Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ройтер, Д. Флигнер, М. Г. Шмидт, К. Шуберт, Двухпетлевой лагранжиан Эйлера–Гейзенберга в размерной перенормировке, *ТМФ*, 1997, том 113, номер 2, 289–300

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1079>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 12:41:52

М. Ройтер*, Д. Флигнер†, М. Г. Шмидт‡, К. Шуберт§

ДВУХПЕТЛЕВОЙ ЛАГРАНЖИАНА ЭЙЛЕРА–ГЕЙЗЕНБЕРГА В РАЗМЕРНОЙ ПЕРЕНОРМИРОВКЕ

Вычисляя двухпетлевой лагранжиан Эйлера–Гейзенберга квантовой электродинамики в размерной регуляризации, мы проясняем расхождение между результатами двух предыдущих вычислений этой величины, которые проводились в регуляризации собственного времени.

Одним из самых ранних результатов в квантовой электродинамике (КЭД) было вычисление Эйлером и Гейзенбергом [1] однопетлевого эффективного лагранжиана, индуцированного электронными петлями, для электромагнитного фонового поля с постоянным тензором напряженности поля $F_{\mu\nu}$. Записанный в швингеровском представлении собственного времени [2], этот лагранжиан выглядит как

$$\mathcal{L}_{\text{spin}}^{(1)}[F] = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{dT}{T^3} e^{-m^2 T} \frac{(eaT)(ebT)}{\text{tg}(eaT) \text{th}(ebT)}. \quad (1)$$

Здесь a и b могут быть выражены через два инварианта электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{1}{2} \left[\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 + \sqrt{(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 4(\mathbf{E}\mathbf{B})^2} \right], \\ b^2 &= \frac{1}{2} \left[-(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + \sqrt{(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 4(\mathbf{E}\mathbf{B})^2} \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Швингер также получил соответствующий результат для скалярной КЭД [2]:

$$\mathcal{L}_{\text{scal}}^{(1)}[F] = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{dT}{T^3} e^{-m^2 T} \frac{(eaT)(ebT)}{\sin(eaT) \text{sh}(ebT)}. \quad (3)$$

*DESY, Гамбург, ФРГ.

†Институт теоретической физики Университета Гейдельберга, Гейдельберг, ФРГ. E-mail: D.Fliegner@ThPhys.Uni-Heidelberg.De

‡Институт теоретической физики Университета Гейдельберга, Гейдельберг, ФРГ. E-mail: M.G.Schmidt@ThPhys.Uni-Heidelberg.De

§Физический институт Гумбольдтовского Берлинского университета, Берлин, ФРГ. E-mail: schubert@qft2.physik.hu-berlin.de

Первая радиационная поправка к лагранжиану Эйлера–Гейзенберга, обусловленная обменом одним внутренним фотоном в электронной петле, была также получена много лет назад Ритусом [3] через некоторый двухпараметрический интеграл.

Дитрих и один из авторов настоящей работы [4] позже получили аналогичное, но более простое интегральное представление для той же самой величины. Они также проверили согласие обоих представлений в пределе сильного поля.

В недавней публикации [5] показано, что этот тип вычисления можно значительно упростить, используя основанный на функциональном интеграле по мировым линиям [6–12] вариант формализма Берна–Косовера [13, 14].

Это третье вычисление привело в точности к тому же параметрическому интегралу для *регуляризованного* эффективного лагранжиана, что и вычисление Дитриха–Ройтера, но более элегантным способом.

Все три вычисления проводились в четырех измерениях в рамках регуляризации собственного времени и перенормировки на массовой оболочке. Такой выбор регуляризации сохраняет простоту интегрирований, но уже на двухпетлевом уровне самосогласованность перенормировки на массовой оболочке достигается не так тривиально. Это осложнение возникает из-за неуниверсальной природы обрезания, основанного на собственном времени, и отчасти похоже на проблемы, встречающиеся при вычислении многопетлевых фейнмановских диаграмм, когда используется наивное обрезание в импульсном пространстве [15].

В действительности вычисление в [5] было неполным постольку, поскольку мы не смогли определить конечную часть однопетлевого смещения массы, присущего этой вычислительной схеме. Кроме того, в качестве побочного продукта этого исследования мы обнаружили, что формулы, полученные Ритусом, а также Дитрихом и Ройтером для перенормированных эффективных лагранжианов, несовместимы в том виде, в каком они приведены, и по той же самой причине: если они вообще могут быть отождествлены, то только после некоторой конечной перенормировки массы. Мы были вынуждены сделать вывод, что по крайней мере в одном из двух предыдущих вычислений физическая перенормированная масса электрона была зафиксирована неверно (предел сильного поля, проверенный в [4], нечувствителен к этому расхождению).

В данной работе мы проясняем это обстоятельство, снова вычисляя эффективный лагранжиан, но на этот раз в размерной регуляризации. Эта работа поэтому должна рассматриваться как дополняющая работу [5], так что мы отсылаем к ней читателя по поводу деталей используемого здесь формализма.

Как обычно, в применениях техники, “навеянной струнами” к КЭД [12], наше вычисление двухпетлевого лагранжиана Эйлера–Гейзенберга для спинорной КЭД дает соответствующий лагранжиан для скалярной КЭД в качестве частного результата. Поэтому мы сначала рассматриваем скалярную КЭД.

