V, A], W]] = [[[U, A], [V, A]], W] + [[V, A], [[U, A], W]] = \\ &= [[[[U, A], V], A], W] + [[V, [[U, A], A]], W] + V * (U * W) = \\ &= (U * V) * W + V * (U * W) + [[V, [[U, A], A]], W]. \end{aligned}$$

Так как $[\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1] = 0$, то последний коммутатор в сумме равен нулю и операция $*$ удовлетворяет тождеству Якоби. По условию теоремы T не является алгеброй Ли, следовательно, наше предположение неверно, поэтому $K = \{0\}$ и локальная алгебра $\mathfrak{G}$ транзитивна. Как следует из предложения 2, алгебра $\mathfrak{G}$ также транзитивна. Теорема доказана.

Заметим, что дифференцирования B_i^k и B_i^{jk} введены нами так, что образующие характеристической алгебры L_y выражаются через них формулами

$$Y_j = C_{jk}^i B_i^k \equiv s_j, \quad Y_0 = C_{jk}^i B_i^{jk} \equiv A. \quad (13)$$

2. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ АЛГЕБРЫ

При изучении характеристических алгебр Ли важно знать, как коммутируют их элементы с операторами полных производных D_x и D_y . В соответствующих формулах используются “дифференцирования” f_0 , f_j и g_j , $j = 1, \dots, N$, характеристических алгебр Ли L_x и L_y , соответственно. Слово “дифференцирования” взято нами в кавычки, поскольку эти отображения действуют не на самих характеристических алгебрах Ли, а на некоторых формальных объектах. Перейдем к точным определениям этих отображений.

На множестве формально записанных коммутаторов из элементов X_k , $k = 1, 2, \dots, N$, и их линейных комбинаций введем линейные отображения f_j , $j = 0, 1, \dots, N$ (f_0 на множестве коммутаторов длины не менее 2) по следующим правилам:

1) при $j > 0$ имеем

$$\begin{aligned} f_j(X_k) &= -C_{jk}^i X_i, \\ f_j([X', X'']) &= [f_j(X'), X''] + [X', f_j(X'')], \end{aligned}$$

где X' , X'' – некоторые коммутаторы;

2) при $j = 0$ –

$$\begin{aligned} f_0[X_i, X_j] &= f_i(X_j) - f_j(X_i), \\ f_0[X_i, X'] &= f_i(X') + [X_i, f_0(X')], \\ f_0([X', X'']) &= [f_0(X'), X''] + [X', f_0(X'')], \end{aligned}$$

где X' , X'' – некоторые коммутаторы длины не менее 2.

Рассмотрим множество формально записанных коммутаторов из элементов Y_j , $j = 0, 1, \dots, N$, и их линейных комбинаций.

Пусть Y , Y' – элементы указанного множества. Введем на нем линейные отображения g_k , $k = 1, \dots, N$, по правилам

$$\begin{aligned} g_k(Y_0) &= -Y_k, \\ g_k([Y, Y']) &= [g_k(Y), Y'] + [Y, g_k(Y')], \\ g_k([Y_j, Y]) &= C_{jk}^i g_i(Y) + [Y_j, g_k(Y)], \quad j \neq 0. \end{aligned}$$

Если элемент рассматриваемого множества имеет вид $[Y'', Y]$, где Y'' – коммутатор длины более 1, не содержащий Y_0 , то $[Y'', Y] = [[\tilde{Y}, \hat{Y}], Y] = [\tilde{Y}, [\hat{Y}, Y]] - [\hat{Y}, [\tilde{Y}, Y]]$, где $\tilde{Y}$, $\hat{Y}$ – коммутаторы, длина которых меньше длины Y'' . Продолжая этот процесс, можно коммутатор $[Y'', Y]$ привести единственным образом к линейной комбинации коммутаторов вида $[Y_j, Y']$. Примем $g_k([Y'', Y])$ равным образу этой суммы при отображении g_k .

В некоторых леммах этого раздела мы доказываем требуемые соотношения лишь для отдельных коммутаторов, подразумевая каждый раз, что для их линейных комбинаций утверждение верно в силу линейности отображений f_j, g_k и операции коммутирования.

