Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ч. Жуковский, О. В. Тарасов, Нулевые моды оператора Дирака в калибровочных полях вихревого типа, *ТМФ*, 2004, том 140, номер 3, 410–423

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf108>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 13:44:43

© 2004 г.

В. Ч. Жуковский*, О. В. Тарасов*

НУЛЕВЫЕ МОДЫ ОПЕРАТОРА ДИРАКА В КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЯХ ВИХРЕВОГО ТИПА

Получены решения уравнения Дирака в $SU(2)$ -калибровочном поле, имеющем вид пересекающихся центральных вихрей, в четырехмерном евклидовом пространстве, отвечающие нормируемым нулевым модам. В рамках обсуждения проблемы построения механизма нарушения киральной симметрии, основанного на модели со случайно распределенными центральными вихрями, исследована возможность расщепления фермионных нулевых мод в случае суперпозиции многих вихрей с индексами Понтрягина различных знаков.

Ключевые слова: калибровочные поля, вакуум КХД, киральная симметрия, центральные вихри.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время большое внимание уделяется объяснению возникновения непертурбативных явлений в неабелевых калибровочных теориях (см., например, недавние обзоры по конфайнменту [1] и нарушению киральной симметрии (НКС) [2]). Согласно одной из гипотез конфайнмент объясняется тем, что поток цветового электрического поля кварк-антикварковой пары сжимается в трубку, что и приводит к линейному закону для потенциальной энергии взаимодействия кварков. Дальнейшему развитию этой идеи способствовало использование методов проектирования [3] и, в частности, максимальной абелевой калибровки, что привело к подтверждению возможности возникновения подобного механизма в численных экспериментах на решетках. Эффект возникновения трубок цветового электрического потока, образованных за счет конденсации цветовых монополей [4], дуален известному в теории сверхпроводимости эффекту образования струн с магнитным потоком в них (струны Абрикосова–Нильсена–Олесена [5], [6]). Другое объяснение конфайнмента основано на методе максимальной центральной калибровки [7], [8], который позволил продемонстрировать так называемое центральное доминирование и предложить механизм конфайнмента, основанный на представлении о центральных вихрях ($Z(N_c)$ -вихри). В этой картине предполагается существование $Z(N_c)$ -вихрей, распределение которых в пространстве подвержено случайным флуктуациям, в результате чего возникает закон площадей для петли Вильсона, а это, в свою

*Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: zhukovsk@phys.msu.ru

очередь, означает линейный закон изменения кваркового потенциала, т.е. конфайнмент. Численные эксперименты [9] показали, что удаление вихрей из решеточных конфигураций приводит не только к исчезновению конфайнмента, но также и к исчезновению НКС. При этом критические температуры, при которых появляется конфайнмент и восстанавливается киральная симметрия на решетке, оказываются одинаковыми. Поскольку, как известно, на основе инстантонного механизма не удастся объяснить конфайнмент, то возникает предположение, что центральные вихри могут быть ответственны как за конфайнмент, так и за НКС. Таким образом, можно полагать, что роль центральных вихрей в формировании непертурбативных явлений в теории неабелевых калибровочных полей в инфракрасной области оказывается весьма существенной. В то же время описание возникновения и динамики центральных вихрей представляет собой довольно сложную проблему. Рассмотрение центральных вихрей в рамках теории поля началось еще в 1978 г. [10]. Позднее была предложена идея “спагетти вакуума” [11], которая в последнее время получила новое развитие в рамках теории четырехмерных поверхностей и струн [12], [13]. Весьма продуктивным оказалось также развитие континуального метода описания центральных вихрей, предпринятое в работах [14], [15] и затем продолженное в ряде последующих работ (см. например, [16]–[22]).

Представляет также интерес исследование поведения фермионов (кварков) в указанных калибровочных структурах. Как известно, параметром, описывающим НКС, является вакуумное среднее фермионного поля $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$. При этом между фермионным (кварковым) конденсатом и плотностью фермионных нулевых мод в нуле $\rho(0)$ существует соотношение [23]

$$\int d^4x \langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\frac{1}{\pi} \langle \rho(0) \rangle. \quad (1)$$

Поэтому для возникновения эффекта НКС необходимо, чтобы средняя плотность нулевых мод в единице четырехмерного объема $\langle \rho(0) \rangle / V_4$ была ненулевой. Кроме того, в работе [23] было показано, что при этом фермионы в глюонном вакуумном поле должны эффективно совершать одномерное движение. Возникает вопрос, какие конфигурации вакуумных калибровочных полей ответственны за эффект НКС. Как известно, инстантонный газ может обеспечить подобный эффект [2], однако инстантоны не могут объяснить конфайнмент. Что касается центральных вихрей, то хотя и имеются свидетельства в пользу того, что они могут быть ответственны за конфайнмент, однозначного ответа на вопрос, могут ли они отвечать и за НКС, пока не существует. Возможным аргументом в пользу того, что центральные вихри ответственны за оба непертурбативных эффекта, является упомянутый выше результат, полученный на решетках в работе [9] (см. также [24], [1]). В связи с этим анализ центральных вихрей и других топологически нетривиальных калибровочных структур, а также возникновения на их фоне нормируемых фермионных нулевых мод и их роли в формировании механизмов таких непертурбативных явлений, как НКС и конфайнмент, представляет значительный интерес.

В последнее время этой, а также связанной с ней более общей проблеме изучения фермионных детерминантов во внешних калибровочных полях уделяется большое внимание (см. например, обзор [25]). Так, в работах [18] и [26] проводились исследования фермионных нулевых мод в поле пересекающихся $Z(N_c)$ -вихрей. При этом в ра-

боте [26] изучался спектральный поток и спектр дираковского гамильтониана на фоне пересекающихся $Z(N_c)$ -вихрей в пространстве, представляющем собой четырехмерный тор. Закономерности поведения фермионных детерминантов во внешних калибровочных полях общего вида рассматривались, например, в работе [27]. Недавно было выявлено множество абелевых и неабелевых калибровочных конфигураций с нетривиальными топологическими свойствами в трехмерном пространстве и были исследованы решения уравнения Дирака в этих полях, соответствующие нулевым модам [28], [29]. Калибровочные поля, подобные описанным в работах [28], не удовлетворяют уравнениям поля, однако, как показано, например, в работе [30], они могут быть получены в результате абелевой проекции чисто калибровочной неабелевой конфигурации.