Нашим отправным пунктом в скалярной КЭД является следующее представление через интеграл по мировой линии для голого размерно регуляризованного двухпетлевого лагранжиана Эйлера–Гейзенберга [5, 9, 10]:

$$\mathcal{L}_{\text{scal}}^{(2)}[A] = -\frac{e^2}{2} \frac{\Gamma(\frac{D}{2} - 1)}{4\pi^{\frac{D}{2}}} \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \int_0^T d\tau_a \int_0^T d\tau_b \times$$

$$\begin{aligned} & \times \int_{y(T)=y(0)} \mathcal{D}y \frac{\dot{y}(\tau_a)\dot{y}(\tau_b)}{([y(\tau_a) - y(\tau_b)]^2)^{\frac{D}{2}-1}} \times \\ & \times \exp \left[- \int_0^T d\tau \left(\frac{1}{4} \dot{y}^2 + ie \dot{y}^\mu A_\mu(x_0 + y) \right) \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь T обозначает швингеровский параметр собственного времени для скаляра, циркулирующего по петле. Интеграл по траекториям $\mathcal{D}y$ должен браться по пространству всех замкнутых петель в D -мерном пространстве-времени (с произвольным, но фиксированным центром масс x_0), которые перемещаются в фиксированном собственном времени T . Параметры $\tau_{a,b}$ параметризуют начальную и конечную точки фотона, обмен которым происходит в скалярной петле. Эта форма фотонной вставки соответствует фейнмановской калибровке. Мы используем евклидовы соглашения как на мировой линии, так и в пространстве-времени.

Такое представление эффективного действия через первично квантованный интеграл по траекториям восходит к Фейнману [16] с той лишь разницей, что мы размерно продолжили его в D измерений.

Полезно взять фоновое поле A в калибровке Фока–Швингера, ориентированной на центр масс петли x_0 [7], где мы имеем $A_\mu(x_0 + y) = (1/2)y^\nu F_{\nu\mu}$. Экспоненцируя знаменатель фотонной вставки с использованием параметра собственного времени $\bar{T}$, мы приходим к представлению

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{scal}}^{(2)}[F] = & -\frac{e^2}{2} \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \int_0^\infty d\bar{T} (4\pi\bar{T})^{-\frac{D}{2}} \int_0^T d\tau_a \int_0^T d\tau_b \times \\ & \times \int \mathcal{D}y \dot{y}_a \dot{y}_b \exp \left[- \int_0^T d\tau \left(\frac{1}{4} \dot{y}^2 + \frac{i}{2} e y^\mu F_{\mu\nu} \dot{y}^\nu \right) - \frac{(y_a - y_b)^2}{4\bar{T}} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Новый интеграл по траекториям является гауссовым, так что его вычисление равносильно единственному виновскому спариванию $\langle \dot{y}_a \dot{y}_b \rangle$. Это приводит [5] к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{scal}}^{(2)}[F] = & -(4\pi)^{-D} \frac{e^2}{2} \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} T^{-\frac{D}{2}} \int_0^\infty d\bar{T} \int_0^T d\tau_a \int_0^T d\tau_b \times \\ & \times \det^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{\sin(eFT)}{eFT} \right] \det^{-\frac{1}{2}} \left[\bar{T} - \frac{1}{2} C_{ab} \right] \langle \dot{y}_a \dot{y}_b \rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

Первый из (лоренцевых) множителей, появляющихся здесь и связанных с детерминантом, дает именно однопетлевое подынтегральное выражение Эйлера–Гейзенберга–Швингера (3). Он выражает зависимость детерминанта интеграла по траекториям от внешнего поля [7], тогда как второй множитель выражает зависимость от фотонной вставки. Виковское спаривание задается [5] выражением

$$\langle \dot{y}_a \dot{y}_b \rangle = \text{tr} \left[\ddot{G}_{Bab} + \frac{1}{2} \frac{(\dot{G}_{Baa} - \dot{G}_{Bab})(\dot{G}_{Bab} - \dot{G}_{Bbb})}{\bar{T} - \frac{1}{2} C_{ab}} \right], \quad (7)$$

где

$$\mathcal{G}_B(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2(eF)^2} \left(\frac{eF}{\sin(eFT)} e^{-ieFT} \dot{G}_{B12} + ieF \dot{G}_{B12} - \frac{1}{T} \right) \quad (8)$$

– бозонная однопетлевая функция Грина (в рамках интегрирования по мировым линиям), модифицированная за счет постоянного поля [5, 17–19], а $C_{ab} \equiv \mathcal{G}_{Baa} - \mathcal{G}_{Bab} - \mathcal{G}_{Bba} + \mathcal{G}_{Bbb}$. Функция $\mathcal{G}_B$ обобщает обычную функцию Грина

$$G_B(\tau_i, \tau_j) = |\tau_i - \tau_j| - \frac{(\tau_i - \tau_j)^2}{T}. \quad (9)$$

Мы часто будем использовать сокращение $G_{B12} \equiv G_B(\tau_1, \tau_2)$ и т.д., а “точка” всегда обозначает производную по первой переменной, например $\dot{G}_{B12} = \text{sign}(\tau_1 - \tau_2) - 2(\tau_1 - \tau_2)/T$.