ЛЕММА 1. *Имеет место соотношение $[D_y, X] = f_0(X) + p_0^j f_j(X)$, где X – коммутатор из X_j длины не менее 2.*

Здесь правая часть равенства после действия формальных операторов f_0, f_j считается элементом $\text{Der } A[p]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что $[D_y, X_k] = -C_{jk}^i p_0^j X_i$. Используя (10), получаем следующие соотношения, предполагая, что операторы действуют на функции из $A[p]$:

$$\begin{aligned} 0 &= [D_y, D_x] = [D_y, q_0^i X_i] = D_y(q_0^i X_i) + q_0^i [D_y, X_i] = \\ &= C_{jk}^i p_0^j q_0^k X_i + q_0^i [D_y, X_i] = q_0^k (C_{jk}^i p_0^j X_i + [D_y, X_k]), \end{aligned}$$

откуда и следует, что $[D_y, X_k] = -C_{jk}^i p_0^j X_i$.

Теперь докажем требуемое соотношение индукцией по длине d коммутатора X .

1. $d = 2$. Подставляя p_0^j в (10), видим, что $X_k(p_0^j) = \delta_k^j$. Отметим попутно, что из этих равенств следует линейная независимость элементов X_k . Далее имеем, что

$$\begin{aligned} [D_y, [X_k, X_l]] &= -[C_{jk}^i p_0^j X_i, X_l] - [X_k, C_{jl}^i p_0^j X_i] = \\ &= -C_{jk}^i p_0^j [X_i, X_l] + C_{lk}^i X_i - C_{jl}^i p_0^j [X_k, X_i] - C_{kl}^i X_i. \end{aligned}$$

Вычислим правую часть доказываемого соотношения:

$$\begin{aligned} f_0[X_k, X_l] + p_0^j f_j[X_k, X_l] &= f_k(X_l) - f_l(X_k) + p_0^j ([f_j(X_k), X_l] + [X_k, f_j(X_l)]) = \\ &= -C_{kl}^i X_i + C_{lk}^i X_i + p_0^j (-C_{jk}^i [X_i, X_l] - C_{jl}^i [X_k, X_i]). \end{aligned}$$

Сравнивая правые части полученных равенств, убеждаемся, что соотношение верно.

2. Пусть для $d \leq m$ утверждение имеет место. Докажем его при $d = m + 1$. Если X – коммутатор длины d , то $X = [X', X'']$, где X' и X'' – коммутаторы длины l и k , соответственно, $l, k \leq m$.

Пусть сначала $k, l > 1$, тогда $X'(p_0^j) = X''(p_0^j) = 0$, и мы имеем, что

$$\begin{aligned} [D_y, [X', X'']] &= [[D_y, X'], X''] + [X', [D_y, X'']] = \\ &= [f_0(X') + p_0^j f_j(X'), X''] + [X', f_0(X'') + p_0^j f_j(X'')] = \\ &= [f_0(X'), X''] + [X', f_0(X'')] + p_0^j ([f_j(X'), X''] + [X', f_j(X'')]) = \\ &= f_0([X', X'']) + p_0^j f_j([X', X'']). \end{aligned}$$

Пусть теперь одно из чисел k и l , например k , равно 1, тогда $X'' = X_l$ при некотором $l = 1, \dots, N$, и мы можем записать

$$\begin{aligned} [D_y, [X', X'']] &= [[D_y, X'], X_l] + [X', [D_y, X_l]] = \\ &= [f_0(X') + p_0^j f_j(X'), X_l] - C_{jl}^i [X', p_0^j X_i] = \\ &= [f_0(X'), X_l] + [p_0^j f_j(X'), X_l] - C_{jl}^i [X', p_0^j X_i] = \\ &= [f_0(X'), X_l] + p_0^j [f_j(X'), X_l] - f_l(X') - C_{jl}^i p_0^j [X', X_i]. \end{aligned}$$

Приведем к такому же виду правую часть соотношения:

$$\begin{aligned} f_0([X', X'']) + p_0^j f_j([X', X'']) &= \\ &= [f_0(X'), X_l] - f_l(X') + p_0^j [f_j(X'), X_l] + p_0^j [X', f_j(X_l)] = \\ &= [f_0(X'), X_l] - f_l(X') + p_0^j [f_j(X'), X_l] - C_{ji}^i p_0^j [X', X_i]. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Имеет место соотношение $[D_x, Y] = q_0^j g_j(Y)$, где Y – коммутатор из Y_j , содержащий Y_0 .*

Правая часть равенства после действия формальных операторов g_j считается элементом $\text{Der } A[q]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем требуемое соотношение индукцией по длине d коммутатора Y .

