Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Дж. Гох, Некоммутативные шумы Ито и Стратоновича и стохастические эволюции, *ТМФ*, 1997, том 113, номер 2, 276–284

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1077>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 12:09:19

Дж. Гох*

НЕКОММУТАТИВНЫЕ ШУМЫ ИТО И СТРАТОНОВИЧА И СТОХАСТИЧЕСКИЕ ЭВОЛЮЦИИ

Некоммутативное стохастическое исчисление дополнено представлением Стратоновича. Основная идея – строить WN-анализ для представлений Ито и Стратоновича в терминах распределений, заданных на пространствах кусочно-непрерывных функций со значениями в некотором гильбертовом пространстве. Найдена наиболее общая форма унитарной стохастической эволюции в случае, когда указанное гильбертово пространство – поле комплексных чисел. При этом эволюция сначала строится в представлении Стратоновича, так что унитарность очевидна.

1. ВВЕДЕНИЕ

Основы некоммутативной теории случайных процессов были заложены Хадсоном и Партасарати [1]. Они следовали по пути Ито–Дуба [2]. Однако в стандартном стохастическом анализе существует подход Стратоновича [3], который во многих случаях более удобен для решения прикладных задач. В работах автора [4, 5] было предложено квантовое стохастическое представление Стратоновича. При этом выяснилось, что использование кусочно-непрерывных пробных функций (в противоположность пробным функциям Шварца) необходимо для корректного построения версий Ито и Стратоновича стохастического анализа в терминах белого шума (WN-анализа). В этом наш подход отличается от других, в которых используется изоморфизм Винера–Ито–Сигала для построения WN-анализа над фоковским пространством (см., например, [6]).

Пусть K – некоторое фиксированное гильбертово пространство. Обозначим через $C[\mathbf{R} \mapsto K]$ пространство сильно непрерывных функций со значениями в K . Если I – интервал в $\mathbf{R}$, то $\bar{I}$ – замыкание I и каждая функция $f: I \mapsto K$ продолжается на $\bar{I} \mapsto K$, когда это возможно. Например, если $I = (a, b)$, то $f(a)$ определяется как сильный предел $f(a + 0)$, а $f(b)$ – как сильный предел $f(b - 0)$, если эти пределы существуют. Символ $S_K[I]$ обозначает пространство всех функций $I \mapsto K$, имеющих производные всех порядков, которые продолжаются на $\bar{I}$. В случае, если I – неограниченный интервал, предполагается, что элементы $S_K[I]$ быстро убывают, т.е.

$$|t|^m \|D^k f(t)\| \rightarrow 0$$

*Department of Mathematical Physics, St.Patrick's College, Maynooth, Ireland. E-mail: jgough@thphys.may.ie

при $|t| \rightarrow \infty$ для всех $m, k \geq 0$.

Пусть $P = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ – конечный набор вещественных чисел, упорядоченных так, что $t_1 < t_2 < \dots < t_n$; символ $\mathcal{S}_K[\mathbf{R}/P]$ – пространство функций, заданных на интервалах $I_1 = (-\infty, t_1)$, $I_2 = (t_1, t_2)$, $\dots$, $I_n = (t_{n-1}, t_n)$, $I_{n+1} = (t_n, \infty)$ и принимающих значения в K , сужение которых на каждый интервал I_j принадлежит $\mathcal{S}_K(I_j)$. Всюду далее используются только пределы слева и справа функций из $\mathcal{S}_K[\mathbf{R}/P]$. Поэтому мы будем игнорировать тот факт, что функции из $\mathcal{S}_K[\mathbf{R}/P]$ могут быть двузначными в точках множества P .

Пространство $T = T_K[\mathbf{R}]$ пробных функций с конечным числом точек разрыва 1-го рода определяется как

$$T := \bigcup_P \mathcal{S}_K[\mathbf{R}/P],$$

где P пробегает все конечные подмножества вещественных чисел, упорядоченные по возрастанию, включая $P = \emptyset$.