Производя интегрирование по частям по τ_a в первом слагаемом соотношения (7), можно вывести параметрический интеграл в альтернативной форме:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_{\text{scal}}^{(2)}[F] = & -(4\pi)^{-D} \frac{e^2}{2} \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} T^{-\frac{D}{2}} \int_0^\infty d\bar{T} \int_0^T d\tau_a \int_0^T d\tau_b \times \\ & \times \det^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{\sin(eFT)}{eFT} \right] \det^{-\frac{1}{2}} \left[\bar{T} - \frac{1}{2} C_{ab} \right] \times \\ & \times \frac{1}{2} \left\{ \text{tr} \dot{G}_{Bab} \text{tr} \left[\frac{\dot{G}_{Bab}}{\bar{T} - \frac{1}{2} C_{ab}} \right] + \text{tr} \left[\frac{(\dot{G}_{Baa} - \dot{G}_{Bab})(\dot{G}_{Bab} - \dot{G}_{Bbb})}{\bar{T} - \frac{1}{2} C_{ab}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Для нашей цели можно ограничиться случаем чисто магнитного поля. Возьмем это поле вдоль оси z , так что $F^{12} = B$, $F^{21} = -B$ являются единственными ненулевыми компонентами размерно продолженного тензора напряженности поля. Мы вводим также обозначения

$$\begin{aligned} z & \equiv eBT, \\ \gamma & \equiv (\bar{T} + G_{Bab})^{-1}, \\ \gamma^z & \equiv (\bar{T} + G_{Bab}^z)^{-1} \end{aligned}$$

и зависящую от z функцию Грина G_{Bab}^z

$$G_{Bab}^z \equiv \frac{T}{2} \frac{[\text{ch}(z) - \text{ch}(z\dot{G}_{ab})]}{z \text{sh}(z)} = G_{Bab} - \frac{1}{3T} G_{Bab}^2 z^2 + O(z^4), \quad (11)$$

$$\dot{G}_{Bab}^z = \frac{\text{sh}(z\dot{G}_{Bab})}{\text{sh}(z)} = \dot{G}_{Bab} - \frac{2}{3T} \dot{G}_{Bab} G_{Bab} z^2 + O(z^4) \quad (12)$$

(ср. с формулой (8)).

С этими определениями можно затем переписать различные следы и детерминанты, появляющиеся в соотношениях (6), (10), следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \det^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{\sin(eFT)}{eFT} \left(\overline{T} - \frac{1}{2} \mathcal{C}_{ab} \right) \right] &= \frac{z}{\text{sh}(z)} \gamma^{\frac{D}{2}-1} \gamma^z, \\
 \text{tr} [\ddot{\mathcal{G}}_{Bab}] &= 2D\delta(\tau_a - \tau_b) - 2(D-2) \frac{1}{T} - \frac{4}{T} \frac{z \text{ch}(z \dot{G}_{Bab})}{\text{sh}(z)}, \\
 \frac{1}{2} \text{tr} \dot{G}_{Bab} \text{tr} \left[\frac{\dot{G}_{Bab}}{\overline{T} - \frac{1}{2} \mathcal{C}_{ab}} \right] &= \frac{1}{2} \left[(D-2) \dot{G}_{Bab} + 2 \dot{G}_{Bab}^z \right] \times \\
 &\quad \times \left[(D-2) \dot{G}_{Bab} \gamma + 2 \dot{G}_{Bab}^z \gamma^z \right], \\
 \frac{1}{2} \text{tr} \left[\frac{(\dot{G}_{aa} - \dot{G}_{ab})(\dot{G}_{ab} - \dot{G}_{bb})}{\overline{T} - \frac{1}{2} \mathcal{C}_{ab}} \right] &= -\frac{1}{2} (D-2) \dot{G}_{Bab}^2 \gamma - \left[\dot{G}_{Bab}^{z2} + \frac{4}{T^2} z^2 G_{Bab}^{z2} \right] \gamma^z. \quad (13)
 \end{aligned}$$

Можно опустить член, включающий дельта-функцию $\delta(\tau_a - \tau_b)$ и возникающий из $\ddot{\mathcal{G}}_{Bab}$, поскольку он не будет давать вклада при размерной регуляризации (он соответствует вставке безмассового “головастика” в теории поля).

Подставляя эти выражения в соотношение (6) или (10), мы находим, что получающиеся интегралы содержат два типа расходимостей:

- 1) общая расходимость скалярного собственно-временного интеграла $\int_0^\infty dT$ на нижнем пределе интегрирования;
- 2) расходимости $\int_0^T d\tau_a \int_0^T d\tau_b$ в точке $\tau_a = \tau_b$, где начальная и конечная точки фотона становятся совпадающими.

Первая расходимость должна устраняться одно- и двухпетлевыми перенормировками фотонной волновой функции, а вторая – однопетлевой перенормировкой скалярной массы.

Оказывается, что эту программу легче провести над некоторой линейной комбинацией выражений (6) и (10), а именно,

$$\mathcal{L}_{\text{scal}}^{(2)}[B] = \frac{D-1}{D} \mathcal{L}_{\text{scal}}^{(2)}[F] + \frac{1}{D} \tilde{\mathcal{L}}_{\text{scal}}^{(2)}[F]. \quad (14)$$

Можно достичь аналогичного упрощения, взяв фотонную вставку в калибровке Ландау, хотя получающиеся параметрические интегралы и не совпадают. Кроме того, за счет масштабного преобразования мы переходим к единичному кругу $\tau_{a,b} = T u_{a,b}$, $\overline{T} = T \hat{T}$ и, используя трансляционную инвариантность в τ , полагаем $\tau_b = 0$. Поэтому далее имеем, что $G_{Bab} = u_a(1 - u_a)$, $\dot{G}_{Bab} = 1 - 2u_a$.