1. $d = 1$. Используя (11), получаем следующие соотношения, предполагая, что операторы действуют на функции из $A[q]$:

$$\begin{aligned} 0 &= [D_x, D_y] = [D_x, Y_0 + p_0^i Y_i] = [D_x, Y_0] + p_0^i [D_x, Y_i] + D_x(p_0^i) Y_i = \\ &= [D_x, Y_0] + q_0^i Y_i + p_0^i [D_x, Y_i]. \end{aligned}$$

Так как $[D_x, Y_0] + q_0^i Y_i, [D_x, Y_i] \in \text{Der } A[q]$, то из последнего равенства следует, что $[D_x, Y_0] + q_0^i Y_i = 0$ и $[D_x, Y_i] = 0$. Таким образом, $[D_x, Y_0] = -q_0^i Y_i = q_0^i g_i(Y_0)$.

2. Пусть для $d \leq m$ утверждение имеет место. Докажем его при $d = m + 1$. Подставим q_0^i в (11), тогда $Y_0(q_0^i) = 0$, $Y_j(q_0^i) = C_{jk}^i q_0^k$, $i, j = 1, 2, \dots, N$. Очевидно, что если коммутатор Y из элементов Y_j содержит Y_0 , то $Y(q_0^i) = 0$. Если Y – коммутатор длины d , то $Y = [Y', Y'']$, где Y' и Y'' – коммутаторы длины l и k , соответственно, $l, k \leq m$.

Пусть сначала оба элемента Y' и Y'' содержат Y_0 , тогда $Y'(q_0^j) = Y''(q_0^j) = 0$, и мы имеем

$$\begin{aligned} [D_x, [Y', Y'']] &= [[D_x, Y'], Y''] + [Y', [D_x, Y'']] = \\ &= [q_0^j g_j(Y'), Y''] + [Y', q_0^j g_j(Y'')] = \\ &= q_0^j [g_j(Y'), Y''] + q_0^j [Y', g_j(Y'')] = q_0^j g_j([Y', Y'']). \end{aligned}$$

Пусть теперь один из коммутаторов, например Y'' , равен Y_l при некотором $l = 1, 2, \dots, N$, тогда

$$\begin{aligned} [D_x, [Y', Y'']] &= [[D_x, Y'], Y_l] = [q_0^j g_j(Y'), Y_l] = \\ &= q_0^j [g_j(Y'), Y_l] - C_{lk}^j q_0^k g_j(Y') = -q_0^j (C_{lj}^i g_i(Y') + [Y_l, g_j(Y')]) = \\ &= -q_0^j g_j([Y_l, Y']) = q_0^j g_j([Y', Y_l]). \end{aligned}$$

Если Y'' не содержит Y_0 и его длина больше 1, то мы должны рассматривать представление Y в виде суммы коммутаторов вида $[Y_j, \tilde{Y}]$. Ясно, что если для каждого такого коммутатора соотношение имеет место, то оно верно и для их суммы, а значит, и для Y .

Лемма доказана.

Будем говорить, что элементы $T \in \bigoplus_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{G}_{-i}$ и $X \in L_x$ ($s \in \bigoplus_{i=0}^{+\infty} \mathfrak{G}_i$ и $Y \in L_y$) имеют одинаковый вид, если существуют такие их представления в виде линейных комбинаций коммутаторов, что они получаются друг из друга заменой всех символов t_p на символы X_p , (A – на Y_0 и s_j – на Y_j , $j = 1, 2, \dots, N$) и наоборот.

ЛЕММА 3. Если $T \in \mathfrak{G}_{-m}$ и $X \in L_x$ имеют одинаковый вид, то одинаковый вид имеют $[s_j, T]$ и $f_j(X)$ при $m > 0$. Если же $m > 1$, то, кроме того, одинаковый вид имеют $[A, T]$ и $f_0(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

1. Пусть $T = t_k$ и $X = X_k$. Рассмотрим $[s_j, T]$ и $f_j(X)$:

$$\begin{aligned} [s_j, T] &= [s_j, t_k] = -C_{jk}^i t_i, \\ f_j(X) &= f_j(X_k) = -C_{jk}^i X_i. \end{aligned}$$

Как видим, для $m = 1$ утверждение верно.