Таким образом, проблема исследования фермионных нулевых мод представляет интерес как с формальной точки зрения – получение нормируемых решений уравнения Дирака для безмассовых фермионов, так и с точки зрения возможного приложения к проблеме построения механизма НКС.

В предлагаемой статье в рамках континуального описания центральных вихрей, проведенного в работе [14], продолжая исследования, начатые в работе [18], мы рассмотрим проблему построения нормируемых фермионных нулевых мод для уравнения Дирака в фоновом $SU(2)$ -калибровочном поле, которое представляет собой конфигурацию, состоящую из произвольного числа пересекающихся вихрей и антивихрей.

2. ФЕРМИОНЫ В ДВУМЕРНОМ АБЕЛЕВОМ ПОЛЕ

Лагранжева плотность безмассового дираковского поля ψ , взаимодействующего с калибровочным полем A_μ , в двумерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$ имеет вид

$$\mathcal{L}_F = \psi^\dagger \gamma_\mu D_\mu \psi, \quad (2)$$

где $D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$. Мы используем спинорное представление для гамма-матриц в двумерном пространстве Евклида $\gamma_1 = \sigma_1$, $\gamma_2 = \sigma_2$, $\gamma_3 = \sigma_3$.

Рассмотрим фоновое калибровочное поле, заданное в лоренцевой калибровке, $A_\mu = \epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \phi(r)$, где $\mu, \nu = 1, 2$, $\epsilon_{12} = 1$, $r^2 = x^2 + y^2$ (r, φ – полярные координаты). Обозначив $\phi'(r) = -g(r)$, получим

$$A = \frac{g(r)}{r}(-y, x). \quad (3)$$

Предположим, что $g(r) = \alpha/r + o(1/r)$, где $\alpha = \text{const}$, при $r \rightarrow \infty$, и $g(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$. Если $\alpha > 0$, то будем называть такое поле вихрем, в противном случае, т.е. при $\alpha < 0$ – антивихрем. Поток такого двумерного поля

$$\Phi = \frac{1}{2\pi} \oint_{|\mathbf{r}|=R \rightarrow \infty} A_\mu dx_\mu = \alpha. \quad (4)$$

На бесконечности $R \rightarrow \infty$ калибровочное поле переходит в чистую калибровку, задаваемую калибровочной функцией $\omega(\varphi) \in U(1)$,

$$A_\mu^{\text{pure gauge}} = i\omega^{-1}(\varphi)\partial_\mu\omega(\varphi). \quad (5)$$

При целых значениях α калибровочная функция определяет непрерывное отображение пространственной бесконечности на калибровочную группу степени

$$Q_2 = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega \frac{d\omega^{-1}}{d\varphi} d\varphi, \quad (6)$$

называемой топологическим зарядом калибровочного поля в двумерном пространстве и совпадающей с α .

Будем искать нулевые моды оператора Дирака, т.е. решения уравнения $\gamma D\psi = 0$ с конечной нормой $\|\psi\|^2 = \int \psi^+(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) d^2x$. Оператор момента в полярных координатах r, φ имеет вид

$$J = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_3}{2}. \quad (7)$$

Он коммутирует с дираковским оператором γD и имеет полуцелые собственные значения, которым отвечают собственные векторы – двухкомпонентные спиноры. Пространство нулевых мод распадается в прямую сумму левых и правых (в двумерном смысле) нулевых мод с определенным угловым моментом $l = j \pm 1/2$:

$$\psi_L(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} h_L(\mathbf{r}) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} f_L(r) e^{il\varphi}, \quad \psi_R(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ h_R(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} f_R(r) e^{il\varphi}. \quad (8)$$

Для неизвестных функций f_L, f_R из уравнения Дирака получим уравнения

$$\begin{aligned} f'_L(r) &= \left(\frac{l}{r} - g(r) \right) f_L(r), \\ f'_R(r) &= - \left(\frac{l}{r} - g(r) \right) f_R(r). \end{aligned} \quad (9)$$

Они имеют решения при произвольных l , так что

$$\psi_L(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp \left\{ \int \left(\frac{l}{r} - g(r) \right) dr \right\} e^{il\varphi}, \quad \psi_R(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp \left\{ \int \left(g(r) - \frac{l}{r} \right) dr \right\} e^{il\varphi}. \quad (10)$$

Однако не при всех l решения будут нормируемыми. Используя асимптотические свойства $g(r)$, находим

$$\begin{cases} |\psi_L(\mathbf{r})| \sim r^{l-\alpha} \\ |\psi_R(\mathbf{r})| \sim r^{\alpha-l} \end{cases} \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad \begin{cases} |\psi_L(\mathbf{r})| \sim r^l \\ |\psi_R(\mathbf{r})| \sim r^{-l} \end{cases} \quad \text{при } r \rightarrow 0. \quad (11)$$

Следовательно, нулевые моды будут нормируемыми, если

$$\begin{aligned} l &\in (-1, \alpha - 1) && \text{для левых мод,} \\ l &\in (\alpha + 1, 1) && \text{для правых мод.} \end{aligned} \quad (12)$$

Заметим, что указанные интервалы являются пустыми для правых мод при $\alpha > 0$ (вихрь), для левых – при $\alpha < 0$ (антивихрь).

