Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Власов, Феноменология многокомпонентной релятивистской сверхтекучей жидкости в многомерном пространстве, *ТМФ*, 1997, том 113, номер 2, 301–312

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1080>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 12:41:31

Ю. В. Власов*

ФЕНОМЕНОЛОГИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СВЕРХТЕКУЧЕЙ ЖИДКОСТИ В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Разработана релятивистская гидродинамика многокомпонентной неидеальной жидкости в многомерном пространстве. Выведены уравнения движения как при отсутствии, так и при наличии квантовых вихрей в сверхтекучих компонентах. Построены примеры уравнений состояния.

1. ВВЕДЕНИЕ

С тех пор как Израэль [1] предложил ковариантное обобщение двухжидкостной модели Ландау, в релятивистской гидродинамике сверхтекучей жидкости произошел значительный прогресс. Существенное отличие современной теории [2] от первоначальных разработок [1, 3, 4] состоит в том, что сверхтекучая и нормальная компоненты рассматриваются как неидеальные взаимодействующие жидкости.

Современная теория, развитая Лебедевым, Халатниковым и Картером, включает три независимых подхода. Первый, созданный Лебедевым и Халатниковым и называемый методом потенциалов Клебша [5], ныне практически вышел из употребления. Его место занял формализм Картера–Халатникова, основанный на конвективном вариационном принципе [6]. Третий вариант теории, сформулированный недавно Картером и Ланглуа [7, 8] на языке дифференциальной геометрии, обобщает известные топологические методы, применяемые в теории конденсированных сред [9], и открывает перспективы для исследований таких топологических объектов, как релятивистские квантовые вихри и вихревой лист. Интерес к методу Картера–Ланглуа связан еще и с тем, что совокупность квантовых вихрей (так называемая вихревая “решетка”) в релятивистской сверхтекучей жидкости представляет собой единую систему, которая только в нерелятивистском пределе может быть разделена на свободную сверхтекучую жидкость и “вихревую” компоненту.

Данная статья продолжает исследования в последнем из отмеченных выше направлений. Цель предлагаемой работы – построение формализма в многомерном пространстве, что тесно связано с многомерной гравитацией, и для многокомпонентных систем,

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау, Черноголовка, Московская область, Россия

что может найти приложения в теории ядерной материи. Сверхтекучая ядерная материя, заполняющая внутренность нейтронных звезд, содержит несколько компонент, несущих квантовые вихри. Как показали Лебедев и Халатников [5], исследование такой системы следует проводить в рамках релятивистской теории. В этом отношении анализ при конечной температуре будет чрезвычайно интересен. Известные до сих пор многочисленные нерелятивистские вычисления могут дать лишь отдаленное представление о реальных процессах внутри нейтронных звезд. В многомерной гравитации в качестве источника гравитационного поля часто используют многокомпонентную идеальную жидкость, а иногда вводят в рассмотрение и сверхтекучую жидкость с квантовыми вихрями. Последняя задача мотивируется тем, что при эволюции такой “вселенной” из сверхтекучего вещества сохраняется топологический заряд, соответствующий полному числу квантов циркуляции.

2. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Уравнения релятивистской двухжидкостной теории сверхтекучести [2] включают в себя законы сохранения потока частиц n^ρ и потока энтропии s^ρ :

$$\nabla_\rho n^\rho = 0, \quad \nabla_\rho s^\rho = 0. \quad (2.1)$$

Мы будем рассматривать многокомпонентную систему, которая включает в себя произвольное число нормальных и сверхтекучих компонент. Некоторые из сверхтекучих компонент могут содержать квантовые вихри. Нормальная, сверхтекучая без вихрей и сверхтекучая с вихрями компоненты будут описываться разными уравнениями движения. Соответствующие этим компонентам векторы тока $k^\mu = (n^\mu, j^\mu, s^\mu)$ делятся на три группы, где через n^μ , j^μ и s^μ обозначены соответственно векторы тока сверхтекучей компоненты без вихрей, сверхтекучей компоненты с квантовыми вихрями и нормальной компоненты. Выведем с помощью так называемого конвективного вариационного принципа [6] законы сохранения на n -мерном многообразии без границы. Как и в теории поля, вариация лагранжиана в случае многих компонент производится независимо для каждой компоненты.