2. Пусть утверждение верно для $m < p$. Установим его при $m = p$. Пусть T и X – коммутаторы длины p , имеющие одинаковый вид, тогда $T = [T', T'']$ и $X = [X', X'']$, где T', X' имеют длину k , а T'', X'' – длину l ; $k, l < p$, причем T' и X' , а также T'' и X'' имеют одинаковый вид:

$$\begin{aligned} [s_j, T] &= [s_j, [T', T'']] = [[s_j, T'], T''] + [T', [s_j, T'']], \\ f_j(X) &= f_j([X', X'']) = [f_j(X'), X''] + [X', f_j(X'')]. \end{aligned}$$

По предположению индукции правые части равенств имеют одинаковый вид, и мы получаем, что первое утверждение леммы верно.

Аналогично доказывается утверждение для $[A, T]$ и $f_0(X)$.

ЛЕММА 4. Если $s \in \bigoplus_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{G}_i$ и $Y \in \bigoplus_{i=1}^{+\infty} L_y^i$ имеют одинаковый вид, то $[t_k, s]$ и $g_k(Y)$ также имеют одинаковый вид.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится по той же схеме, что и для леммы 3.

Нетрудно проверить, вводя соответствующие веса переменных x, y, u^i , что характеристические алгебры L_x и L_y допускают естественные градуировки $L_x = \bigoplus_{i=1}^{+\infty} L_x^i$, $L_y = \bigoplus_{i=0}^{+\infty} L_y^i$. Пространства L_x^i натянуты на коммутаторы длины i из элементов X_j , $j = 1, \dots, N$. Пространства L_y^i суть линейные оболочки коммутаторов из элементов Y_j , $j = 0, \dots, N$, содержащих элемент Y_0 ровно i раз.

Следующее утверждение дает достаточное условие для того, чтобы некоторый набор коммутаторов в характеристической алгебре L_x был равен нулю.

ЛЕММА 5. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in L_x^i$, $i \geq 2$, – такой набор элементов, при котором для любого l имеет место соотношение $[D_y, \alpha_l] = f^{lj}(p)\alpha_j$, тогда $\alpha_l = 0$, $l = 1, \dots, k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $X_\nu(p_0^r) = \delta_\nu^r$, то из $X \in L_x^i$, $i \geq 2$, следует, что $X(p_0^r) = 0$. Докажем индукцией по s , что в условиях леммы $\alpha_l(p_s^r) = 0$ для любых $l = \overline{1, k}$, $r = \overline{1, n}$, $s \in \mathbb{N}$. Случай $s = 0$ уже рассмотрен. Пусть для $s = m$ утверждение верно, тогда

$$\alpha_l(p_{m+1}^r) = \alpha_l(D_y(p_m^r)) = D_y(\alpha_l(p_m^r)) - f^{lj}\alpha_j(p_m^r) = 0.$$

Аналогично доказывается и следующая лемма.

ЛЕММА 6. Пусть $\beta_1, \dots, \beta_k \in L_y^i$, $i \geq 1$, – такой набор элементов, что для любого l выполнены соотношения $[D_x, \beta_l] = g^{lj}(q)\beta_j$, тогда $\beta_l = 0$, $l = 1, \dots, k$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ О СУЩЕСТВОВАНИИ ПОЛНОЙ АЛГЕБРЫ

В этом разделе будет доказана теорема 2.

Рассмотрим алгебру $\mathfrak{G}$, построенную при доказательстве теоремы 1. Сначала докажем, что существуют эпиморфизмы φ и ψ , а затем покажем, что $\text{Ker } \varphi = \text{Ker } \psi = 0$.

1. Зададим линейное отображение $\varphi: \bigoplus_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{G}_{-i} \rightarrow L_x$ следующим образом: каждому коммутатору t , состоящему из элементов t_j , $j = 1, \dots, N$, поставим в соответствие коммутатор из элементов X_j , имеющий тот же вид. Ясно, что это сюръективное отображение.

Для каждого k отображение φ задает отображение $\varphi_k: \mathfrak{G}_{-k} \rightarrow L_x^k$. Для того чтобы φ было гомоморфизмом линейных пространств $\bigoplus_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{G}_{-i}$ и L_x , необходимо и достаточно, чтобы каждое отображение φ_k было гомоморфизмом соответствующих линейных пространств. Это равносильно следующему условию: если линейная комбинация коммутаторов длины k , состоящих из элементов t_j , равна нулю, то ее образ при отображении φ_k также равен нулю.