Заметим, что $f \in T$ означает, что функция f сильно дифференцируема бесконечное число раз всюду, кроме конечного множества точек разрыва 1-го рода, причем сильные пределы слева и справа $D^k f(t-0)$ и $D^k f(t+0)$ существуют при всех $t \in \mathbf{R}$ и целых $k \geq 0$. Заметим также, что если $f_j \in \mathcal{S}[\mathbf{R}/P_j]$, то

$$\sum_{j=1}^n c_j f_j \in \mathcal{S}_K \left[\mathbf{R} / \left(\bigcup_{j=1}^n P_j \right) \right],$$

поэтому $T_K[\mathbf{R}]$ – линейное пространство, более того,

$$T_K[\mathbf{R}] \subset L^2[\mathbf{R} \mapsto K].$$

Пространство T полно относительно сходимости в следующем смысле.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Последовательность (f_n) называется сходящейся в T к f , если существует конечное множество P такое, что $f_n \in \mathcal{S}_K[\mathbf{R}/P]$ для любого n , причем для любых целых $m, k \geq 0$ последовательность $|t|^m D^k f_n(t)$ равномерно сходится в сильной топологии к $|t|^m D^k f(t)$ на каждом интервале (t_j, t_{j+1}) ($t_j, t_{j+1} \in P$).

Заметим, что пробные функции непрерывны по Липшицу на каждом интервале непрерывности. Это свойство не требуется для нашего рассмотрения. Нам достаточно только кусочной сильной непрерывности. Однако непрерывность по Липшицу нужна для определения сходимости распределений в случае, если ядра распределений интегрируемы лишь условно.

В следующем определении вводится аналог δ -функции Дирака.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Правой (левой) расщепленной δ -функцией называется распределение δ_+ (δ_-) на T , заданное правилом

$$\langle \delta_{\pm}, f \rangle := f(0 \pm 0),$$

в иных обозначениях

$$\langle \delta_{\pm}, f \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{\pm}(t) f(t) dt.$$

Нам нужно определить бозонные операторы, удовлетворяющие коммутационным соотношениям с расщепленными δ -функциями. Для этого мы вводим гильбертово пространство, являющееся прямой суммой симметричных произведений пространств кусочно-гладких функций.

Симметричное произведение элементов $\phi_1, \dots, \phi_n$ из T обозначается $\phi_1 \circ \dots \circ \phi_n$ и определяется как

$$(\phi_1 \circ \dots \circ \phi_n)(t_1, \dots, t_n) := \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\sigma \in S_n} \phi_1(t_{\sigma(1)}) \otimes \dots \otimes \phi_n(t_{\sigma(n)}),$$

где S_n — группа перестановок n символов.

Обозначим через $\bigcirc^n T$ симметризованное произведение n экземпляров пространства T , полное относительно сходимости в T ; $\Gamma_P(K)$ — бозонное фоковское пространство:

$$\begin{aligned} \Gamma_P(K) &:= \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left\{ \bigcirc^n T_K[\mathbf{R}] \right\} := \\ &= \left\{ (\Phi_n)_{n=0}^{\infty} : \Phi_n \in \bigcirc^n T, \sum_{n=0}^{\infty} \int dt_1 \dots dt_n \|\Phi_n(t_1, \dots, t_n)\|_{\bigotimes^n K}^2 < \infty \right\}, \end{aligned}$$

где $\bigcirc^0 T$ — поле комплексных чисел $\mathbf{C}$.

В пространстве $L^2[\mathbf{R} \mapsto K]$ квадратично интегрируемых функций, заданных на $\mathbf{R}$ и принимающих значения в K , скалярное произведение имеет следующий вид:

$$(f, g) := \int_{-\infty}^{\infty} ds \langle f(s), g(s) \rangle_K.$$

Символ $\Gamma(K)$ обозначает бозонное фоковское пространство над пространством $L^2[\mathbf{R} \mapsto K]$, т.е.

$$\Gamma(K) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left\{ \bigotimes_n^{\text{symm}} L^2[\mathbf{R} \mapsto K] \right\}.$$

Операторы рождения, уничтожения и числа частиц определяются в $\Gamma(K)$ следующими равенствами:

$$\begin{aligned} A(\psi)\phi_1 \circ \dots \circ \phi_n &:= \sum_{j=1}^n (\psi, \phi_j) \phi_1 \circ \dots \circ \widehat{\phi_j} \circ \dots \circ \phi_n, \\ A^\dagger(\psi)\phi_1 \circ \dots \circ \phi_n &:= \psi \circ \phi_1 \circ \dots \circ \phi_n, \\ A^0(\Pi)\phi_1 \circ \dots \circ \phi_n &:= (\Pi\phi_1) \circ \phi_2 \circ \dots \circ \phi_n + \phi_1 \circ (\Pi\phi_2) \circ \dots \circ \phi_n + \dots \\ &\quad \dots + \phi_1 \circ \phi_2 \circ \dots \circ (\Pi\phi_n), \end{aligned}$$

где $\psi \in L^2[\mathbf{R} \mapsto K]$ и $\Pi \in \mathcal{B}(L^2[\mathbf{R} \mapsto K])$. Мы используем те же обозначения для сужений этих операторов с $\Gamma(K)$ на $\Gamma_P(K)$.