Полученный интеграл запишем в виде

$$\mathcal{L}_{\text{scal}}^{(2)}[B] = -(4\pi)^{-D} \frac{e^2}{2} \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} T^{2-D} \int_0^\infty d\hat{T} \int_0^1 du_a I(z, u_a, \hat{T}, D), \quad (15)$$

где масштабное преобразованное подынтегральное выражение $I(z, u_a, \hat{T}, D)$ зависит от T только через z .

В отличие от вычисления в регуляризации собственного времени $\widehat{T}$ -интегрирование в размерной регуляризации нетривиально. Поэтому будет проще выделить все подрасходимости *перед* вычислением этого интеграла. Анализ структуры расходимостей показывает, что подынтегральное выражение можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} K(z, u_a, D) &\equiv \int_0^\infty d\widehat{T} I(z, u_a, \widehat{T}, D) = \\ &= K_{02}(z, u_a, D) + f(z, D)G_{Bab}^{1-\frac{D}{2}} + O(z^4, G_{Bab}^{2-\frac{D}{2}}), \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} K_{02}(z, u_a, D) &= -4\frac{D-1}{D-2}G_{Bab}^{1-\frac{D}{2}} + \frac{2}{3D(D-2)} \left[(D-1)(D-4)G_{Bab}^{1-\frac{D}{2}} + \right. \\ &\quad \left. + (-2D^2 + 18D - 4)G_{Bab}^{2-\frac{D}{2}} \right] z^2, \\ f(z, D) &= \frac{D-1}{D(D-2)} \left[4D - \frac{2}{3}(D-4)z^2 + \right. \\ &\quad \left. + (8-4D)\frac{z}{\text{sh}(z)} - 8\frac{z^2 \text{ch}(z)}{\text{sh}^2(z)} \right] = O(z^4). \end{aligned} \quad (17)$$

Величина K_{02} состоит из слагаемых, постоянных и квадратичных по z , которые являются единственными слагаемыми, вызывающими расходимость при $T = 0$. Второе слагаемое есть $O(z^4)$, так что интеграл от него уже сходится при $T = 0$, впрочем, расходясь при $u_a = 0, 1$.

После отщепления этих двух слагаемых интеграл от остатка уже конечен, так что при его явном вычислении можно положить $D = 4$. Интеграл по $\widehat{T}$ при $D = 4$ становится элементарным и дает

$$\begin{aligned} K(z, u_a, 4) &= \frac{z}{\text{sh}(z)} \left\{ A_0 \frac{\ln(G_{Bab}/G_{Bab}^z)}{(G_{Bab} - G_{Bab}^z)} + A_1 \frac{\ln(G_{Bab}/G_{Bab}^z)}{(G_{Bab} - G_{Bab}^z)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{A_2}{(G_{Bab}^z)(G_{Bab} - G_{Bab}^z)} + \frac{A_3}{(G_{Bab})(G_{Bab} - G_{Bab}^z)} \right\}, \\ A_0 &= 3 \left[2z^2 G_{Bab}^z - \frac{z}{\text{th}(z)} - 1 \right], \\ A_1 &= 4z^2 G_{Bab}^{z2} + \frac{1}{2}(\dot{G}_{Bab}^{z2} - \dot{G}_{ab}^2), \\ A_2 &= -4z^2 G_{Bab}^{z2} + \frac{1}{2}\dot{G}_{Bab}^z(\dot{G}_{Bab} - \dot{G}_{Bab}^z), \\ A_3 &= \frac{1}{2}\dot{G}_{Bab}(\dot{G}_{Bab} - \dot{G}_{Bab}^z). \end{aligned} \quad (18)$$

Расходимости теперь будут устраняться за счет перенормировки массы и волновой функции

$$\begin{aligned} m^2 &= m_0^2 + \delta m_0^2, \\ e &= e_0 Z_3^{\frac{1}{2}}, \\ B &= B_0 Z_3^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (19)$$

До сих пор мы работали в голой регуляризованной теории, так что наши предыдущие формулы должны в последующем записываться через m_0 , e_0 , B_0 вместо m , e , B (отметим, что это оставляет z без изменения).

Поскольку мы нацелены на прямое сравнение с предыдущими вычислениями, мы будем делать перенормировку, используя не минимальные вычитания, а вычитания на массовой оболочке. При вычитаниях на массовой оболочке перенормировка фотонной волновой функции сводится просто к удалению z^2 -части от K_{02} , а оставшимся, не зависящим от z слагаемым, конечно, также можно пренебречь.

Удаление расходимостей, вызванных вторым слагаемым в (16), более трудоемко.

Обозначим соответствующий вклад в эффективный лагранжиан через $G_{\text{scal}}(z, D)$. Для этого члена интегрирование по u_a факторизуется и дает

$$\int_0^1 du_a G_{Bab}^{1-\frac{D}{2}} = B\left(2 - \frac{D}{2}, 2 - \frac{D}{2}\right) = -\frac{4}{\epsilon} + 0 + O(\epsilon), \quad (20)$$

где B обозначает бета-функцию Эйлера.