Покажем, что φ_k – гомоморфизм индукцией по k :

а) как отмечалось выше, элементы X_j , $j = 1, \dots, N$, составляют базис L_x^1 , поэтому φ_1 – изоморфизм;

б) пусть отображение φ_m – гомоморфизм.

Пусть t – линейная комбинация коммутаторов длины $m+1$ ($t \in \mathfrak{G}_{-m-1}$), $t = 0$, и $X = \varphi_{m+1}(t)$. Тогда $[A, t]$, $[A, [s_i, t]]$ и $[A[s_{i_1}[s_{i_2} \dots [s_{i_p}, t] \dots]]]$ – линейные комбинации из $\mathfrak{G}_{-m}$, равные нулю для любого $p \in \mathbb{N}$ и для любых $i_k = \overline{1, N}$. По лемме 3 при отображении φ_m они переходят соответственно в $f_0(X)$, $f_0(f_i(X))$ и $f_0(f_{i_1}(f_{i_2} \dots (f_{i_p}(X)) \dots))$, которые, следовательно, также равны нулю по предположению индукции. Рассмотрим наименьшее множество $K \subseteq L_x^{m-1}$, определяемое условиями $K \subset \text{Ker } f_0$, $f_i(K) \subseteq K$ при любом $i = \overline{1, N}$ и $X \in K$. Выберем в K базис B^i , $i = \overline{1, l}$. Так как $f_0(B^i) = 0$, то по лемме 1 получим $[D_y, B^i] = u^j f_j(B^i)$, где $f_j(B^i) \in K$. По лемме 5 будем иметь $K = \{0\}$, значит, $X = 0$. Таким образом φ_{m+1} – гомоморфизм, а значит, и φ – гомоморфизм. Из последнего утверждения и определения φ вытекает сохранение операции коммутирования, и т.к. отображение $\varphi: \bigoplus_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{G}_{-i} \rightarrow L_x$ сюръективно, то оно является эпиморфизмом алгебры Ли.

2. Рассмотрим отображение $\psi: \bigoplus_{i=0}^{+\infty} \mathfrak{G}_i \rightarrow L_y$, заданное по аналогичному правилу. Это сюръективное отображение. Для каждого $k \in \mathbb{N}_0$ отображение ψ задает отображение $\psi_k: \mathfrak{G}_k \rightarrow L_y^k$. Чтобы ψ было гомоморфизмом линейных пространств $\bigoplus_{i=0}^{+\infty} \mathfrak{G}_i$ и L_y , необходимо и достаточно, чтобы каждое отображение ψ_k было гомоморфизмом $\mathfrak{G}_k$ и L_y^k . Для этого необходимо и достаточно, чтобы образ каждой линейной комбинации коммутаторов из $\mathfrak{G}_k$, равной нулю, был также равен нулю.

Покажем, что ψ_k – гомоморфизм индукцией по k :

а) пространства $\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{G}_1$ благодаря формулам (13) по определению совпадают с L_y^0 и L_y^1 , соответственно, поэтому ψ_0 и ψ_1 – изоморфизмы;

б) пусть ψ_m – гомоморфизм.

Пусть $s \in \mathfrak{G}_{m+1}$ – произвольная линейная комбинация коммутаторов, $s = 0$ и $Y = \psi_{m+1}(s)$. Тогда $[t_i, s]$ – линейные комбинации коммутаторов из элементов s_j и A , лежащие в $\mathfrak{G}_m$ и равные нулю при любом $i = \overline{1, N}$. При отображении ψ_m по лемме 4 они переходят в $g_i(Y)$, которые равны нулю, т.к. ψ_m – гомоморфизм. По лемме 2 имеем

$[D_x, Y] = p^i g_i(Y) = 0$, и т.к. $Y \in \mathfrak{G}_{m+1}$, $m \geq 0$, то по лемме 6 получим, что $Y = 0$ и ψ_{m+1} — гомоморфизм. Таким образом ψ — гомоморфизм $\bigoplus_{i=0}^{+\infty} \mathfrak{G}_i$ на L_y . Из этого и определения ψ следует сохранение операции коммутирования, и в силу сюръективности получаем, что ψ — эпиморфизм алгебр Ли.