Определим $(n-1)$ -форму $K_{\rho\nu\dots\sigma}$ числа частиц, вводя проекцию $(n-1)$ -ранга $f: E \rightarrow B$ расслоенного тотального n -мерного многообразия E с локальными координатами x^μ ($\mu = 1, \dots, n$) на базовое $(n-1)$ -мерное многообразие B (с локальными координатами X^A , где $A = 1, \dots, n-1$), на котором определена замкнутая $(n-1)$ -форма $K_{AB\dots C}$. Одномерное многообразие, являющееся слоем над точкой $b \in B$, интерпретируется как линия тока. Контравариантный функтор $f^*: \Omega(B) \rightarrow \Omega(E)$ определяет замкнутую $(n-1)$ -форму $K_{\mu\nu\dots\rho}$ на E

$$\nabla_{[\lambda} K_{\mu\nu\dots\rho]} = 0, \quad (2.2)$$

которая в локальных координатах записывается как [10, 11]

$$f^*(K_{AB\dots C}) = K_{\mu\nu\dots\rho} = K_{AB\dots C} \frac{\partial X^A}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^B}{\partial x^\nu} \cdots \frac{\partial X^C}{\partial x^\rho}.$$

Определим вектор, дуальный к $(n-1)$ -форме $K_{\mu\nu\dots\rho}$,

$$k^\mu = \frac{1}{4!} \varepsilon^{\nu\rho\dots\sigma\mu} K_{\nu\rho\dots\sigma} \equiv \varepsilon^\cdot K \equiv {}^*K. \quad (2.3)$$

Точка здесь обозначает внутреннее произведение, а $*$ является оператором дуальности [11]. Там, где это не приводит к недоразумениям, будет использоваться сокращенная запись для внешних форм и векторов, последние отмечаются стрелкой. Тогда с учетом соотношения (2.2) получаем закон сохранения

$$\nabla_\rho k^\rho = \delta \vec{k} = *(D_*(\vec{k})) = 0, \quad (2.4)$$

где D обозначает внешнее дифференцирование, а δ – дивергенцию [11]. Вектор (2.3) называется вектором тока числа частиц. Если ввести 4-скорость жидкости u_μ , то можно использовать принятую в гидродинамике запись [12] $k_\mu = k u_\mu$, где плотность числа частиц $k = \sqrt{-k^\mu k_\mu}$. Для произвольной $(n-1)$ -мерной гиперповерхности σ интеграл

$$\int (d\sigma)^{\mu\nu\dots\rho} K_{\mu\nu\dots\rho} = \int *(d\vec{\sigma}) \cdot \vec{k}$$

определяет число частиц потока, пересекающего эту гиперповерхность. Условия (2.2) и (2.4) означают, что это число частиц является сохраняющейся величиной. В случае диссипации вместо уравнения (2.4) для нормальных компонент следует записать уравнение $\nabla_\rho S^\rho \geq 0$, выражающее закон возрастания энтропии.

Уравнения движения можно вывести, если приравнять нулю первую вариацию действия. Рассмотрим сначала только нормальную и свертную компоненты, не содержащие квантовых вихрей. Соответствующая вариация лагранжиана равна

$$d\Lambda = \sqrt{g} \frac{1}{(n-1)!} H^{\mu\nu\dots\rho} dK_{\mu\nu\dots\rho} + \frac{1}{(n-1)!} H^{\mu\nu\dots\rho} K_{\mu\nu\dots\rho} \frac{1}{2} \sqrt{g} g^{\mu\nu} dg_\mu, \quad (2.5)$$

где $\vec{H}$ – это $(n-1)$ -вектор, сопряженный с K . Последнее слагаемое в формуле (2.5) и множитель $\sqrt{g} = \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|}$ связаны с кривизной пространства. Вариация метрики приводит к уравнениям Эйнштейна в материальной среде. Некоторые связанные с этой проблемой особенности были рассмотрены недавно Валасиным и Израэлем [13]. Нам же будут интересовать уравнения движения на фоне заданной метрики. Поэтому при выводе уравнений движения мы, следуя Картеру и Халатникову [6], будем пользоваться формулой

$$dL = \frac{1}{(n-1)!} H^{\mu\nu\dots\rho} dK_{\mu\nu\dots\rho}, \quad (2.6)$$

где L – лагранжиан материальных полей. Если произвести преобразование Лежандра

$$\Psi = L - K \cdot \vec{H}, \quad (2.7)$$

то от лагранжиана $L(K)$ мы переходим к функции давления $\Psi(H)$. В явном виде функция давления и лагранжиан будут получены в разделе 5.

