Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Цегельник, О некоторых свойствах решений одного нелинейного уравнения P -типа, *ТМФ*, 1997, том 113, номер 2, 285–288

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1078>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 14:51:43

В. В. Цегельник*

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ P -ТИПА

Для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения (определяющего полиномиальный гамильтониан, ассоциированный с третьим уравнением Пенлеве в случае $\gamma = 0$, $\alpha\delta \neq 0$) получено преобразование Беклунда, а также нелинейное функциональное соотношение, связывающее решения этого уравнения при различных значениях входящего в него параметра.

Целью работы являются построение преобразования Беклунда и вывод нелинейного функционального соотношения, связывающего решения нелинейного уравнения

$$\left[\frac{(z\sigma'')^2}{(1-\beta)^2 - 2(\sigma - z\sigma')} - \sigma'^2 + 4(1-\beta) \right]^2 = 16[(1-\beta)^2 - 2(\sigma - z\sigma')] \quad (1)$$

при различных значениях входящего в него параметра β .

1. Вместе с уравнением (1) рассмотрим третье уравнение Пенлеве

$$zww'' = zw'^2 - ww' + \alpha w^3 + \beta w + \gamma zw^4 + \delta z, \quad (2)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — произвольные параметры. Ниже будем считать, что $\gamma = 0$, $\alpha\delta \neq 0$. В этом случае уравнение (2) масштабным преобразованием неизвестной функции w и независимой переменной z приводится [1] к виду

$$zww'' = zw'^2 - ww' + w^3 + \beta w - z. \quad (3)$$

Уравнение (3) эквивалентно системе уравнений (см. [1])

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= 1 + \frac{1-\beta}{z}w - \frac{1}{z}w^2u, \\ \frac{du}{dz} &= -1 - \frac{1-\beta}{z}u + \frac{1}{2}wu^2, \end{aligned} \quad (4)$$

порождаемой гамильтонианом

$$H = -\frac{u^2w^2}{2z} + \frac{(1-\beta)wu}{z} + u + w,$$

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь.

так что

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial H}{\partial u}, \quad \frac{du}{dz} = -\frac{\partial H}{\partial w}.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\sigma = zH(u, w, z) = -\frac{u^2 w^2}{2} + (1 - \beta)wu + z(u + w).$$

Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} \sigma' = \frac{d\sigma}{dz} &= u + w, & \sigma'' = \frac{d^2\sigma}{dz^2} &= \frac{w - u}{z}(1 - \beta - wu), \\ \sigma - z\sigma' &= -\frac{u^2 w^2}{2} + (1 - \beta)wu. \end{aligned} \quad (5)$$

Если исключить из (5) переменные u и w , то для определения функции σ получим уравнение (1).

Пусть σ_β, w_β – общие решения уравнений (1), (3), соответственно. Нетрудно проверить, что имеют место формулы

$$\sigma_\beta = \frac{-z^2 w_\beta'^2 + [z + (1 - \beta)w_\beta]^2}{2w_\beta^2} + zw_\beta, \quad (6)$$

$$w_\beta = \frac{\sigma'_\beta}{2} + 2z\sigma''_\beta \left[\frac{(z\sigma''_\beta)^2}{(1 - \beta)^2 - 2(\sigma_\beta - z\sigma'_\beta)} - \sigma_\beta'^2 + 4(1 - \beta) \right]^{-1}. \quad (7)$$

Так как общий интеграл уравнения (3) не содержит многозначных подвижных критических особых точек, то в силу (6), (7) уравнение (1) также обладает этим свойством¹⁾.

Система уравнений (4) определяет [1] прямое

$$T: w_{\beta-2} \rightarrow w_\beta = \frac{(1 - \beta)w_{\beta-2} + z + zw_{\beta-2}'}{w_{\beta-2}^2} \quad (8)$$

и обратное

$$T^{-1}: w_\beta \rightarrow w_{\beta-2} = \frac{(1 - \beta)w_\beta + z - zw_\beta'}{w_\beta^2} \quad (9)$$

преобразования Беклунда уравнения (3), где $w_{\beta-2}$ и w_β – соответственно решения (3) при значениях параметра $\beta - 2$ и β .