Положим $K = \text{Ker } \varphi \oplus \text{Ker } \psi$. Так как $\text{Ker } \psi = \bigoplus_{i=0}^{+\infty} \text{Ker } \psi_i$ и $\text{Ker } \varphi = \bigoplus_{i=1}^{+\infty} \text{Ker } \varphi_i$, то фактор-алгебра $\mathfrak{G}/K$ наследует естественную градуировку. Существует гомоморфизм $\chi: \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}/K$. Поскольку $\varphi_1, \psi_0, \psi_1$ — изоморфизмы, то локальные части $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}/K$ изоморфны, и т.к. $\mathfrak{G}$ — минимальная алгебра, то χ — изоморфизм, поэтому $\text{Ker } \psi = \text{Ker } \varphi = 0$. Теорема доказана.

4. СИСТЕМЫ, ОТВЕЧАЮЩИЕ ПРОСТЫМ КОНЕЧНОМЕРНЫМ АЛГЕБРАМ ЛИ В СТАНДАРТНОЙ ГРАДУИРОВКЕ

Как отмечалось во введении, конечномерная транзитивная неприводимая $\mathbb{Z}$ -градуированная алгебра совпадает с одной из простых алгебр Ли в одной из стандартных градуировок. Вместе с тем требование неприводимости алгебры, порождающей системе (3), оказалось слишком жестким: системы вида (6) отвечают простым алгебрам Ли с канонической $\mathbb{Z}$ -градуировкой, являющимся приводимыми, но при этом сама система (6) не содержит подсистем. Тем не менее в данной работе мы ограничились рассмотрением лишь неприводимого случая. Несложный анализ систем корней типа A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 показывает, что любая стандартная градуировка соответствующих простых алгебр Ли имеет высоту 1. Тогда отвечающая им алгебра T является йордановой [12], поэтому ее структурные константы симметричны $C_{jk}^i = C_{kj}^i$, и, как отмечалось во введении, система (3) сводится после интегрирования к системе обыкновенных дифференциальных уравнений вида (4). В случае алгебр Ли B_2, C_2, B_3, C_3 некоторые стандартные градуировки могут иметь высоту 2, но в таком случае наша проверка выявила наличие подсистем в соответствующих системах вида (3). Причем алгебры Ли, соответствующие подсистемам, оказываются высоты 1. С нашей точки зрения такие системы уравнений не интересны. По-видимому, так обстоит дело для всех алгебр Ли $B_n, C_n, n \geq 2$. Простая алгебра Ли типа G_2 имеет две стандартные градуировки высоты 3 и 2, соответственно. В первом случае мы получаем систему из двух уравнений, содержащую подсистему. Во втором случае мы имеем следующую градуировку:

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}_{-2} &= \{e_5\}, \\ \mathfrak{G}_{-1} &= \{e_1, e_3, e_4, e_6\}, \\ \mathfrak{G}_0 &= \{h_1, h_2, e_2, f_2\}, \\ \mathfrak{G}_1 &= \{f_1, f_3, f_4, f_6\}, \\ \mathfrak{G}_2 &= \{f_5\}.\end{aligned}$$

Выбрав элемент $A = f_1 + f_6/12$ и сделав растяжение $v^4 = 3u^4$, получим систему уравнений (12). Интересно, что иной выбор элемента $A = f_3$ приводит к другой системе

$$\begin{cases} u_{xy}^1 = 3u^1 u_x^2 + 3u^2 u_x^1, \\ u_{xy}^2 = 4u^3 u_x^1 + 4u^1 u_x^3 + 2u^2 u_x^2, \\ u_{xy}^3 = 4u^3 u_x^2 + u^2 u_x^3 + 3u^1 u_x^4, \\ u_{xy}^4 = u^3 u_x^3. \end{cases}$$

Здесь множество $[\mathfrak{G}_{-1}, A]$ трехмерно, т.е. операторы левого умножения в алгебре T образуют трехмерное пространство в отличие от четырехмерного в первом случае, поэтому эти две системы линейно-неэквивалентны. При другом выборе элемента A либо система линейно-эквивалентна одной из рассмотренных, либо множество $[\mathfrak{G}_{-1}, A]$ не порождает $\mathfrak{G}_0$.