Для целочисленных значений потока, равных топологическому заряду $\Phi = \alpha = Q_2$, можно убедиться в справедливости теоремы об индексе Атьи–Зингера [31]. Согласно этой теореме разность числа левых N_L и правых N_R фермионных нулевых мод в фоновом поле равняется топологическому заряду. Для группы $U(1)$ в двумерии это значит, что $N_L - N_R = Q_2$. Проверим это. Пусть $\alpha = Q_2 > 0$. Тогда правые моды отсутствуют, а число левых мод равняется числу целых чисел в интервале $(-1, \alpha - 1)$, т.е. $Q_2 - 1$. Нормы решений с $l = \alpha - 1$ и $l = -1$ логарифмически расходятся соответственно на бесконечности и в нуле. Ниже для краткости мы будем называть такие решения расходящимися, имея в виду их норму. Однако нулевые моды с $l = \alpha - 1$ можно нормировать путем инфинитезимального изменения профильной функции на бесконечности: $g(r) \rightarrow g(r) + \delta g(r)$, где $\delta g(r)$ – малая добавка, исчезающая при $r \rightarrow 0$, а при больших r ведущая себя как, например, ε/r или (если мы хотим сохранить топологические свойства потенциала) $g(r) \rightarrow g(r) - 1/(r \ln r)$. Можно показать, что без этого изменения $g(r)$ теорема Атьи–Зингера все равно выполняется за счет вклада непрерывного спектра, который обращается в нуль, когда логарифмически расходящаяся нулевая мода становится нормируемой. С точки зрения теоремы Атьи–Зингера логарифмически расходящиеся на бесконечности нулевые моды следует учитывать как нормируемые. Логарифмически расходящееся в нуле решение не вносит вклада в левую часть соотношения теоремы Атьи–Зингера.

Рассмотрим для примера потенциал с гладким профилем

$$A = (r^2 + a^2)^{-1}(-y, x),$$

т.е. $g(r) = r/(r^2 + a^2)$ и $\alpha = Q_2 = 1$. Истинно нормируемых нулевых мод нет, но есть две логарифмически расходящиеся левые моды

$$\psi_L^{l=0}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}}, \quad \psi_L^{l=-1}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{e^{-i\varphi}}{r\sqrt{r^2 + a^2}}, \quad (13)$$

первая из которых нормируется указанным выше способом, вторая – сингулярна.

Рассмотрим теперь суперпозицию N полей рассмотренного выше типа,

$$A(\mathbf{r}) = A_1(\mathbf{r}) + A_2(\mathbf{r}) + \dots + A_N(\mathbf{r}), \quad (14)$$

где поле $A_i(\mathbf{r}) = (g_i(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|)/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|)(-(y - y_i), x - x_i)$ имеет профильную функцию $g_i(r)$ с центром в точке $\mathbf{r}_i$, причем $g_i(r) = \alpha_i/r + o(1/r)$. Топологический заряд полного поля имеет вид

$$Q_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N. \quad (15)$$

Дираковский оператор в таком поле имеет нулевые моды, которые можно построить в виде произведения (а не суперпозиции) нулевых мод для отдельных слагаемых суммы (14). В самом деле, конструируя левые (или правые) решения, мы не сталкиваемся с матричной структурой уравнения Дирака и имеем дело с дифференциальными уравнениями первого порядка. Например, левые решения для нулевых мод имеют общий вид

$$\psi_L(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} h_1(\mathbf{r})h_2(\mathbf{r}) \dots h_N(\mathbf{r}), \quad (16)$$

где $h_i(\mathbf{r})$ – некоторая левая нулевая мода дираковского оператора в поле i -го слагаемого суперпозиции (14),

$$h_i(\mathbf{r}) = \tilde{f}_{Li}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|) |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^{l_i} e^{il_i \varphi_i}. \quad (17)$$

Здесь $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$ и φ_i – полярные координаты с центрами в точках $\mathbf{r}_i$. Для исключения расходимостей вблизи центров $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_i$ полагаем, что все l_i принимают целые положительные значения или нуль. На бесконечности

$$\tilde{f}_{Li}(r) \sim r^{-\alpha_i} \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Следовательно, решение в целом будет нормируемым, если

$$\sum_{i=1}^N l_i < Q_2 - 1, \quad (19)$$

где мы воспользовались равенством (15). Поскольку любая комбинация неотрицательных чисел $l_1, \dots, l_N$ при условии (19) дает нормируемое решение, то кажется, что число нормируемых решений больше, чем Q_2 , и зависит от N . На самом деле среди них есть линейно зависящие, что следует из формулы

$$e^{i\varphi_1} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| - e^{i\varphi_2} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| = \text{const}, \quad (20)$$

и поэтому число линейно независимых нулевых мод равно Q_2 .

Рассмотрим теперь суперпозицию N_+ вихрей и N_- антивихрей (причем $N_+ > N_-$), которые имеют вид

$$A_{i\pm}(\mathbf{r}) = \pm \frac{1}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i^\pm)^2 + a^2} (- (y - y_i^\pm), x - x_i^\pm). \quad (21)$$

Эта конфигурация обладает топологическим зарядом $Q_2 = N_+ - N_-$. Действуя аналогично предыдущему, в Q_2 -мерном пространстве нулевых мод можно выделить базис

$$\Psi_l(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} r^l e^{il\varphi} \sqrt{\prod_{i=1}^{N_-} ((\mathbf{r} - \mathbf{r}_i^-)^2 + a^2)} \left(\prod_{i=1}^{N_+} ((\mathbf{r} - \mathbf{r}_i^+)^2 + a^2) \right)^{-1}. \quad (22)$$

Здесь l принимает целочисленные значения от 0 до $Q_2 - 1$, причем последняя Q_2 -я нулевая мода, соответствующая $l = Q_2 - 1$, логарифмически расходится.