2. КВАНТОВЫЙ БЕЛЫЙ ШУМ ИТО

Квантовый белый шум Ито $\alpha_t(\eta)$, где $\eta \in C[\mathbf{R} \mapsto K]$, определяется как оператор в $\Gamma_P(K)$ такой, что $\alpha_t(\eta): \bigcirc^n T \mapsto \bigcirc^{n-1} T$, причем

$$\alpha_t(\eta)\phi_1 \circ \dots \circ \phi_n = \sum_{j=1}^n \langle \eta(t), \phi_j(t^+) \rangle_K \phi_1 \circ \dots \circ \widehat{\phi_j} \circ \dots \circ \phi_n, \quad (1)$$

где $\widehat{\phi_j}$ означает, что ϕ_j опущено.

Мы определяем также оператор $\alpha_t^\dagger(\eta)$ равенством

$$\alpha_t^\dagger(\eta)\phi_n \circ \dots \circ \phi_1 := [\delta_+(t - \cdot)\eta(\cdot)] \circ \phi_1 \circ \dots \circ \phi_n.$$

Очевидно, что $\alpha_t^\dagger(\eta)$ – отображение, преобразующее $\bigcirc^n T$ в $T' \circ \{\bigcirc^n T\}$.

Определим операторы $B_t^\sharp(\eta)$ на $\Gamma_P(K)$ как интегралы Бохнера

$$B_t^\sharp(\eta) := \int_{[0,t)} ds \alpha_s(\eta). \quad (2)$$

Легко проверить, что $B_t^\sharp(\eta) = A^\sharp(\chi_{[0,t)}\eta)$.

Заметим, что T – допустимое пространство в смысле Хадсона и Партасарати [1], в частности,

$$B_t(\eta)\phi_1 \circ \dots \circ \phi_n = \sum_{j=1}^n (\chi_{[0,t)}\eta, \phi_j)\phi_1 \circ \dots \circ \widehat{\phi_j} \circ \dots \circ \phi_n$$

и

$$B_t^\dagger(\eta)\phi_1 \circ \dots \circ \phi_n = \left[\int_{[0,t)} ds \delta_+(s - \cdot)\eta(s) \right] \circ \phi_1 \circ \dots \circ \phi_n.$$

Кроме того, положим

$$B_t^0(|\eta\rangle\langle\zeta|) := A^0(\chi_{[0,t)}|\eta\rangle\langle\zeta|) \equiv \int_{[0,t)} ds \alpha_s^\dagger(\eta)\alpha_s(\zeta). \quad (3)$$

Легко проверить, что для любых $\eta, \zeta \in C[\mathbf{R} \mapsto K]$ справедливо каноническое коммутационное соотношение

$$[\alpha_t(\eta), \alpha_s^\dagger(\zeta)] = \langle \eta(t), \zeta(s) \rangle_K \delta_+(t - s). \quad (4)$$

Отличительная черта формализма Ито – неупреждение – проявляется в наличии δ_+ . Соответственно двухточечные корреляционные функции содержат только δ -функции, указывающие на ближайшее будущее.

Теперь мы хотим показать, что квантовое стохастическое исчисление, предложенное Хадсоном и Партасарати [1], может быть представлено с помощью полей (2), (3). Следуя [1], мы рассмотрим стохастические интегралы на $(\mathcal{D}, S)$, где $\mathcal{D}$ – некоторое плотное подмножество некоторого исходного гильбертова пространства и S – некоторое допустимое подпространство, в качестве которого мы возьмем T .