В формуле (2.6) внешняя форма K варьируется не произвольно, но подчинена конвективному вариационному принципу [2, 6]. Зададим бесконечно малое смещение $dX^A = -\xi^\mu (\partial X^A / \partial x^\mu)$ (при этом координаты X^A играют роль скалярных функций), где ξ^μ – произвольное векторное поле. Вычисляя производную Ли от $(n-1)$ -формы K вдоль

векторного поля $\vec{\xi}$, мы определим допустимые вариации dK . Принимая во внимание условие (2.2), с помощью формулы Картана [10] имеем

$$dK = \mathcal{L}_{\vec{\xi}}(K) = (n-1)D(\vec{\xi} \cdot K). \quad (2.8)$$

Подставив (2.8) в (2.6), приравниваем нулю соответствующую вариацию действия

$$0 = \int_E dL = \langle D(\vec{\xi} \cdot K) | \vec{H} \rangle = (-1)^{(n-1)(n+1)} \langle (\vec{\xi} \cdot K) | \delta \vec{H} \rangle, \quad (2.9)$$

т.е.

$$(\vec{\xi} \cdot K) \cdot \delta \vec{H} = 0.$$

В силу произвольности $\vec{\xi}$ это означает, что

$$K \cdot \delta \vec{H} = 0. \quad (2.10)$$

Множитель $(-1)^{(n-1)(n+1)}$ появляется в формуле (2.9) потому, что для векторов дивергенция определена соотношением типа (2.4), что несколько отличается от соответствующего определения дивергенции ковекторов [10, 11]. Можно было бы оперировать только с внешними формами, но тогда потерялась бы непосредственная логическая связь с релятивистской гидродинамикой, где принято использовать векторы тока.

Введем 1-форму импульса $\eta = *\vec{H}$ как переменную, сопряженную с вектором тока $\vec{k}$. В двухжидкостной модели [14] эта 1-форма для нормальной компоненты называется ковектором температуры и обозначается как Θ_ρ . Обозначение μ_ρ вводят для 1-формы импульса сверхтекучей компоненты, которую называют ковектором химического потенциала по той причине, что $\mu = \sqrt{-\mu_\rho \mu^\rho}$ является химическим потенциалом в системе отсчета, сопутствующей сверхтекучей компоненте. Мы будем пользоваться теми же обозначениями, что и в двухжидкостной модели, хотя число сверхтекучих и нормальных компонент будет произвольным. Тогда для нормальной компоненты уравнение (2.9) эквивалентно уравнению

$$S^\rho \nabla_{[\rho} \Theta_{\nu]} = 0. \quad (2.11)$$

Это одна из форм записи уравнений движения обычной релятивистской гидродинамики [12]. Отличие в том, что уравнение (2.11) описывает релятивистскую неидеальную жидкость, для которой условие $S^\rho = \Theta^\rho (S^\nu S_\nu) / (\Theta^\nu \Theta_\nu)$, в общем, несправедливо.

Уравнение движения сверхтекучей компоненты должно удовлетворять условию потенциальности. Релятивистское условие потенциальности течения эквивалентно замкнутости 1-формы импульса

$$\nabla_{[\rho} \mu_{\nu]} = 0 \quad (2.12)$$

или сохранению вектора H . Уравнение (2.12) постулирует известное в нерелятивистской теории условие потенциальности течения $\text{rot } v_s = 0$, где сверхтекучая скорость v_s согласно Лебеву и Халатникову [5] определена через градиент фазы ϕ волновой функции бозе-конденсата $v_s = (1/m) \nabla \phi$ (m – масса спаренных частиц, rot – обобщение известной операции в n -мерном пространстве). Следствием уравнения (2.12) является тот факт, что согласно лемме Пуанкаре [10], по крайней мере *локально*, мы можем представить μ в виде точной формы $\mu = D\phi$. А на всем многообразии E такое представление

можно осуществить, если E гомеоморфно n -мерному шару. Однако при наличии квантовых вихрей в сверхтекучей компоненте 1-форма импульса μ не будет замкнутой на E и уравнение (2.12) теряет смысл.