3. НУЛЕВЫЕ МОДЫ В ПОЛЕ АБЕЛЕВЫХ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ВИХРЕЙ В ЧЕТЫРЕХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Рассмотрим теперь пример двух ортогональных пересекающихся вихрей в четырехмерном евклидовом пространстве x, y, z, τ , предложенный в работе [14],

$$A = \frac{g_1(s)}{s}(-y, x, 0, 0) + \frac{g_2(r)}{r}(0, 0, -z, \tau), \quad (23)$$

где (r, φ) – полярные координаты в плоскости (x, y) и (s, ψ) – полярные координаты в плоскости (z, τ) . Знаки g_1, g_2 соответствуют вихрю или антивихрю в соответствующей плоскости. В уравнении Дирака в этом поле

$$(i\gamma_1 D_1 + i\gamma_2 D_2)\Psi(x) + (i\gamma_3 D_3 + i\gamma_4 D_4)\Psi(x) = 0 \quad (24)$$

переменные разделяются, $\Psi_a(x, y, z, \tau) = \psi_a^1(x, y)\psi_a^2(z, \tau)$, и оно приобретает вид

$$\begin{aligned} \sum_{b=1}^4 \psi_b^2(z, \tau)(i\gamma_1 D_1 + i\gamma_2 D_2)_{ab}\psi_b^1(x, y) + \\ + \psi_b^1(x, y)(i\gamma_3 D_3 + i\gamma_4 D_4)_{ab}\psi_b^2(z, \tau) = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Чтобы удовлетворить этому уравнению, достаточно каждое из двух слагаемых приравнять нулю,

$$\begin{aligned} i(\gamma_1 D_1(x, y) + \gamma_2 D_2(x, y))\psi^1(x, y) &= 0, \\ i(\gamma_3 D_3(z, \tau) + \gamma_4 D_4(z, \tau))\psi^2(z, \tau) &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Очевидно, что в обеих плоскостях (x, y) и (z, τ) получаются уравнения, подобные уже рассмотренным в предыдущем разделе. В каждой из них есть свои двумерные нулевые моды. Рассмотрим спинорную структуру искомым четырехмерных решений

$$\psi^{1T}(x, y) = \begin{cases} (*, 0, *, 0) & \text{для вихря,} \\ (0, *, 0, *) & \text{для антивихря} \end{cases} \quad (27)$$

и

$$\psi^{2T}(z, \tau) = \begin{cases} (*, 0, 0, *) & \text{для вихря,} \\ (0, *, *, 0) & \text{для антивихря,} \end{cases} \quad (28)$$

где символ T обозначает транспонирование, звездочкой помечены возможные ненулевые элементы. Таким образом, спинорная структура нулевой моды для различных сочетаний пересекающихся вихрей и антивихрей будет такова:

$$\Psi \sim \begin{cases} (1, 0, 0, 0)^T & \text{вихрь–вихрь,} \\ (0, 0, 1, 0)^T & \text{вихрь–антивихрь,} \\ (0, 0, 0, 1)^T & \text{антивихрь–вихрь,} \\ (0, 1, 0, 0)^T & \text{антивихрь–антивихрь.} \end{cases} \quad (29)$$

Как видно, для сочетания вихрь–вихрь и антивихрь–антивихрь нулевые моды левые, а для остальных двух сочетаний – правые.

Рассмотрим теперь более общую конфигурацию, в которой N_+ вихрей и N_- антивихрей в плоскости (x, y) пересекаются с M_+ вихрями и M_- антивихрями в плоскости (z, τ) . Аналогично предыдущему заключаем, что соотношения между N_+, N_- и M_+, M_- определяют спинорную структуру нулевых мод. Таким образом, число нормируемых нулевых мод будет равно $|N_+ - N_-| |M_+ - M_-|$.

4. УРАВНЕНИЕ ДИРАКА В НЕАБЕЛЕВОМ ПОЛЕ

Рассмотрим теперь неабелево $SU(2)$ -поле $A_\mu = A_\mu^a T^a$, где $T^a = \tau^a/2$. Нас будет интересовать уравнение Дирака в поле пересекающихся центральных вихрей.

По определению центральный (“тонкий”) вихрь, локализованный на двумерной гиперповерхности S в четырехмерном пространстве, — это калибровочная конфигурация, удовлетворяющая свойствам:

а) любая петля Вильсона

$$W([A], C) = P \exp i \int_C A_\mu dx_\mu \quad (30)$$

с контуром C , охватывающим тело вихря S , будет нетривиальным центральным элементом калибровочной группы (в случае группы $SU(2)$ это минус единица);

б) любая петля Вильсона, не охватывающая вихрь, равна единице.

Эти свойства играют важную роль в объяснении природы конфайнмента. Мы же исследуем вопрос о наличии фермионных нулевых мод и спектре оператора Дирака во внешнем поле пересекающихся тонких вихрей вблизи нуля, что может иметь значение для объяснения другого непертурбативного явления — НКС.

Для двух пересекающихся центральных вихрей, направленных вдоль третьей групповой оси, согласно [14] имеем

$$A_\mu = A_\mu^3 \frac{\tau^3}{2} = \frac{\tau^3}{2} \left(\frac{g_1(r)}{r} (-y, x, 0, 0) + \frac{g_2(s)}{s} (0, 0, -\tau, z) \right). \quad (31)$$

Данные вихри будут центральными при $g_i(r) = 1/r$. Это — сингулярные конфигурации в плоскостях $(x, y = 0)$ и $(z, \tau = 0)$, соответственно, являющиеся чистыми калибровками вне этих плоскостей. Поэтому наряду с тонкими вихрями рассматривают также “толстые” центральные вихри. Для толстых вихрей $g_i(r) = 1/r + o(1/r)$ при $r \rightarrow \infty$ и $g_i(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$, т.е. они обладают свойствами центральных вихрей на достаточно больших (по сравнению со своей толщиной) расстояниях. Поскольку тензор поля имеет в этом случае ненулевые компоненты

$$F_{43}^3 = \pm \left(g_2'(s) + \frac{g_2(s)}{s} \right), \quad F_{21}^3 = \pm \left(g_1'(r) + \frac{g_1(r)}{r} \right), \quad F_{34}^3 = -F_{43}^3, \quad F_{12}^3 = -F_{21}^3,$$

то индекс Понтрягина (топологический заряд) для данной полевой конфигурации (31)

$$Q_4 = \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x F_{\mu\nu}^3 F_{\mu\nu}^{*3} \quad (32)$$

принимает различные значения в зависимости от относительного знака центральных вихрей: $Q_4 = 1/2$ для конфигураций вихрь–вихрь и антивихрь–антивихрь, $Q_4 = -1/2$ для других случаев.