ТЕОРЕМА 1. Процессы Хадсона–Партасарати $B_t(\eta)$ (процесс уничтожения), $B_t^\dagger(\zeta)$ (процесс рождения) и $B_t^0(|\psi\rangle\langle\phi|)$ (процесс числа частиц) можно представить в виде

$$B_t(\eta) = \int_0^t \alpha_s(\eta) ds, \quad B_t^\dagger(\zeta) = \int_0^t \alpha_s^\dagger(\zeta) ds$$

и

$$B_t^0(|\psi\rangle\langle\phi|) = \int_0^t \alpha_s^\dagger(\psi) \alpha_s(\phi) ds.$$

Кроме того, если E_s , F_s , G_s и H_s – согласованные квантовые стохастические процессы [1], то их стохастический интеграл M_t может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} M_t &= \int_0^t \{E_s \otimes dB_s^0(|\psi\rangle\langle\phi|) + F_s \otimes dB_s(\eta) + G_s \otimes dB_s^\dagger(\zeta) + H_s \otimes ds\} = \\ &= \int_0^t \{E_s \alpha_s^\dagger(\psi) \alpha_s(\phi) + F_s \alpha_s(\eta) + G_s \alpha_s^\dagger(\zeta) + H_s\} ds. \end{aligned} \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно показать, что при любых $u, v \in \mathcal{D}$ и $\Phi, \Psi \in \Gamma_P(K)$ мы получаем одно и то же выражение для $\langle u \otimes \Phi, M_t v \otimes \Psi \rangle$, когда используем в (1) белый шум Хадсона–Партасарати и Ито. Это легко проверить, учитывая то обстоятельство, что вклад разрывов исчезает после интегрирования.

Важно отметить, что стохастические интегралы в теории Хадсона–Партасарати основаны на так называемых допустимых подпространствах из $L^2[\mathbf{R} \mapsto K]$. Они предполагаются всюду плотными и инвариантными относительно проекций $f \mapsto \chi_{[0,t]} f$ при всех t , поэтому T – допустимое подпространство, а пространство пробных функций Шварца – нет. На этом основании мы делаем вывод о том, что наш выбор пробных функций представляет интерес при построении теории белого шума.

В теории Хадсона–Партасарати фундаментальное значение имеет тот факт, что меры $dB_t(\eta)$, $dB_t^\dagger(\zeta)$ и $dB_t^0(\Pi)$ коммутируют с неупреждающими процессами. Например, справедливо равенство

$$\int_0^t B_s(\eta) dB_s^\dagger(\zeta) = \int_0^t dB_s^\dagger(\zeta) B_s(\eta). \quad (6)$$

В нашем случае левая часть этого равенства имеет вид

$$\begin{aligned} \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \alpha_{s_2}(\eta) \alpha_{s_1}^\dagger(\zeta) &= \int_0^t ds_1 \int_0^t ds_2 \theta(s_1 - s_2) \alpha_{s_2}(\eta) \alpha_{s_1}^\dagger(\zeta) = \\ &= \int_0^t ds_1 \int_0^t ds_2 \theta(s_1 - s_2) \{ \alpha_{s_1}^\dagger(\zeta) \alpha_{s_2}(\eta) + \langle \eta(t), \zeta(t) \rangle_K \delta_+(s_2 - s_1) \}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\theta(s)$ – функция Хэвисайда, равная нулю при отрицательных s и единице при положительных s . Присутствие δ_+ вместо δ -функции Дирака приводит к тому, что интеграл от второго слагаемого в (7) определен. Кроме того,

$$\int_0^t ds_1 \int_0^t ds_2 \theta(s_1 - s_2) \delta_+(s_2 - s_1) = 0,$$

т.к. $\theta(0 - 0) = 0$. Поэтому мы получаем (6).

Итак, каноническое коммутационное соотношение (4) содержит не только нетривиальную часть квантовой таблицы Ито, но и само предписание Ито, т.к. δ_+ присутствует в правой части коммутационного соотношения.

Квантовая формула Ито для произведения двух стохастических интегралов совпадает с той, которая приведена в [1]. Положим

$$M_t = \int_0^t dM_t,$$

где

$$dM_t = (E_t \alpha_t^\dagger \alpha_t + F_t \alpha_t + G_t \alpha_t^\dagger + H_t) dt.$$

Если M'_t — другой согласованный процесс, для которого

$$dM'_t = (E'_t \alpha_t^\dagger \alpha_t + F'_t \alpha_t + G'_t \alpha_t^\dagger + H'_t) dt,$$

то, пользуясь (4), получаем

$$M_t M'_t = \int_0^t \{M_t dM'_t + dM_t M'_t + dM_t dM'_t\}, \quad (8)$$

где

$$dM_t dM'_t = (E_t E'_t \alpha_t^\dagger \alpha_t + E_t G'_t \alpha_t^\dagger + F_t E'_t \alpha_t + F_t G'_t) dt. \quad (9)$$

Равенства (8) и (9) являются соответственно стандартной квантовой формулой Ито и сдвигом Ито. Таким образом, представление стохастических интегралов в терминах шумовых полей Ито завершено.