Заметим, что функцию $f(z, D)$ можно связать с подынтегральным выражением в скалярном однопетлевом лагранжиане Эйлера–Гейзенберга (3). В размерной регуляризации после вычитания двух членов низшего порядка по z за счет однопетлевой перенормировки волновой функции этот лагранжиан принимает вид

$$\bar{\mathcal{L}}_{\text{scal}}^{(1)}[B_0] = \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m_0^2 T} (4\pi T)^{-\frac{D}{2}} \left[\frac{z}{\text{sh}(z)} + \frac{z^2}{6} - 1 \right]. \quad (21)$$

С другой стороны, мы можем переписать $f(z, D)$ как

$$f(z, D) = 8 \frac{D-1}{D(D-2)} T^{\frac{D}{2}+1} \frac{d}{dT} \left\{ T^{-\frac{D}{2}} \left[\frac{z}{\text{sh}(z)} + \frac{z^2}{6} - 1 \right] \right\}. \quad (22)$$

Поэтому с помощью интегрирования по частям по T имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m_0^2 T} T^{2-D} f(z, D) &= \\ &= 8 \frac{D-1}{D(D-2)} \left\{ m_0^2 \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m_0^2 T} T^{3-D} \left[\frac{z}{\text{sh}(z)} + \frac{z^2}{6} - 1 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{D-4}{2} \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m_0^2 T} T^{2-D} \left[\frac{z}{\text{sh}(z)} + \frac{z^2}{6} - 1 \right] \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

(граничных членов нет, т.к. $f(z) = O(z^4)$).

На двухпетлевом уровне эффект перенормировки массы состоит в следующем сдвиге, который производится за счет однопетлевого смещения массы δm_0^2 :

$$\delta \mathcal{L}_{\text{scal}}^{(2)}[B_0] = \delta m_0^2 \frac{\partial}{\partial m_0^2} \bar{\mathcal{L}}_{\text{scal}}^{(1)}[B_0]. \quad (24)$$

Член δm_0^2 порождается ультрафиолетовой расходимостью однопетлевой скалярной собственной энергии в скалярной КЭД. Мы должны взять эту величину из стандартной теории поля. В размерной регуляризации мы имеем¹⁾

$$\delta m_0^2 = m_0^2 \frac{\alpha_0}{4\pi} \left[-\frac{6}{\epsilon} + 7 - 3[\gamma - \ln(4\pi)] - 3 \ln(m_0^2) \right] + O(\epsilon). \quad (25)$$

Здесь $\epsilon = D - 4$, а γ обозначает постоянную Эйлера–Машерони²⁾. Разлагая (20), (23) и (24) по ϵ , мы находим, что с точностью до членов порядка $O(\epsilon)$

$$\begin{aligned} G_{\text{scal}}(z, D) = & \delta m_0^2 \frac{\partial}{\partial m_0^2} \bar{\mathcal{L}}_{\text{scal}}^{(1)}[B_0] + m_0^2 \frac{\alpha_0}{(4\pi)^3} \int_0^\infty \frac{dT}{T^2} e^{-m_0^2 T} \left[\frac{z}{\text{sh}(z)} + \frac{z^2}{6} - 1 \right] \times \\ & \times \left[-3\gamma - 3 \ln(m_0^2 T) + \frac{3}{m_0^2 T} + \frac{9}{2} \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Отметим, что вся расходимость $G_{\text{scal}}(z, D)$ при $D \rightarrow 4$ теперь поглотилась в δm_0^2 .

Окончательный ответ для двухпетлевого вклада в конечный перенормированный лагранжиан Эйлера–Гейзенберга в скалярной КЭД, таким образом, принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{scal}}^{(2)}[B] = & -\frac{\alpha}{2(4\pi)^3} \int_0^\infty \frac{dT}{T^3} e^{-m^2 T} \int_0^1 du_a \left[K(z, u_a, 4) - K_{02}(z, u_a, 4) - \frac{f(z, 4)}{G_{Bab}} \right] + \\ & + \frac{\alpha}{(4\pi)^3} m^2 \int_0^\infty \frac{dT}{T^2} e^{-m^2 T} \left[\frac{z}{\text{sh}(z)} + \frac{z^2}{6} - 1 \right] \times \\ & \times \left[-3\gamma - 3 \ln(m^2 T) + \frac{3}{m^2 T} + \frac{9}{2} \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Насколько нам известно, единственное более раннее вычисление двухпетлевого лагранжиана Эйлера–Гейзенберга в скалярной КЭД – это вычисление в [20, 21]. Приведенный там параметрический интеграл отличается от нашего, и нам не удалось непосредственно отождествить оба представления. Однако мы использовали программу MAPLE для разложения обеих формул в ряд Тейлора по B вплоть до порядка $O(B^{20})$ и нашли точное согласие для коэффициентов. Приведем только несколько первых членов в этом разложении:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{scal}}^{(2)}[B] = & \frac{\alpha m^4}{(4\pi)^3} \frac{1}{81} \left[\frac{275}{8} \left(\frac{B}{B_{\text{cr}}} \right)^4 - \frac{5159}{200} \left(\frac{B}{B_{\text{cr}}} \right)^6 + \right. \\ & \left. + \frac{2255019}{39200} \left(\frac{B}{B_{\text{cr}}} \right)^8 - \frac{931061}{3600} \left(\frac{B}{B_{\text{cr}}} \right)^{10} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Параметр разложения был переписан через $B_{\text{cr}} \equiv m^2/e \approx 4.4 \cdot 10^{13}$ гс.