В фундаментальном представлении имеется два цвета, $\Psi = (\Psi^w, \Psi^b)^T$. Оператор Дирака коммутирует с τ^3 и поэтому не смешивает фермионы разных цветов. Стало

быть, уравнение Дирака $i\gamma D\Psi = 0$ расщепляется на два уравнения для различных цветовых компонент,

$$\begin{aligned} i\gamma_\mu(\partial_\mu - iA_\mu^3/2)\Psi^w &= 0, \\ i\gamma_\mu(\partial_\mu + iA_\mu^3/2)\Psi^b &= 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Подобные уравнения мы уже рассматривали в предыдущем разделе. Следует только сделать замену $g_{1,2}(r) \rightarrow g_{1,2}(r)/2$ для Ψ^w и $g_{1,2}(r) \rightarrow -g_{1,2}(r)/2$ для Ψ^b . Рассмотрим толстые вихри вида $g_1(r) = g_2(r) = g(r) = r/(r^2 + a^2)$. Тогда $\alpha = \lim g(r)/(2r) = 1/2$ и согласно проделанному выше анализу $l \in (-1, \alpha - 1) = (-1, -1/2)$, так что в этом случае, в отличие от абелева случая, нормируемых нулевых мод нет. В самом деле, нулевые моды с $l = 0$, имевшие логарифмическую расходимость в абелевом поле, теперь имеют вид

$$\begin{aligned} \Psi^w &= (1, 0, 0, 0)^T (r^2 + a^2)^{-1/4} (s^2 + a^2)^{-1/4}, \\ \Psi^b &= (0, 1, 0, 0)^T (r^2 + a^2)^{-1/4} (s^2 + a^2)^{-1/4}, \end{aligned} \quad (34)$$

расходятся квадратично, и эта расходимость уже не устраняется.

Обратимся теперь к более общему случаю, когда имеются N_1^+ вихрей и N_1^- антивихрей, пронизывающих плоскость (z, τ) , и N_2^+ вихрей и N_2^- антивихрей, пронизывающих плоскость (x, y) ,

$$A(x) = \sum_{i=1}^{N_2^+} A_i^+(x, y) - \sum_{i=1}^{N_2^-} A_j^-(x, y) + \sum_{i=1}^{N_1^+} A_i^+(z, \tau) - \sum_{i=1}^{N_1^-} A_i^-(z, \tau), \quad (35)$$

где

$$A_i^\pm(x, y) = \pm \frac{\tau_3}{2} \frac{1}{(x - x_i^\pm)^2 + (y - y_i^\pm)^2 + a^2} (- (y - y_i^\pm), x - x_i^\pm, 0, 0), \quad (36)$$

$$A_i^\pm(z, \tau) = \pm \frac{\tau_3}{2} \frac{1}{(z - z_i^\pm)^2 + (\tau - \tau_i^\pm)^2 + a^2} (0, 0, -(\tau - \tau_i^\pm), z - z_i^\pm) \quad (37)$$

— центральные вихри и антивихри в плоскостях (x, y) и (z, τ) с центрами в точках $(x_i^\pm, y_i^\pm)$ и $(z_i^\pm, \tau_i^\pm)$, соответственно. Полный топологический заряд такой конфигурации имеет вид

$$Q_4 = \frac{1}{2} (N_1^+ - N_1^-) (N_2^+ - N_2^-).$$

Спинорная структура нулевых мод будет определяться знаками $N_{1,2}^+ - N_{1,2}^-$. Перейдем опять к полярным координатам (r, φ) и (s, ψ) в плоскостях (x, y) и (z, τ) , соответственно. Пусть $N_1^+ > N_1^-$ и $N_2^+ > N_2^-$. Тогда нулевые моды будут определяться угловыми моментами l_1 и l_2 в этих плоскостях, принимающими целые положительные значения,

$$\begin{aligned} \Psi^w &= (1, 0, 0, 0)^T (re^{i\varphi})^{l_1} (se^{i\psi})^{l_2} \frac{F_1^- F_2^-}{(F_1^+ F_2^+)}, \\ \Psi^b &= (0, 1, 0, 0)^T (re^{-i\varphi})^{l_1} (se^{-i\psi})^{l_2} \frac{F_1^- F_2^-}{(F_1^+ F_2^+)}. \end{aligned} \quad (38)$$

Здесь введены функции

$$\begin{aligned} F_1^\pm &= \left[\prod_{i=1}^{N_1^\pm} (x - x_i^\pm)^2 + (y - y_i^\pm)^2 + a^2 \right]^{1/4}, \\ F_2^\pm &= \left[\prod_{i=1}^{N_2^\pm} (z - z_i^\pm)^2 + (\tau - \tau_i^\pm)^2 + a^2 \right]^{1/4}. \end{aligned} \quad (39)$$

Данное решение имеет конечную норму, если l_1 и l_2 удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} l_1 &< \frac{1}{2}(N_1^+ - N_1^-) - 1, \\ l_2 &< \frac{1}{2}(N_2^+ - N_2^-) - 1, \end{aligned} \quad (40)$$