Согласно Бен-Иакову [15] на мировой поверхности Σ квантового вихря сверхтекучесть нарушается и условие потенциальности (2.12) не имеет места. Мировой поверхностью квантового вихря является двумерный носитель $\Sigma = \text{supp } \omega$ формы завихренности $\omega \equiv D\mu$. Квантование циркуляции можно выразить инвариантным интегралом вдоль границы подмногообразия U , на котором 1-форма μ незамкнута, или иначе, рассматривая подмногообразие $U \setminus \Sigma$, на котором 1-форма импульса точна, и интегрируя коцикл μ по негомологичному нулю циклу C :

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{\partial U} \mu_\nu dx^\nu = \frac{1}{2\pi} \iint_U \omega_{\rho\nu} d\sigma^{\rho\nu} = [\mu|\partial U]_{D\mu \neq 0} = [D\phi|C]_{DC \neq 0} = \chi. \quad (2.13)$$

В простейшем варианте подмногообразие $U \setminus \Sigma$ удобно представить в виде круга с выколотым центром [16].

3. ТЕОРИЯ ПРИ НАЛИЧИИ КВАНТОВЫХ ВИХРЕЙ

Рассмотрим вариационную процедуру для сверхтекучей компоненты, содержащей квантовые вихри. Как и в теории поля, лагранжиан будет зависеть от первых производных переменной μ , потому что $\omega = D\mu \neq 0$. Форма завихренности ω рассматривается как новая независимая динамическая переменная [17, 7, 8], так что вариация лагранжиана

$$dL = \frac{1}{(n-1)!} H^{\mu\nu \dots \rho} dJ_{\mu\nu \dots \rho} + \frac{1}{2} \lambda^{\mu\nu} d\omega_{\mu\nu} \quad (3.1)$$

в отличие от (2.6) содержит дополнительное слагаемое, соответствующее вкладу квантовых вихрей.

Рассмотрим расслоение тотального n -мерного пространства над 2-мерной базой M (с локальными координатами Y^i , $i = 1, 2$), на которой определена замкнутая внешняя 2-форма ω_{ij} с проекцией $\pi : E \rightarrow M$. Соответствующая 2-форма на E

$$\omega_{\mu\nu} = \pi^*(\omega_{ij}) \quad (3.2)$$

будет замкнутой: $D\omega = 0$. Вариация ω опять не является произвольной. Для бесконечно малого смещения $dY^i = -\xi^\lambda (\partial Y^i / \partial x^\lambda)$ вдоль произвольного вектора ξ соответствующая производная Ли

$$\mathcal{L}_\xi \omega = D(\vec{\xi} \cdot \vec{\omega}) \quad (3.3)$$

определяет вариацию формы завихренности.

С помощью потенциала Колба–Рамона B [17] форму числа частиц J обычно представляют точным выражением [8] $J = DB$, что соответствует

$$j^\rho = \nabla_\nu \beta^{\rho\nu}, \quad (3.4)$$

где $\vec{\beta} = *B$. Однако формула (3.4) имеет лишь локальный характер, когда число Бетти $b^{n-1}(E)$ отлично от нуля. В общем случае следует записать

$$J = F + DB, \quad (3.5)$$

где $(n-1)$ -форма F принадлежит $(n-1)$ -мерной группе когомологий многообразия E .

Подставляя выражения (3.5) и (3.3) в формулу (3.1) и интегрируя, приходим к уравнению, обобщающему (2.10)–(2.12),

$$\{\vec{f} + \delta\vec{b} + (-1)^{n+1}\delta\vec{\lambda}\} \cdot \omega = 0. \quad (3.6)$$

Как видно, роль размерности тотального многообразия здесь проявляется в наличии множителя $(-1)^{n+1}$ перед вторым слагаемым в скобках. А при отсутствии квантовых вихрей уравнения движения (2.10)–(2.12) имеют один и тот же вид в случае любой размерности. В частности, в 4-мерном пространстве

$$\{f^\lambda + \nabla_\vartheta b^{\rho\vartheta} - \nabla_\vartheta \lambda^{\rho\vartheta}\} \omega_{\nu\lambda} = 0, \quad (3.7)$$

что отличается от результата Картера и Ланглуа [17] появлением первого слагаемого в скобках. Отметим, что уравнения движения (3.7) имеют такую форму на всяком многообразии четной размерности, например в двумерном случае, относящемся к теории струн [18].

4. РОЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КОМПОНЕНТ

В теории Лебедева и Халатникова [5] в отличие от теории Израэля [1] учитывается взаимодействие между компонентами. Таким образом, теория Лебедева–Халатникова относится к неидеальным релятивистским жидкостям. Картер и Ланглуа [8] показали, что при наличии квантовых вихрей в сверхтекучей компоненте жидкость также становится неидеальной. Ситуация, рассмотренная Картером и Ланглуа, крайне идеализирована. В реальных условиях при отличной от нуля температуре, кроме сверхтекучей, будет всегда существовать нормальная компонента, а взаимодействием квантовых вихрей с нормальной компонентой пренебрегать нельзя.

Если рассматривать многокомпонентную систему, то следует принимать во внимание как взаимодействие между компонентами жидкости, так и взаимодействие между квантовыми вихрями и разными компонентами и даже взаимодействие между вихрями разных компонент (если даны две или более сверхтекучих компоненты с квантовыми вихрями, как, например, в задачах, связанных с нейтронными звездами [19]: взаимодействие протонных и нейтронных квантовых вихрей там играет исключительную роль).

Занумеруем компоненты латинскими индексами a, b и т.д., условно относя цифру 1 к сверхтекучей компоненте с квантовыми вихрями, 2 – к сверхтекучей компоненте без вихрей, 3 – к нормальной компоненте. Выберем в качестве первичных динамических переменных формы η и ω , а сопряженные им переменные $\vec{k}$ и $\vec{\lambda}$ выразим через первичные по формулам

$$\{a\} k^\nu = \sum_b [B_{ab} \{b\} \eta^\nu + A_{ab}^{\nu\rho\sigma} \{b\} \omega_{\rho\sigma}], \quad (4.1)$$

$$\{a\} \lambda^{\nu\rho} = \sum_b [A_{ab}^{\nu\rho\sigma} \{b\} \eta_\sigma + C_{ab} \{b\} \omega^{\nu\rho}]. \quad (4.2)$$

Взаимодействию между разными компонентами жидкости, подробно исследованному Картером и Халатниковым [2, 6], отвечает матрица B_{ab} . Выражение (4.2) относится

только к сверхтекучей компоненте с квантовыми вихрями, поэтому $A_{2b}^{\mu\nu\rho} = A_{3b}^{\mu\nu\rho} = C_{2b} = C_{3b} = 0$. Если взаимодействие квантовых вихрей с жидкостью отсутствует, то все матрицы A равны нулю. Это так называемая дилатонная модель, в которой идеальная сверхтекучая жидкость и квантовые вихри представляют собой не взаимодействующие друг с другом системы. Когда же все матрицы B_{ab} и C_{ab} диагональны, мы приходим к аналогии с теорией свободного векторного поля [16], если η_ν интерпретировать как векторный потенциал, а $\omega_{\rho\nu} = 2\nabla_{[\nu}\eta_{\rho]}$ – как тензор Максвелла.

Матрица $A_{11}^{\mu\nu\rho}$ соответствует взаимодействию вихрей с “собственной” сверхтекучей компонентой, что рассмотрели Картер и Ланглуа [8]. В принципе следует также учитывать взаимодействие квантовых вихрей как с нормальной компонентой, чему соответствует матрица $A_{13}^{\mu\nu\rho}$, так и с другими сверхтекучими компонентами (этому взаимодействию отвечает матрица $A_{12}^{\mu\nu\rho}$). Кроме того, если имеется более одной сверхтекучей компоненты с квантовыми вихрями, разумно допустить взаимодействие между вихрями двух разных компонент (матрица $C_{1\bar{1}}$, где индексом $\bar{1}$ обозначена другая сверхтекучая компонента, также содержащая квантовые вихри).

В соответствии с преобразованием (2.7) и вариационной формулой (3.1) запишем выражение для вариации давления

$$d\Psi = \sum_a [\{^a\}\vec{k} \cdot d\{^a\}\eta + \{^a\}\vec{\lambda} \cdot d\{^a\}\omega]. \quad (4.3)$$

Если известен лагранжиан или функция давления Ψ , то с помощью формулы (4.3) можно легко вычислить все коэффициенты в выражениях (4.1) и (4.2). Обычно за исключением простейших моделей лагранжиан в явном виде заранее неизвестен. Поэтому выведем общие формулы для коэффициентов в (4.1) и (4.2).