Докажем, что обе системы не содержат подсистем. Поскольку в каждом случае $[\mathfrak{G}_{-1}, A]$ порождает $\mathfrak{G}_0$, то, как уже отмечалось, достаточно доказать неприводимость представления $\mathfrak{G}_0$ на $\mathfrak{G}_{-1}$. Таблица коммутирования алгебры G_2 выглядит следующим образом:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	h_1	h_2
e_1	0	$-e_3$	0	0	0	$-e_5$	$-h_1$	0	$-f_2$	0	$-f_6$	0	$2e_1$	$-3e_1$
e_2	e_3	0	e_4	e_6	0	0	0	$-h_2$	$3f_1$	$4f_3$	0	$3f_4$	$-e_2$	$2e_2$
e_3	0	$-e_4$	0	e_5	0	0	e_2	$-3e_1$	α	$4f_2$	$-3f_4$	0	e_3	$-e_3$
e_4	0	$-e_6$	$-e_5$	0	0	0	0	$-4e_3$	$-4e_2$	$-\beta$	$-12f_3$	$-12f_2$	0	e_4
e_5	0	0	0	0	0	0	e_6	0	$3e_4$	$12e_3$	$-\delta$	$36e_1$	e_5	0
e_6	e_5	0	0	0	0	0	0	$-3e_4$	0	$12e_2$	$-36f_1$	γ	$-e_6$	$3e_6$
f_1	h_1	0	$-e_2$	0	$-e_6$	0	0	$-f_3$	0	0	0	$-f_5$	$-2f_1$	$3f_1$
f_2	0	h_2	$3e_1$	$4e_3$	0	$3e_4$	$-f_3$	0	f_4	f_6	0	0	f_2	$-2f_2$
f_3	f_2	$-3f_1$	$-\alpha$	$4e_2$	$-3e_4$	0	0	$-f_4$	0	f_5	0	0	$-f_3$	f_3
f_4	0	$-4f_3$	$-4f_2$	β	$-12e_3$	$-12e_2$	0	$-f_6$	$-f_5$	0	0	0	0	$-f_4$
f_5	f_6	0	$3f_4$	$12f_3$	δ	$36f_1$	0	0	0	0	0	0	$-f_5$	0
f_6	0	$-3f_4$	0	$12f_2$	$-36e_1$	$-\gamma$	f_5	0	0	0	0	0	f_6	$-3f_6$
h_1	$-2e_1$	e_2	$-e_3$	0	$-e_5$	e_6	$2f_1$	$-f_2$	f_3	0	f_5	$-f_6$	0	0
h_2	$3e_1$	$-2e_2$	e_3	$-e_4$	0	$-3e_6$	$-3f_1$	$2f_2$	$-f_3$	f_4	0	$3f_6$	0	0

Здесь $\alpha = 3h_1 + h_2$, $\beta = 12h_1 + 8h_2$, $\gamma = 36(h_1 + h_2)$, $\delta = 72h_1 + 36h_2$. Рассмотрим произвольный элемент $s = \alpha e_1 + \beta e_3 + \gamma e_4 + \delta e_6 \in \mathfrak{G}_{-1}$. Тогда

$$\begin{aligned} [e_2, s] &= [e_2, \alpha e_1 + \beta e_3 + \gamma e_4 + \delta e_6] = -\alpha e_3 - \beta e_4 - \gamma e_6, \\ [f_2, s] &= [f_2, \alpha e_1 + \beta e_3 + \gamma e_4 + \delta e_6] = -3\beta e_1 - 4\gamma e_3 - 3\delta e_4. \end{aligned}$$

Допустим, в $\mathfrak{G}_{-1}$ существует замкнутое относительно коммутирования с $\mathfrak{G}_0$ подпространство H . Покажем, что либо $H = \{0\}$, либо $H = G_{-1}$.

ЛЕММА 7. Если $e_6 \in H$, то $H = G_{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $e_6 \in H$. Тогда $[f_2, e_6] = -3e_4 \in H$, т.е. $e_4 \in H$, $[f_2, e_4] = -4e_3 \in H$, т.е. $e_3 \in H$, $[f_2, e_3] = -3e_1 \in H$, т.е. $e_1 \in H$, а значит, $H = G_{-1}$.

Лемма доказана.

Допустим, что H содержит некоторый не равный нулю элемент $s = \alpha e_1 + \beta e_3 + \gamma e_4 + \delta e_6$. Если $\alpha \neq 0$, то $[e_2, s] = -\alpha e_3 - \beta e_4 - \gamma e_6 = s_1 \in H$, $[e_2, s_1] = \alpha e_4 + \beta e_6 = s_2 \in H$, $[e_2, s_2] = -\alpha e_6 \in H$, а значит, $e_6 \in H$ и $H = G_{-1}$. Аналогично $H = G_{-1}$, если $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ или $\alpha = \beta = 0$, $\gamma \neq 0$. Если $\alpha = \beta = \gamma = 0$, то $\delta \neq 0$, $e_6 \in H$ и $H = G_{-1}$. Таким образом, если $H \neq \{0\}$, то $H = G_{-1}$, следовательно, представление $\mathfrak{G}_0$ на $\mathfrak{G}_{-1}$ неприводимо и (12) не содержит подсистем.