Соответствующее вычисление для спинорной КЭД полностью аналогично. В суперполевым формализме [5, 9, 22] для интегралов по мировым линиям формулы (6) и (7)

¹⁾ Отметим, что она отличается знаком от члена δm^2 , использованного в [9]. Здесь мы так обозначаем само смещение массы, а там – соответствующий контрчлен.

²⁾ Для сравнения отметим, что в [3–5, 20] эта постоянная обозначалась через $\ln(\gamma)$.

обобщаются в виде следующего интегрального представления для двухпетлевого эффективного действия, индуцированного спинорной петлей:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{spin}}^{(2)}[F] &= (-2)(4\pi)^{-D} \left(-\frac{e^2}{2} \right) \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} T^{-\frac{D}{2}} \times \\ &\quad \times \int_0^\infty d\bar{T} \int_0^T d\tau_a d\tau_b \int d\theta_a d\theta_b \det^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{\text{tg}(eFT)}{eFT} \right] \times \\ &\quad \times \det^{-\frac{1}{2}} \left[\bar{T} - \frac{1}{2} \hat{C}_{ab} \right] \langle (-D_a y_a)(D_b y_b) \rangle, \\ \langle (-D_a y_a)(D_b y_b) \rangle &= \text{tr} \left[D_a D_b \hat{\mathcal{G}}_{ab} + \frac{1}{2} \frac{D_a (\hat{\mathcal{G}}_{aa} - \hat{\mathcal{G}}_{ab}) D_b (\hat{\mathcal{G}}_{ab} - \hat{\mathcal{G}}_{bb})}{\bar{T} - \frac{1}{2} \hat{C}_{ab}} \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Появляющаяся здесь величина $\hat{\mathcal{G}}$ представляет собой суперпропагатор для постоянного поля в рамках интегралов по мировым линиям

$$\hat{\mathcal{G}}(\tau_1, \theta_1; \tau_2, \theta_2) \equiv \mathcal{G}_B(\tau_1, \tau_2) + \theta_1 \theta_2 \mathcal{G}_F(\tau_1, \tau_2), \quad (30)$$

который, помимо бозонного пропагатора (8), содержит также фермионную часть

$$\mathcal{G}_F(\tau_1, \tau_2) = \text{sign}(\tau_1 - \tau_2) \frac{e^{-ieFT\dot{\mathcal{G}}_{B12}}}{\cos(eFT)}. \quad (31)$$

Наши суперполевые соглашения таковы:

$$D = \frac{\partial}{\partial \theta} - \theta \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \int d\theta \theta = 1.$$

Производя грассмановы интегрирования и удаляя $\ddot{\mathcal{G}}_{Bab}$ интегрированием по частям по τ_a , мы получаем соотношение, эквивалентное (10),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{spin}}^{(2)}[F] &= (4\pi)^{-D} e^2 \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} T^{-\frac{D}{2}} \int_0^\infty d\bar{T} \int_0^T d\tau_a \int_0^T d\tau_b \times \\ &\quad \times \det^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{\text{tg}(eFT)}{eFT} \left(\bar{T} - \frac{1}{2} \mathcal{C}_{ab} \right) \right] \times \\ &\quad \times \frac{1}{2} \left\{ \text{tr} \dot{\mathcal{G}}_{Bab} \text{tr} \left[\frac{\dot{\mathcal{G}}_{Bab}}{\bar{T} - \frac{1}{2} \mathcal{C}_{ab}} \right] - \text{tr} \mathcal{G}_{Fab} \text{tr} \left[\frac{\mathcal{G}_{Fab}}{\bar{T} - \frac{1}{2} \mathcal{C}_{ab}} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \text{tr} \left[\frac{(\dot{\mathcal{G}}_{Baa} - \dot{\mathcal{G}}_{Bab})(\dot{\mathcal{G}}_{Bab} - \dot{\mathcal{G}}_{Bbb} + 2\mathcal{G}_{Faa}) + \mathcal{G}_{Fab}\mathcal{G}_{Fab} - \mathcal{G}_{Faa}\mathcal{G}_{Fbb}}{\bar{T} - \frac{1}{2} \mathcal{C}_{ab}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

Отметим, что эта формула сводится к соотношению (10), если заменить $\text{tg}(eFT)$ на $\sin(eFT)$ и удалить все $\mathcal{G}_F$, а также глобальный множитель -2 , который учитывает разницу в статистике и степенях свободы между спином 0 и $1/2$.

В отличие от случая скалярной КЭД интеграл, полученный после интегрирования по частям, оказывается уже подходящей отправной точкой для перенормировки (подробнее об этом см. главу 7 в [5]).