Прежде всего найдем матрицы B_{ab} . Для каждой компоненты введем величину

$$\{^a\}\eta^2 = -\{^a\}\eta^\rho \{^a\}\eta_\rho. \quad (4.4)$$

Зная зависимость лагранжиана или функции давления от переменной $\{^a\}\eta$, можно найти матрицу

$$B_{aa} = -2 \frac{\partial \Psi}{\partial (\{^a\}\eta^2)}. \quad (4.5)$$

Взаимодействие двух произвольных компонент, обозначаемых индексами a и b , выражается в зависимости функции давления от величины

$$\{^{ab}\}y^2 = -\{^a\}\eta^\rho \{^b\}\eta_\rho, \quad (4.6)$$

что дает

$$B_{ab} = -\frac{\partial \Psi}{\partial (\{^{ab}\}y^2)}, \quad a \neq b. \quad (4.7)$$

Если все коэффициенты (4.7) равны нулю, т.е. лагранжиан не зависит от величин (4.6), то это означает отсутствие взаимодействия между компонентами. Каждая компонента будет идеальной жидкостью. Именно к таким условиям и относится модель Израэля [1].

При наличии квантовых вихрей лагранжиан системы будет зависеть от величины

$$\{1\}\omega^2 = \{1\}\omega^{\rho\sigma} \{1\}\omega_{\rho\sigma}, \quad (4.8)$$

поэтому

$$C_{11} = -\frac{\partial \Psi}{\partial (\{1\}\omega^2)}. \quad (4.9)$$

Если квантовые вихри двух разных компонент взаимодействуют друг с другом, то зависимость лагранжиана от величины

$$\{1\bar{1}\}q^2 = \{1\}\omega^{\rho\sigma}\{\bar{1}\}\omega_{\rho\sigma} \quad (4.10)$$

соответствует отличным от нуля коэффициентам

$$C_{1\bar{1}} = -\frac{\partial \Psi}{\partial (\{1\bar{1}\}q^2)}. \quad (4.11)$$

Теперь рассмотрим, к каким результатам приводит взаимодействие квантовых вихрей с жидкостью. Для каждой сверхтекучей компоненты с квантовыми вихрями введем сохраняющийся $(n-3)$ -вектор

$$\{1\}h^{\nu_1 \dots \nu_{(m-3)}} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\rho\sigma\lambda\nu_1 \dots \nu_{(m-3)}}\{2\}\eta_{\rho}^{\{1\}}\omega_{\sigma\lambda} = *(\{1\}\omega \wedge \{1\}\eta). \quad (4.12)$$

Взаимодействие квантовых вихрей со сверхтекучей компонентой, несущей эти вихри, приводит к зависимости лагранжиана системы от величины

$$\{1\}h^2 = \{1\}h^{\vartheta_1 \dots \vartheta_{(m-3)}}\{1\}h_{\vartheta_1 \dots \vartheta_{(m-3)}}. \quad (4.13)$$

Таким образом, найдена матрица

$$A_{11}^{\nu\rho\sigma} = \frac{1}{(m-3)!} \frac{\partial \Psi}{\partial (\{1\}h^2)} \{1\}h_{\vartheta_1 \dots \vartheta_{(m-3)}} \varepsilon^{\vartheta_1 \dots \vartheta_{(m-3)}\nu\rho\sigma}. \quad (4.14)$$

При взаимодействии квантовых вихрей со сверхтекучей компонентой, не содержащей вихрей, лагранжиан будет зависеть от инварианта вида

$$\{12\}g^2 = \{12\}g^{\vartheta_1 \dots \vartheta_{(m-3)}}\{12\}g_{\vartheta_1 \dots \vartheta_{(m-3)}}, \quad (4.15)$$

где

$$\{12\}g^{\vartheta_1 \dots \vartheta_{(m-3)}} = *(\{1\}\omega \wedge \{2\}\mu) \quad (4.16)$$

есть сохраняющийся вектор завихренности “смешанного типа” [14]. Этому взаимодействию соответствует матрица

$$A_{12}^{\nu\rho\sigma} = \frac{1}{(m-3)!} \frac{\partial \Psi}{\partial (\{12\}g^2)} \{12\}g_{\vartheta_1 \dots \vartheta_{(m-3)}} \varepsilon^{\vartheta_1 \dots \vartheta_{(m-3)}\nu\rho\sigma}. \quad (4.17)$$