3. КВАНТОВЫЙ БЕЛЫЙ ШУМ СТРАТОНОВИЧА

Квантовый белый шум Стратоновича $\gamma_t(\eta)$ определяется на $\Gamma_P(K)$ как отображение $\gamma_t(\eta): \bigcirc^n T \mapsto \bigcirc^{n-1} T$, для которого

$$\gamma_t(\eta) \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_n := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \langle \eta_t, \phi_j(t^+) + \phi_j(t^-) \rangle_K \phi_1 \circ \cdots \circ \widehat{\phi_j} \circ \cdots \circ \phi_n.$$

Сопряженный оператор $\gamma_t^\dagger(\eta)$ определяется равенством

$$\gamma_t^\dagger(\eta) \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_n := \frac{1}{2} [\delta_+(t - \cdot) \eta(\cdot) + \delta_-(t - \cdot) \eta(\cdot)] \circ \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_n.$$

Справедливо коммутационное соотношение

$$[\gamma_t(\eta), \gamma_s^\dagger(\zeta)] = \frac{1}{2} \langle \eta(t), \zeta(s) \rangle_K \{ \delta_+(t - s) + \delta_-(t - s) \}.$$

Заметим, что

$$B_t^\sharp(\eta) = \int_{[0, t)} ds \gamma_s^\sharp(\eta),$$

поскольку для любой $\Phi_n \in \bigcirc^n T$ функции $\gamma_s^\sharp(\eta) \Phi_n$ и $\alpha_s^\sharp(\eta) \Phi_n$ могут отличаться только в точках разрыва функции Φ_n , а множество таких точек имеет меру нуль.

ТЕОРЕМА 2. *Стохастический интеграл (5) может быть представлен в виде*

$$M_t = \int_0^t \{ \gamma_s^\dagger(\psi) E_s \gamma_s(\phi) + F_s \gamma_s(\eta) + \gamma_s^\dagger(\zeta) G_s + H_s \} ds. \quad (10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Операторы $\gamma_s^\dagger(\eta)$, вообще говоря, не коммутируют с согласованными процессами.

Из (1) и (10) получаются квантовые стохастические уравнения

$$\begin{aligned}\frac{dM_t}{dt} &= E_s \alpha_t^\dagger(\psi) \alpha_t(\phi) + F_t \alpha_t(\eta) + G_t \alpha_t^\dagger(\zeta) + H_t = \\ &= \gamma_t^\dagger(\psi) E_t \gamma_t(\phi) + F_t \gamma_t(\eta) + \gamma_t^\dagger(\zeta) G_t + H_t.\end{aligned}$$

4. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ЭВОЛЮЦИИ

В данном разделе мы примем для простоты, что $K = \mathbf{C}$. Тогда для операторов шума Стратоновича получаем

$$[\gamma_t, \gamma_s^\dagger] = \frac{1}{2} \delta_+(t-s) + \frac{1}{2} \delta_-(t-s).$$

Дифференциальное уравнение для унитарного процесса U_t имеет следующий общий вид:

$$\frac{dU_t}{dt} = -i \{ \gamma_t^\dagger E \gamma_t + F^\dagger \gamma_t + \gamma_t^\dagger F + J \} U_t, \quad (11)$$

где E и J – самосопряженные операторы, принадлежащие некоторому исходному банахову пространству $\mathcal{B}_0$.

Дифференциальное уравнение (11) можно представить в виде

$$\frac{dU_t}{dt} = -i \Upsilon_t U_t,$$

где Υ_t – самосопряженный стохастический гамильтониан.

Если E , F и J ограничены в подходящем смысле, то U_t можно представить в виде следующего ряда Дайсона:

$$U_t \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{t \geq t_1 \geq \dots \geq t_n \geq 0} dt_1 \dots dt_n \Upsilon_{t_1} \dots \Upsilon_{t_n},$$

поэтому

$$[\gamma_t, U_t] = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{t \geq t_1 \geq \dots \geq t_n \geq 0} dt_1 \dots dt_n \{ [\gamma_t, \Upsilon_{t_1}] \Upsilon_{t_2} \dots \Upsilon_{t_n} + \dots \}. \quad (12)$$