причем равенство соответствует логарифмическим расходимостям. Другие сочетания ($N_1^+ < N_1^-$ и(или) $N_2^+ < N_2^-$) получаются заменой знаков $+$ и $-$. При этом спинорная структура решения выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi^w &\sim (1, 0, 0, 0)^T \Psi^b \sim (0, 1, 0, 0)^T \quad \text{при } N_1^+ > N_1^- \text{ и } N_2^+ > N_2^-, \\ \Psi^w &\sim (0, 0, 1, 0)^T \Psi^b \sim (0, 0, 0, 1)^T \quad \text{при } N_1^+ > N_1^- \text{ и } N_2^+ < N_2^-, \\ \Psi^w &\sim (0, 0, 0, 1)^T \Psi^b \sim (0, 0, 1, 0)^T \quad \text{при } N_1^+ < N_1^- \text{ и } N_2^+ > N_2^-, \\ \Psi^w &\sim (0, 0, 1, 0)^T \Psi^b \sim (0, 0, 0, 1)^T \quad \text{при } N_1^+ < N_1^- \text{ и } N_2^+ < N_2^-. \end{aligned} \quad (41)$$

Эти нулевые моды можно ортогонализировать. Тогда ортогональный набор решений может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \Psi_{ij}^w &= (1, 0, 0, 0)^T P_i(re^{+i\varphi}) Q_j(se^{+i\psi}) \frac{F_1^- F_2^-}{(F_1^+ F_2^+)}, \\ \Psi_i^b &= (0, 1, 0, 0)^T P_i(re^{-i\varphi}) Q_j(se^{-i\psi}) \frac{F_1^- F_2^-}{(F_1^+ F_2^+)}, \end{aligned} \quad (42)$$

где $P_i(z)$ и $Q_j(z)$ — надлежащим образом выбранные полиномы с соответствующими весами.

Очевидно, что если топологический заряд

$$Q_4 = \frac{1}{2}(N_1^+ - N_1^-)(N_2^+ - N_2^-)$$

положителен, то все нулевые моды левые, а если он отрицателен, то правые. Число нулевых мод может не совпадать с топологическим зарядом Q_4 , даже если он целый. Равенство имеет место, только если как $(N_1^+ - N_1^-)$, так и $(N_2^+ - N_2^-)$ четные (и при этом мы принимаем во внимание также и логарифмически расходящиеся нулевые моды). В противном случае число нулевых мод меньше, чем $|Q_4|$. Разница “компенсируется” за счет линейно и квадратично расходящихся нулевых мод. Теорема Атьи–Зингера формально

удовлетворяется, если рассмотреть решения с нормой, линейно расходящейся в плоскостях (x, y) или (z, τ) , которые дают вклад $1/2$ в число нулевых мод, а решения с нормой, линейно расходящейся в обеих плоскостях, дают вклад $1/4$. Это нарушение теоремы Атьи–Зингера обусловлено тем, что рассматриваемые конфигурации (прямолинейные вихри) не становятся чистой калибровкой на пространственной бесконечности. Ожидать ее точного выполнения следует в случае ограниченных (а значит – искривленных и замкнутых) вихрей. Однако изучение уравнения Дирака на таком фоне аналитически весьма затруднительно.

5. РАСЩЕПЛЕНИЕ НУЛЕВЫХ МОД

Итак, мы видели, что “положительные” пересечения (два вихря или два антивихря) генерируют положительные топологические заряды и левые нулевые моды, а “отрицательные” пересечения вихря и антивихря приводят к отрицательным топологическим зарядам и правым нулевым модам. Рассмотрим конфигурацию с $2m_-$ “отрицательными” пересечениями и $2m_+$ “положительными” пересечениями. Если бы существовали только “положительные” или только “отрицательные” пересечения, то имелось бы m_+ левых мод или m_- правых мод, соответственно. Мы видели, что в общем случае “выживают” $|m_+ - m_-|$ нулевых мод.

В случае инстантонов и антиинстантонов аналогичная ситуация рассматривалась в работе [32]. Каждый инстантон, взятый изолированно, имеет топологический заряд $Q_4 = +1$ и левую нулевую фермионную моду, у каждого антиинстантона $Q_4 = -1$ и нулевая мода правая. В первом порядке теории возмущений (за возмущение взято воздействие (анти)инстантонов на “чужие” нулевые моды) собственные функции оператора Дирака являются линейными комбинациями “бывших нулевых мод” – нулевых мод в поле каждого изолированного инстантона или антиинстантона. Можно выбрать базис в $(m_+ + m_-)$ -мерном пространстве “бывших нулевых мод” так, чтобы все базисные моды остались собственными функциями оператора Дирака после включения взаимодействия. При этом, согласно теореме Атьи–Зингера, нулевыми останутся собственные значения $|m_- - m_+|$ мод, а собственные значения остальных “бывших нулевых мод” станут, вообще говоря, ненулевыми. Их величина (и применимость теории возмущений) определяется величиной перекрытия нулевых мод, соответствующих разным инстантонам. При достаточно разреженном инстантонном газе они достаточно малы. В итоге, вблизи нуля концентрируется большое число собственных значений оператора Дирака, которые могут быть получены с помощью теории возмущений. В термодинамическом пределе они формируют непрерывный спектр с плотностью $\rho(0) \sim V_4$, где V_4 – объем четырехмерного пространства.

Важно подчеркнуть, что “бывшие нулевые моды” сконцентрированы около инстантонов. Это означает, что если размер инстантона равен a , то радиус области, где плотность $|\psi^+(x)\psi(x)|$ не мала, стремится к нулю вместе с a . Другими словами, если четырехмерная область $\mathcal{M}$ не содержит центр инстантона вместе с некоторой его окрестностью, то

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{\mathcal{M}} \psi^+(x, a) \psi(x, a) d^4x = 0. \quad (43)$$

В результате интегралы перекрытия для различных нулевых мод оказываются зависящими от a/l , где l – расстояние между инстантонами. Малость величины a/l (т.е. разреженность инстантонного газа) является достаточным условием для того, чтобы величина расщепления была малой и собственные значения оператора γD концентрировались вблизи нуля, что и приводит к НКС.