При переходе к случаю магнитного поля снова легко вычислить лоренцевы детерминанты и следы. После масштабного преобразования к единичному кругу мы получаем следующий параметрический интеграл:

$$\mathcal{L}_{\text{spin}}^{(2)}[B] = (4\pi)^{-D} e^2 \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} T^{2-D} \int_0^\infty d\hat{T} \int_0^1 du_a J(z, u_a, \hat{T}, D). \quad (33)$$

Выделение подрасходимостей дает

$$L(z, u_a, D) \equiv \int_0^\infty d\hat{T} J(z, u_a, \hat{T}, D) = L_{02}(z, u_a, D) + g(z, D) G_{Bab}^{1-\frac{D}{2}} + O\left(z^4, G_{Bab}^{2-\frac{D}{2}}\right), \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} L_{02}(z, u_a, D) &= -4(D-1)G_{Bab}^{1-\frac{D}{2}} - \\ &\quad - \frac{4}{3D} \left[(D-1)(D-4)G_{Bab}^{1-\frac{D}{2}} + (D-2)(D-7)G_{Bab}^{2-\frac{D}{2}} \right] z^2, \\ g(z, D) &= -\frac{4}{3} \frac{D-1}{D} \left[6 \frac{z^2}{\text{sh}^2(z)} + 3(D-2)z \text{ch}(z) - \right. \\ &\quad \left. - (D-4)z^2 - 3D \right] = O(z^4). \end{aligned} \quad (35)$$

Величина L_{02} снова удаляется перенормировкой фотонной волновой функции. Обозначая вклад второго слагаемого через $G_{\text{spin}}(z, D)$, мы замечаем, что интеграл по u_a тот же, что и в случае скалярной КЭД (см. (20)). Используя аналогичное соотношению (22) тождество

$$g(z, D) = 8 \frac{D-1}{D} T^{\frac{D}{2}+1} \frac{d}{dT} \left\{ T^{-\frac{D}{2}} \left[\frac{z}{\text{th}(z)} - \frac{z^2}{3} - 1 \right] \right\}, \quad (36)$$

мы интегрируем по частям в оставшемся интеграле по T . Затем мы опять находим, что $1/\epsilon$ -вклад в G_{spin} оказывается подходящим для поглощения сдвига, индуцированного однопетлевым смещением массы:

$$\delta m_0 = m_0 \frac{\alpha_0}{4\pi} \left[-\frac{6}{\epsilon} + 4 - 3[\gamma - \ln(4\pi)] - 3 \ln(m_0^2) \right] + O(\epsilon). \quad (37)$$

С точностью до порядка ϵ мы получаем, что

$$\begin{aligned} G_{\text{spin}}(z, D) &= \delta m_0 \frac{\partial}{\partial m_0} \bar{\mathcal{L}}_{\text{spin}}^{(1)}[B_0] + m_0^2 \frac{\alpha_0}{(4\pi)^3} \int_0^\infty \frac{dT}{T^2} e^{-m_0^2 T} \left[\frac{z}{\text{th}(z)} - \frac{z^2}{3} - 1 \right] \times \\ &\quad \times \left[12\gamma + 12 \ln(m_0^2 T) - \frac{12}{m_0^2 T} - 18 \right]. \end{aligned} \quad (38)$$

Наш окончательный результат для перенормированного на массовой оболочке двухпетлевого лагранжиана Эйлера–Гейзенберга в спинорной КЭД имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{spin}}^{(2)}[B] &= \frac{\alpha}{(4\pi)^3} \int_0^\infty \frac{dT}{T^3} e^{-m^2 T} \int_0^1 du_a \left[L(z, u_a, 4) - L_{02}(z, u_a, 4) - \frac{g(z, 4)}{G_{Bab}} \right] - \\ &\quad - \frac{\alpha}{(4\pi)^3} m^2 \int_0^\infty \frac{dT}{T^2} e^{-m^2 T} \left[\frac{z}{\text{th}(z)} - \frac{z^2}{3} - 1 \right] \times \\ &\quad \times \left[18 - 12\gamma - 12 \ln(m^2 T) + \frac{12}{m^2 T} \right], \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned}
 L(z, u_a, 4) &= \frac{z}{\text{th}(z)} \left\{ B_1 \frac{\ln(G_{Bab}/G_{Bab}^z)}{(G_{Bab} - G_{Bab}^z)^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{B_2}{G_{Bab}^z(G_{Bab} - G_{Bab}^z)} + \frac{B_3}{G_{Bab}(G_{Bab} - G_{Bab}^z)} \right\}, \\
 B_1 &= 4z \left(\text{cth}(z) - \text{th}(z) \right) G_{Bab}^z - 4G_{Bab}, \\
 B_2 &= 2\dot{G}_{Bab}\dot{G}_{Bab}^z + z(8\text{th}(z) - 4\text{cth}(z))G_{Bab}^z - 2, \\
 B_3 &= 4G_{Bab} - 2\dot{G}_{Bab}\dot{G}_{Bab}^z - 4z\text{th}(z)G_{Bab}^z + 2, \\
 L_{02}(z, u_a, 4) &= -\frac{12}{G_{Bab}} + 2z^2, \\
 g(z, 4) &= -6 \left[\frac{z^2}{\text{sh}(z)^2} + z\text{cth}(z) - 2 \right].
 \end{aligned} \tag{40}$$