Воспользуемся здесь равенством

$$[\gamma_t, \Upsilon_{t_j}] = -i \frac{1}{2} (E \gamma_t + F) \{ \delta_+(t-t_j) + \delta_-(t-t_j) \}.$$

При интегрировании получаем, что $t = t_j$, и вследствие симплициальной природы носителей переменные $t_1, \dots, t_{j-1}$ тоже равны t . Следовательно, область интегрирования

в (12) оказывается множеством меры нуль во всех случаях, кроме случая $j = 1$. Суммируя в (12) члены с $j = 1$, получаем

$$[\gamma_t, U_t] = -i\frac{1}{2}(E\gamma_t + F)U_t$$

или, что эквивалентно,

$$\gamma_t U_t = \left(1 + i\frac{1}{2}E\right)^{-1} \left\{ U_t \gamma_t - i\frac{1}{2}FU_t \right\}.$$

Нормальная форма уравнения (11), следовательно, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dU_t}{dt} = & -i\gamma_t^\dagger E \left(1 + i\frac{1}{2}E\right)^{-1} U_t \gamma_t - iF^\dagger \left(1 + i\frac{1}{2}E\right)^{-1} U_t \gamma_t - \\ & - \gamma_t^\dagger \left[1 - i\frac{1}{2}E \left(1 + i\frac{1}{2}E\right)^{-1}\right] FU_t - i \left[J - i\frac{1}{2}F^\dagger \left(1 + i\frac{1}{2}E\right)^{-1} F \right] U_t. \end{aligned}$$

Заменим теперь шумы Стратоновича $\gamma_t^\sharp$ шумами Ито $\alpha_t^\sharp$. В результате получится стохастическое дифференциальное уравнение Хадсона–Партасарати

$$dU_t = \left\{ (W - 1) \otimes dB_t^0 + L \otimes dB_t - WL^\dagger \otimes dB_t^\dagger - \left(iH + \frac{1}{2}LL^\dagger \right) \otimes dt \right\} U_t, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} W &= \frac{(1 - i\frac{1}{2}E)}{(1 + i\frac{1}{2}E)}, \\ L &= -iF^\dagger \left(1 + i\frac{1}{2}E\right)^{-1}, \\ H &= J + \frac{1}{4}F^\dagger \frac{E}{(1 + \frac{1}{4}E^2)} F. \end{aligned}$$

Очевидно, что W – унитарный оператор, а H – самосопряженный.

ЗАМЕЧАНИЕ. Известно, что (13) – наиболее общее уравнение для унитарного процесса U_t (см. раздел 7 в [1]). Мы получили это уравнение новым способом, исходя из уравнения (11) в формализме Стратоновича (когда унитарность очевидна) и преобразуя его в формализм Ито.

Часто представляет интерес процесс $X_t = U_t^\dagger X U_t$, где $X \in \mathcal{B}_0$. Заметим, что в представлении Стратоновича дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет процесс X_t , имеет вид

$$\frac{dX_t}{dt} = -iU_t^\dagger [X, \Upsilon_t] U_t.$$

Это уравнение можно привести к нормальной форме и затем преобразовать в более традиционное уравнение Ито.

Список литературы

- [1] *R. L. Hudson, K. R. Parthasarathy.* Commun. Math. Phys. 1984. V. 93. P. 301–323.
- [2] *K. Ito.* Lectures on Stochastic Processes. Bombay: Tata Inst. Fund. Research, 1961.
- [3] *R. Stratonovich.* SIAM J. Cont. 1966. V. 4. P. 362–371.
- [4] *Дж. Гох.* ТМФ. 1997. Т. 111. № 2. С. 218–233.
- [5] *J. Gough.* J. Potential Anal. 1997 (in print).
- [6] *N. Obata.* White Noise Calculus and Fock Space. Berlin–Heidelberg: Springer, 1994.

Поступила в редакцию 15.IV.1997 г.,
после доработки 10.VII.1997 г.

J. Gough

**NON-COMMUTATIVE ITO AND STRATONOVICH
NOISE AND STOCHASTIC EVOLUTIONS**

We complete the theory of non-commutative stochastic calculus by introducing the Stratonovich representation. The key idea is to develop a theory of white noise analysis, for both the Ito and Stratonovich representations, which is based on distributions over piecewise continuous functions mapping into a Hilbert space. As an example, we give a derive the most general class of unitary stochastic evolutions, when the Hilbert space is the space of complex numbers, by first constructing the evolution in the Stratonovich representation where unitarity is self-evident.