Алгебра F_4 имеет три стандартные градуировки высоты 2 и одну высоты 4. В каждой из них представление $\mathfrak{G}_0$ на $\mathfrak{G}_{-1}$ неприводимо и существует элемент $A \in \mathfrak{G}_1$ такой, что $[\mathfrak{G}_{-1}, A]$ порождает $\mathfrak{G}_0$. Таким образом, соответствующие системы не содержат подсистем. Они состоят из четырнадцати, десяти, восьми и шести уравнений, соответственно, и будут приведены в другом месте.

Авторы выражают благодарность В. В. Соколову и И. З. Голубчику за стимулирующие и полезные обсуждения в процессе выполнения данной работы.

Ф. Х. Мукминов благодарит Российский фонд фундаментальных исследований за финансовую поддержку (код гранта 96-01-00382).

Список литературы

- [1] *H. Kakuha, K. Konno.* A Generalization of Coupled Integrable, Dispersionless System. Preprint NUP-A-95-12, 1995. P. 1-7.
- [2] *K. Konno, H. Kakuha.* J. Phys. Soc. Japan. 1995. V. 64. P. 2707-2709.
- [3] *K. Konno, H. Kakuha.* Novel Solitonic Evolutions in a Coupled Integrable, Dispersionless System. Preprint NUP-A-95-5, 1995. P. 1-23.
- [4] *K. Konno, H. Oono.* J. Phys. Soc. Japan. 1994. V. 63. P. 377-378.
- [5] *Е. С. Гудкова, Ф. Х. Мукминов, В. В. Соколов.* Задача Гурса для интегрируемой системы нелинейных уравнений гиперболического типа. В кн.: Дифференциальные уравнения. Интегральные уравнения. Специальные функции. Международная научная конференция, посвященная 90-летию со дня рождения профессора С. П. Пулькина. Тезисы докладов. Самара, 1997. С. 23-24.
- [6] *А. Н. Лезнов, М. В. Савельев.* Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. М.: Наука, 1985.
- [7] *В. Г. Кац.* Изв. АН СССР, сер. матем. 1968. Т. 32. С. 1323-1367.
- [8] *А. Н. Лезнов, В. Г. Смирнов, А. Б. Шабат.* ТМФ. 1982. Т. 51. С. 10-21.
- [9] *А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов.* Экспоненциальные системы типа 1 и матрицы Картана. Препринт БНЦ УО АН СССР. Уфа: Институт математики, 1981. С. 1-22.
- [10] *А. В. Жиббер, Ф. Х. Мукминов.* Квадратичные системы, симметрия, характеристические и полные алгебры. В сб. работ Инст. мат. БНЦ УО АН СССР. Уфа: Институт математики, 1991.
- [11] *В. Г. Кац.* Бесконечномерные алгебры Ли. М.: Мир, 1993.
- [12] *K. McCrimmon.* Bull. of the Amer. Matem. Soc. 1978. V. 84. № 4. P. 612-627.

Поступила в редакцию 26.VI.1997 г.

A. A. Bormisov, E. C. Gudkova, F. Kh. Mukminov ON INTEGRABILITY OF RIKKATI-TYPE SYSTEMS OF HYPERBOLIC EQUATIONS

Equations of the type $U_{xy} = U * U_x$ are considered. Here $U(x, y)$ is a T -mapped function and T is an algebra over the field $\mathbb{C}$. It is shown that there are two characteristic Lie algebras L_x and L_y connected with each such equation. A definition of the $\mathbb{Z}$ -graded Lie algebra $\mathfrak{G}$ corresponding to the equation is given. It is proved that for each of the equations the corresponding algebra $\mathfrak{G}$ can be taken as a sum of vector spaces L_x and L_y with a commutator between elements of L_x and L_y given by zero-curvature relations.

Under assumption that the algebra T has no left ideals, the classifications of the equations with finite dimensional characteristic algebras L_x and L_y is given. All of the equations are Darboux-integrable.