Подставляя (8) в правую часть (6), после несложных преобразований получим формулу

$$\sigma_\beta = \frac{-z^2 w_{\beta-2}'^2 + [z + (1 - \beta)w_{\beta-2}]^2}{2w_{\beta-2}^2} + zw_{\beta-2}, \quad (10)$$

которую, принимая во внимание (6), можно представить в виде

$$\sigma_\beta = \sigma_{\beta-2} - \frac{2z}{w_{\beta-2}} + 2(\beta - 2). \quad (11)$$

Таким образом, справедлива

¹⁾ Уравнения с указанным свойством называются уравнениями P -типа.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\sigma_{\beta-2}$ – общее решение уравнения

$$\left[\frac{(z\sigma'')^2}{(3-\beta)^2 - 2(\sigma - z\sigma')} - \sigma'^2 + 4(3-\beta) \right]^2 = 16[(3-\beta)^2 - 2(\sigma - z\sigma')] \quad (12)$$

при фиксированном значении β . Тогда функция (11), где

$$w_{\beta-2} = \frac{\sigma'_{\beta-2}}{2} + 2z\sigma''_{\beta-2} \left[\frac{(z\sigma''_{\beta-2})^2}{(3-\beta)^2 - 2(\sigma_{\beta-2} - z\sigma'_{\beta-2})} - \sigma'^2_{\beta-2} + 4(3-\beta) \right]^{-1}, \quad (13)$$

является общим решением уравнения (1).

СЛЕДСТВИЕ. Для построения общего решения уравнения (1) при произвольном значении параметра β достаточно его построить в полосе $[\operatorname{Re} \beta, \operatorname{Re} \beta - 2]$.

ПРИМЕР. Уравнение (12) в случае $\beta = 2$ имеет решение $\sigma_0 = 4/9 + \tau^2 + \frac{3}{2}\tau^4$, $\tau^3 = z$. Используя формулы (11), (13), получаем решение $\sigma_2 = 4/9 - \tau^2 + (3/2)\tau^4$ уравнения (1) при $\beta = 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В формуле (11) проявляется различие между уравнением (3) и уравнением (P_3) из [2, с. 371] (формулы с τ -функциями), суть которого состоит в следующем. Между параметрами η_∞ , η_0 , θ_∞ , θ_0 гамильтониана из работы [3], ассоциированного с (P_3) , и параметрами уравнения (2) имеется следующая связь:

$$\alpha = -4\eta_\infty\theta_\infty, \quad \beta = 4\eta_0(\theta_0 + 1), \quad \gamma = 4\eta_\infty^2, \quad \delta = -4\eta_0^2. \quad (14)$$

Легко видеть, что набор параметров $(1, \beta, 0, -1)$ уравнения (2) (отвечающих уравнению (3)) нельзя получить из (14). Однако, если в гамильтониане из [3] формально положить

$$\eta_0 = -2, \quad \eta_\infty = 0, \quad \eta_\infty(\theta_0 + \theta_\infty) = 1, \quad \theta_0 = \frac{\beta}{2} - 1, \quad (15)$$

то получится с точностью до масштабных преобразований гамильтониан H , отвечающий уравнению (3). Что касается уравнения для гамильтониана, ассоциированного с (P_3) из [2], то это уравнение нельзя (принимая во внимание (15)) преобразовать в уравнение (1). Поэтому уравнение (1) можно считать новым в списке уравнений из [2] для полиномиальных гамильтонианов, ассоциированных с уравнениями Пенлеве. Указанные уравнения, как и уравнения Пенлеве, имеют широкий спектр приложений в квантовой теории поля [4], в теории нелинейных эволюционных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния, в частности, они возникают при исследовании системы трехволнового резонансного взаимодействия [5].