Производя сравнение с предыдущими результатами Ритуса и Дитриха–Ройтера, мы снова не смогли провести прямое отождествление с более сложным параметрическим интегралом, данным Ритусом [3]. Однако, как и в случае скалярной КЭД, мы проверили согласие двух формул вплоть до порядка $O(B^{20})$ в разложении слабого поля по B . Вот несколько первых коэффициентов:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{spin}}^{(2)}[B] &= \frac{\alpha m^4}{(4\pi)^3} \frac{1}{81} \left[64 \left(\frac{B}{B_{\text{cr}}} \right)^4 - \frac{1219}{25} \left(\frac{B}{B_{\text{cr}}} \right)^6 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{135308}{1225} \left(\frac{B}{B_{\text{cr}}} \right)^8 - \frac{791384}{1575} \left(\frac{B}{B_{\text{cr}}} \right)^{10} + \dots \right].
 \end{aligned} \tag{41}$$

С другой стороны, наша формула “почти позволяет” почленное отождествление с результатом Дитриха–Ройтера [4], который дается соотношениями (7.21), (7.22) из их работы. Это требует поворота к собственному времени в пространстве Минковского $T \rightarrow is$, перехода от переменных u_a к $v := \dot{G}_{Bab}$, использования тригонометрических тождеств и еще одного интегрирования по частям по T для двух последних слагаемых в (39). Единственное расхождение возникает в постоянной 18, которая превращается в 10 в формуле Дитриха–Ройтера.

Поскольку эту константу можно подогнать заменой конечной постоянной, появляющейся в δm_0 , мы заключаем, что два предыдущих результата для этого эффективного лагранжиана отличаются в точности на конечную перенормировку массы. Кроме того, ясно, что именно формула Ритуса правильно определяет физическую электронную массу.

Упомянем, наконец, что однопетлевой лагранжиан Эйлера–Гейзенберга и, может быть, даже его двухпетлевую поправку, рассмотренную выше, удастся измерить в оптических экспериментах в ближайшем будущем [23].

К. Шуберт хотел бы поблагодарить О. В. Тарасова за обсуждения и А. А. Владимирова за переписку (работа К. Шуберта была поддержана DFG).

Список литературы

- [1] *W. Heisenberg, H. Euler.* Z. Phys. B. 1936. B. 38. S. 714.
- [2] *J. Schwinger.* Phys. Rev. 1951. V. 82. P. 664.
- [3] *В. И. Пумис.* ЖЭТФ. 1975. Т. 42. С. 774.
- [4] *W. Dittrich, M. Reuter.* Effective Lagrangians in Quantum Electrodynamics. Berlin, New York: Springer, 1985.
- [5] *M. Reuter, M. G. Schmidt, C. Schubert.* IASSNS-HEP-96/90 (hep-th/9610191); Ann. Phys. 1997 (in press).
- [6] *M. J. Strassler.* Nucl. Phys. B. 1992. V. 385. P. 145.
- [7] *M. G. Schmidt, C. Schubert.* Phys. Lett. B. 1993. V. 318. P. 438; hep-th/9309055.
- [8] *M. G. Schmidt, C. Schubert.* Phys. Lett. B. 1994. V. 331. P. 69; hep-th/9403158.
- [9] *M. G. Schmidt, C. Schubert.* Phys. Rev. D. 1996. V. 53. P. 2150; hep-th/9410100.
- [10] *K. Daikouji, M. Shino, Y. Sumino.* Phys. Rev. D. 1996. V. 53. P. 4598; hep-ph/9508377.
- [11] *K. Roland, H. Sato.* Nucl. Phys. B. 1996. V. 480. P. 99; hep-th/9604152.
- [12] *C. Schubert.* Acta Phys. Pol. B. 1996. V. 27. P. 3965; hep-th/9610108.
- [13] *Z. Bern, D. A. Kosower.* Phys. Rev. Lett. 1991. V. 66. P. 1669; Nucl. Phys. B. 1992. V. 379. P. 451.
- [14] *Z. Bern, D. C. Dunbar.* Nucl. Phys. B. 1992. V. 379. P. 562.
- [15] *А. А. Владимиров.* ТМФ. 1978. Т. 36. С. 271.
- [16] *R. P. Feynman.* Phys. Rev. 1950. V. 80. P. 440.
- [17] *S. L. Adler, C. Schubert.* Phys. Rev. Lett. 1996. V. 77. P. 1695; hep-th/9605035.
- [18] *D. Cangemi, E. D'Hoker, G. Dunne.* Phys. Rev. D. 1995. V. 51. P. 2513; hep-th/9409113.
- [19] *R. Shaisultanov.* Phys. Lett. B. 1996. V. 378. P. 354; hep-th/9512142.
- [20] *В. И. Пумис.* ЖЭТФ. 1977. Т. 46. С. 423.
- [21] *С. Л. Лебедев.* Препринт ФИАН № 254. М.: ФИАН, 1982.
- [22] *A. M. Polyakov.* Gauge Fields and Strings. Harwood, 1987.
- [23] *D. Bakalov et al.* Nucl. Phys. B. Proc. Suppl. 1994. V. 35. P. 180; *D. Bakalov.* INFN/AE-94/27 (не опубликовано).

Поступила в редакцию 26.V.1997 г.

M. Reuter, D. Fliegner, M. G. Schmidt, C. Schubert
TWO-LOOP EULER–HEISENBERG LAGRANGIAN
IN DIMENSIONAL RENORMALIZATION

By calculating the two-loop QED Euler–Heisenberg Lagrangian in dimensional regularization, we clarify a discrepancy between two previous calculations of this quantity, both performed in proper-time regularization.