Теперь обратимся к случаю центральных вихрей. Рассмотрим модель с пересекающимися вихрями и антивихрями в плоскостях (x, y) и (z, τ) . Поскольку задача поиска нулевых мод распадается на две независимые задачи о нулевых модах в каждой из плоскостей, то достаточно рассмотреть одну из них, например (x, y) . Во второй плоскости (z, τ) картина будет совершенно такой же. Оказывается, что в отличие от случая с инстантонами нулевые моды не концентрируются на отдельных толстых вихрях. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим плотность нулевых мод для двумерной задачи

$$\psi^+(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) \sim \frac{|P(re^{i\varphi})|^2}{N^2(a)} \sqrt{\prod_{i=1}^{N_-} ((\mathbf{r} - \mathbf{r}_i^-)^2 + a^2)} \left(\prod_{i=1}^{N_+} ((\mathbf{r} - \mathbf{r}_i^+)^2 + a^2) \right)^{-1}. \quad (44)$$

Здесь $N(a)$ – норма, а $P(z)$ – некоторый полином. Когда $a \rightarrow 0$, величина $N(a)$ остается конечной, так как даже в пределе $a = 0$ особенности в точках $\mathbf{r}_i^\pm$ остаются интегрируемыми. Таким образом, a является лишь размером толстых вихрей, но не размером нулевых мод. Как мы видели, в рассматриваемой плоскости (x, y) конфигурация, состоящая лишь из одного вихря, не может иметь нулевых мод. Для нулевой моды (в двумерном смысле) необходимы как минимум два вихря, т.е. нулевая мода может быть локализована лишь на паре вихрей. Ее истинный размер будет расстоянием между компонентами этой пары. Перекрытия различных нулевых мод не обязательно будут малыми, так как расстояния между ближайшими парами вихрей и расстояния между вихрями внутри пары, вообще говоря, одного порядка. В этом состоит различие механизма расщепления нулевых мод по сравнению со случаем инстантонов, рассмотренным в работе [32].

6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В данной работе мы рассмотрели неабелевы калибровочные конфигурации с произвольным числом пересекающихся толстых центральных вихрей и антивихрей в ортогональных плоскостях четырехмерного евклидова пространства. Мы нашли полную систему фермионных нулевых мод с конечной нормой в рассмотренной полевой конфигурации. Однако их число, строго говоря, не удовлетворяет теореме Атьи–Зингера, что может быть “исправлено” учетом также и тех нулевых мод, которые расходятся линейно или квадратично. Данная ситуация находит свое объяснение в том, что вихри не переходят на бесконечности в чистую калибровку по всем направлениям, а значит, в строгом смысле слова нельзя уже говорить о топологическом заряде как о степени отображения пространственной бесконечности на калибровочную группу, осуществляемого калибровочной функцией. Для решения этой проблемы можно было бы рассмотреть искривленные (замкнутые) вихри, не уходящие в бесконечность. Однако в таком случае при

решении уравнения Дирака для нулевых мод мы встречаемся с аналитическими трудностями, так как переменные не разделяются и задача не сводится к двум двумерным задачам.

В рамках обсуждения возможности построения механизма НКС, основанного на пересекающихся центральных вихрях, мы показали, что нулевые моды в таких полевых конфигурациях не концентрируются на центрах пересечения вихрей, где локализована плотность топологического заряда. В этом состоит отличие данного механизма от механизма НКС, основанного на инстантонах, который был рассмотрен в работе [32].

В двумерном случае реальный радиус возможной нулевой моды не равен нулю и не совпадает с размером вихря. Он определяется расстоянием между двумя ближайшими вихрями, поскольку именно такая система представляет собой минимальную конфигурацию, которая приводит к нормируемым фермионным нулевым модам.

Ограничиваясь для простоты двумерным неабелевым случаем, разумно предположить, что в континуальный интеграл теории вносят вклад различные распределения вихрей. Обсудим два очевидных крайних случая. В первом случае предположим, что пересекающиеся вихри появляются парами. Пары отделены друг от друга расстояниями, много большими, чем расстояния между компонентами пары – вихрями или антивихрями. В поле каждой пары вихрей будет своя нулевая мода. Ее размер будет порядка расстояния между компонентами пары. Так как, по предположению, оно намного меньше, чем расстояние между парами, то перекрытия нулевых мод, принадлежащих разным парам, малы. Эта ситуация напоминает инстантонный газ, в котором, как известно, возникают достаточно хорошо разделенные фермионные нулевые моды. Нулевые моды слабо перекрываются и поэтому, так же как и в случае инстантонов, могут отвечать за НКС. Однако если два вихря близки друг к другу, почти каждая петля Вильсона или охватывает сразу оба вихря, или не охватывает ни одного, т.е. в обоих случаях является единственным элементом центра группы. Тогда такие конфигурации, будучи ответственными за НКС, не объясняют конфайнмент.

Во втором крайнем случае вихри распределены равномерно. Для такой конфигурации справедлив закон площадей для петли Вильсона, однако неясно, возможно ли возникновение конечной плотности нулевых мод.

Что касается конфигураций с "промежуточным" распределением вихрей, то можно предположить, что существует оптимальное распределение, при котором вихри оказываются ответственными как за конфайнмент, так и за НКС. Однако определение таких конфигураций выходит за рамки настоящей работы. В четырехмерном случае для произвольно ориентированных и искривленных вихрей ситуация оказывается еще более сложной для описания. Дальнейшие исследования с произвольно ориентированными искривленными вихрями в четырехмерном случае могут показать, возможны ли более реалистические калибровочные конфигурации с центральными (само)пересекающимися или замкнутыми вихрями, в которых может осуществляться НКС.