2. Приравнявая (6) и (10), получаем нелинейное соотношение

$$\frac{-z^2 w_{\beta-2}'^2 + [z + (1-\beta)w_{\beta-2}]^2}{2w_{\beta-2}^2} + zw_{\beta-2} = \frac{-z^2 w_{\beta}'^2 + [z + (1-\beta)w_{\beta}]^2}{2w_{\beta}^2} + zw_{\beta}, \quad (16)$$

связывающее решения уравнения (3) и их производные при различных значениях параметра β .

Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 2. Пусть w_β , $w_{\beta-2}$ — решения уравнения (3) при значениях параметров β , $\beta-2$, соответственно, удовлетворяющие условию (8). Тогда имеет место равенство (16).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Свойство (16) решений уравнения (3), отражающее принцип действия преобразования Беклунда (8) на функцию σ (формула (6)), аналогично известному свойству τ -функции (см. [3]).

В работе [6] с помощью преобразований (8), (9) получено нелинейное функциональное соотношение

$$w_{\beta-4} = -w_\beta + \frac{2\beta w_\beta + w_\beta^2(w_{\beta-2} + w_{\beta+2}) + 2(2-\beta)w_{\beta-2}}{w_{\beta-2}^2}, \quad (17)$$

связывающее решения уравнения (3) при различных значениях параметра β . С помощью (11) формула (17) преобразуется в выражение

$$\sigma_{\beta-4} = \sigma_{\beta-2} - 2(\beta-4) + 2zR^{-1},$$

где

$$R = -w_\beta + [2\beta w_\beta + w_\beta^2(w_{\beta-2} + w_{\beta+2} + 2(2-\beta))w_{\beta-2}]w_{\beta-2}^{-2},$$

$$w_{\beta-2} = 2z[\sigma_{\beta-2} - \sigma_\beta + 2(\beta-2)]^{-1},$$

которое, следуя [7], можно рассматривать как:

- i) принцип нелинейной суперпозиции решений уравнения (1);
- ii) альтернативную форму преобразования Беклунда.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Утверждение, аналогичное теореме 1, имеет место и для уравнения

$$\left[\frac{(z\sigma'')^2}{(1+\beta)^2 + 2(\sigma + z\sigma')} - \sigma'^2 + 4(1+\beta) \right]^2 = 16[(1+\beta)^2 + 2(\sigma + z\sigma')],$$

где $\sigma = z\tilde{H}(z, w, u)$, а

$$\tilde{H}(z, w, u) = \frac{u^2w^2}{2z} + \frac{(1+\beta)wu}{z} - (u+w)$$

— гамильтониан, ассоциированный с соответствующим аналогом уравнения (3).

Список литературы

- [1] В. И. Громак, Н. А. Лукашевич. Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. Минск: Изд-во "Университетское", 1990.
- [2] K. Okamoto. Proc. Japan Acad. 1980. V. 56A. № 8. P. 367.
- [3] K. Okamoto. Proc. Japan Acad. 1980. V. 56A. № 6. P. 264.
- [4] M. Sato, M. Дзимбо, Т. Миwa. Голономные квантовые поля. М.: Мир, 1983.
- [5] L. Martina, P. Winternitz. Ann. of Phys. 1989. V. 196. № 2. P. 231.
- [6] В. И. Громак, В. В. Цегельник. Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 7. С. 1118.
- [7] В. В. Цегельник. ТМФ. 1995. Т. 102. № 3. С. 364.

Поступила в редакцию 3.III.1997 г.

V. V. Tsegel'nik

SOME PROPERTIES OF SOLUTIONS OF A P-TYPE NONLINEAR EQUATION

For a nonlinear ordinary differential equation (defining a polynomial Hamiltonian associated with the third Painlevé equation in the case $\gamma = 0$, $\alpha\delta \neq 0$) we have obtained Bäcklund transformation and nonlinear functional relationship for solutions corresponding to different values of the parameter of the equation.