Наконец, остается рассмотреть взаимодействие нормальной компоненты с квантовыми вихрями. Физика этого взаимодействия имеет наглядное объяснение. Каждый квантовый вихрь создает метрику Керра для тепловых возбуждений, движущихся в окрестности этого квантового вихря [20, 21], тогда как при отсутствии вихрей тепловые возбуждения движутся в плоской метрике. Это явление приводит к зависимости лагранжиана от параметра

$$\{13\}i^2 = \{13\}i^{\vartheta_1 \dots \vartheta_{(m-3)}}\{13\}i_{\vartheta_1 \dots \vartheta_{(m-3)}}. \quad (4.18)$$

Отметим, что вектор

$$\{13\}_i^{\vartheta_1 \dots \vartheta_{(m-3)}} = *(\{1\}_\omega \wedge \{3\}\Theta), \quad (4.19)$$

фигурирующий в формуле (4.18), не является сохраняющейся величиной. Соответствующая матрица находится по аналогии с (4.17) и имеет вид

$$A_{13}^{\nu\rho\sigma} = \frac{1}{(m-3)!} \frac{\partial \Psi}{\partial (\{13\}_i^2)} \{13\}_i^{\vartheta_1 \dots \vartheta_{(m-3)}} \varepsilon^{\vartheta_1 \dots \vartheta_{(m-3)} \nu\rho\sigma}. \quad (4.20)$$

Итак, зависимость лагранжиана или функции давления от переменных (4.6), (4.10), (4.13), (4.15) и (4.18) является отличительной чертой, присущей многокомпонентной релятивистской сверхтекучей жидкости. Лагранжиан идеальной жидкости от этих величин зависеть не будет.

5. ПРИМЕРЫ

В данном разделе рассмотрены некоторые простые примеры построения функции давления для двухжидкостной модели.

До настоящего времени лагранжиан релятивистской сверхтекучей жидкости найден в двух случаях: когда в рамках двухжидкостной модели вычислен вклад нормальной компоненты в полное давление [22] и когда исследован вклад квантовых вихрей в уравнение состояния сверхтекучей компоненты [8]. Само по себе уравнение состояния сверхтекучей компоненты рассчитывается на основании ядерных моделей, но это не представляет интереса для наших исследований. С позиций релятивистской гидродинамики многокомпонентной жидкости интересно выяснить, какой вклад дают квантовые вихри в уравнение состояния нормальной компоненты.

При отличной от нуля температуре функция давления релятивистской сверхтекучей жидкости представляет собой сумму $\Psi = P + \psi$ давления сверхтекучей компоненты P и давления нормальной компоненты ψ . Давление нормальной компоненты ψ и статистическая сумма Z элементарных возбуждений связаны соотношением [22]

$$\Theta \ln Z = V\psi, \quad (5.1)$$

где $\Theta = \sqrt{-\Theta_\rho \Theta^\rho}$ – температура в сопутствующей системе отсчета, V – объем системы. Для вычисления статистической суммы по формуле

$$\ln Z = - \int dV \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} \ln [1 - e^{-\{E_p - (\vec{v} \cdot \vec{p})\}/\Theta}] \quad (5.2)$$

необходимо знать энергетический спектр E_p элементарных возбуждений. В формуле (5.2) величина

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}_s - \vec{v}_n}{1 - (\vec{v}_s \cdot \vec{v}_n)} \quad (5.3)$$

есть относительная скорость между “сверхтекучей” системой отсчета, в которой найдена E_p , и термостатом (нормальной системой отсчета).

В общем случае энергия элементарных возбуждений $E_p = c_s p_0$ находится из следующих соображений [20, 21]. Будем считать, что квантовые вихри параллельны оси

$z = x^3$, а 2-форма завихренности $\omega_{\rho\nu}$ при этом имеет единственный отличный от нуля элемент $\omega_{12} = \omega$, где величина ω определена формулой (4.8). Ради простоты мы не учитываем отличные от нуля элементы ω_{0i} ($i = 1, 2, 3$), которые при не очень большой “густоте” вихревых линий малы по сравнению с ω_{12} . Импульс безмассовых возбуждений удовлетворяет уравнению

$$m^2 = 0 = p_\mu p^\mu = G^{\mu\nu} p_\mu p_\nu, \quad (5.4)$$

где тензор $G^{\mu\nu}$ определяет в окрестности квантового вихря “фононную метрику” с интервалом [20]

$$ds^2 = (c_s^2 - v_s^2) dt^2 + 2v_s dt r d\phi - dr^2 - r^2 d\phi^2 - dz^2, \quad (5.5)$$