Благодарности. Авторы благодарят Д. Эберта и М. Мюллера-Пройскера за полезные советы и обсуждение результатов работы, а также Х. Райнхардта за поддержку. Данная работа выполнена в рамках проекта DFG 436 RUS 113/477.

Список литературы

- [1] *J. Greensite*. Progr. Part. Nucl. Phys. 2003. V. 51. P. 1; hep-lat/0301023.
- [2] *T. Schäfer, E. V. Shuryak*. Rev. Mod. Phys. 1998. V. 70. P. 323.
- [3] *S. Mandelstam*. Phys. Rep. C. 1976. V. 23. P. 245; *G. 't Hooft*. Nucl. Phys. B. 1981. V. 190. P. 455.
- [4] *G. S. Bali, Ch. Schlichter, K. Schilling*. Nucl. Phys. Proc. Suppl. 1999. V. 73. P. 638; hep-lat/9809039.
- [5] *A. A. Абрикосов*. ЖЭТФ. 1957. Т. 32. С. 1442; *H. B. Nielsen, P. Olesen*. Nucl. Phys. B. 1973. V. 61. P. 45.
- [6] *M. Baker, R. Steinke*. Phys. Lett. B. 2000. V. 474. P. 67; hep-ph/9905375.
- [7] *L. Del Debbio, M. Faber, J. Greensite, S. Olejnik*. Phys. Rev. D. 1997. V. 55. P. 2298; *L. Del Debbio, M. Faber, J. Giedt, J. Greensite, S. Olejnik*. Phys. Rev. D. 1998. V. 58. P. 094501; hep-lat/9801027.
- [8] *K. Langfeld, H. Reinhardt, O. Tennert*. Phys. Lett. B. 1998. V. 419. P. 317; *M. Engelhardt, K. Langfeld, H. Reinhardt, O. Tennert*. Phys. Lett. B. 1998. V. 431. P. 141; 1999. V. 452. P. 301; Phys. Rev. D. 2000. V. 61. P. 054504; hep-lat/9904004.
- [9] *P. de Forcrand, M. D'Elia*. Phys. Rev. Lett. 1999. V. 82. P. 4582; *C. Alexandrou, M. D'Elia, P. de Forcrand*. Nucl. Phys. Proc. Suppl. 2000. V. 83. P. 437.
- [10] *G. 't Hooft*. Nucl. Phys. B. 1978. V. 138. P. 1; *Y. Aharonov, A. Casher, S. Yankielowicz*. Nucl. Phys. B. 1978. V. 146. P. 256; *J. M. Cornwall*. Nucl. Phys. B. 1979. V. 157. P. 392.
- [11] *J. Ambjorn, P. Olesen*. Nucl. Phys. B. 1980. V. 170. P. 265; *P. Olesen*. Nucl. Phys. B. 1982. V. 200. P. 381.
- [12] *J. M. Cornwall*. Phys. Rev. D. 1999. V. 59. P. 125015; hep-th/9901039.
- [13] *D. Antonov, D. Ebert*. Eur. Phys. J. C. 2000. V. 12. P. 349; hep-th/9812112.
- [14] *M. Engelhardt, H. Reinhardt*. Nucl. Phys. 2000. V. 567. P. 249; hep-th/9907139.
- [15] *D. Diakonov*. Mod. Phys. Lett. A. 1999. V. 14. P. 1725; hep-th/9905084; P. 1909; hep-th/9908069.
- [16] *В. Ч. Жукковский*. Вестн. Моск. ун-та. Физика. Астрономия. 2000. № 5. С. 8.
- [17] *H. Reinhardt, T. Tok*. Phys. Lett. B. 2001. V. 505. P. 131.
- [18] *H. Reinhardt, O. Schroeder, T. Tok, V. C. Zhukovsky*. Phys. Rev. D. 2002. V. 66. P. 085004; hep-th/0203012.
- [19] *V. C. Zhukovsky*. Int. J. Mod. Phys. A. 2002. V. 17. P. 914.
- [20] *D. Diakonov, M. Maul*. Phys. Rev. D. 2002. V. 66. P. 096004; hep-lat/0204012.
- [21] *J. D. Laenge, M. Engelhardt, H. Reinhardt*. Phys. Rev. D. 2003. V. 68. P. 025001; hep-th/0301252.
- [22] *M. Bordag*. Phys. Rev. D. 2003. V. 67. P. 065001; hep-th/0211080.
- [23] *T. Banks, A. Casher*. Nucl. Phys. B. 1980. V. 169. P. 103.
- [24] *M. Engelhardt*. Nucl. Phys. B. 2002. V. 638. P. 81.
- [25] *M. P. Fry*. Int. J. Mod. Phys. A. 2002. V. 17. P. 936.
- [26] *H. Reinhardt, T. Tok*. Phys. Rev. D. 2003. V. 68. P. 065004; hep-th/0302100.
- [27] *M. P. Fry*. Phys. Rev. D. 2003. V. 67. P. 065017; hep-th/0301097.
- [28] *C. Adam, B. Muratori, C. Nash*. Phys. Rev. D. 2000. V. 62. P. 085026; hep-th/0001164; 1999. V. 60. P. 125001; hep-th/9903040; 2000. V. 61. P. 105018; hep-th/9909189.
- [29] *В. Ч. Жукковский, И. В. Мамсуров*. Вестн. Моск. ун-та. Физика. Астрономия. 2001. № 3. С. 31.
- [30] *R. Jackiw, So-Young Pi*. Phys. Rev. D. 2000. V. 61. P. 105015; hep-th/9911072.
- [31] *M. F. Atiyah, V. Patodi, I. M. Singer*. Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 1976. V. 79. P. 71.
- [32] *Д. И. Дзяконов, В. Ю. Петров*. ЖЭТФ. 1985. Т. 89. С. 361.

Поступила в редакцию 10.IX.2003 г.,
после доработки 30.XII.2003 г.