где c_s – скорость звука, а сверхтекучая скорость в соответствии с (2.13) определена выражением $v_s(r) = \chi/(2\pi r)$. Вместо завихренности $\omega(r) = \chi/(\pi r^2)$ обычно вводят усредненное по вихревой решетке значение $\langle\omega\rangle = \chi/(\pi \bar{R}^2)$ [8]. Конечно, в задачах гидродинамики оперировать с переменной $\omega(r)$, изменяющейся на микроскопическом масштабе, не имеет смысла. Именно величина $\langle\omega\rangle$ характеризует “заселенность” сверхтекучей жидкости вихрями. Таким образом, сверхтекучая скорость связана с усредненной по объему завихренностью. В двухжидкостной модели без квантовых вихрей [22] зависимость давления от инварианта $y^2 = -\mu_\rho \Theta^\rho$ (см. (4.6)) эквивалентна зависимости от относительной скорости. Точно так же и в рассматриваемом нами случае зависимость давления от i (4.18) содержится в относительной скорости (5.3). В самом деле, ковектор температуры $\Theta_\rho = \Theta(1, \vec{v}_n)/\sqrt{1 - v_n^2}$ задает систему отсчета, связанную с термостатом. Будем считать, что движение вдоль оси Z отсутствует, т.е. $v_n^3 = 0$. Тогда по формуле (4.19) находим, что единственный отличный от нуля элемент есть

$$i^3 = \omega \Theta_0 = \omega \Theta / \sqrt{1 - v_n^2},$$

следовательно,

$$v_n = \sqrt{1 - \omega^2 \Theta^2 / i^2}. \quad (5.6)$$

Таким образом, давление нормальной компоненты зависит от ω , Θ и i , а зависимость от μ отражена в скорости звука $c_s(\mu)$. Условие (5.4) с учетом формулы (5.5) приводит к уравнению

$$(c_s^2 - v_s^2) p_0^2 + 2(\vec{v}_s \cdot \vec{p}) p_0 - |\vec{p}|^2 = 0,$$

из которого следует, что

$$E_p = c_s p_0 = c_s |\vec{p}| \left\{ \frac{-v_s/c_s}{1 - v_s^2/c_s^2} + \sqrt{\left(\frac{v_s/c_s}{1 - v_s^2/c_s^2} \right)^2 + 1} \right\} = \tilde{c}(r) |\vec{p}|. \quad (5.7)$$

Подставляя выражение (5.7) в формулу (5.2), интегрируя по импульсу, а затем по углу между векторами $\vec{v}$ и $\vec{p}$, получаем

$$\langle\psi\rangle = -\frac{\pi^2 \Theta^4}{90 \hbar^3} \frac{1}{b^2 - a^2} \int_a^b 2\pi r dr \frac{2c}{(c^2 - v^2)^2}, \quad (5.8)$$

где b – внешний радиус, по порядку величины равный расстоянию между квантовыми вихрями, а a – радиус сердцевин квантового вихря.

Аналитический результат удается получить в пределе малых скоростей $v_s \ll c_s$, когда метрика (5.5) относится к космической струне со спином [23], а спектр возбуждений (5.7) при этом принимает вид

$$E_p = c_s p_0 = c_s |\vec{p}| - (\vec{v}_s \cdot \vec{p}). \quad (5.9)$$

Предположим, что v_n в отличие от $v_s(r)$ меняется незначительно на расстояниях порядка b , т.е. соотношение (5.6) можно переписать в виде $v_n = \sqrt{1 - \langle \omega \rangle^2 \Theta^2 / \langle i \rangle^2}$. Подставляя выражение (5.9) в формулу (5.2) и учитывая связь сверхтекучей скорости со средней завихренностью $\langle \omega \rangle$, находим с точностью до членов второго порядка малости давление нормальной компоненты

$$\langle \psi \rangle = \frac{\pi^2 \Theta^4}{90 \hbar^3 c_s^3} \frac{1}{(1 - v_n^2 / c_s^2)^2} F(\langle \omega \rangle, \langle i \rangle), \quad (5.10)$$

где

$$F(\langle \omega \rangle, \langle i \rangle) = 1 + \frac{3c_s - v_n}{2c_s} \frac{\langle \omega \rangle \bar{R}^2}{(c_s + v_n)b} + \frac{3c_s - 2v_n}{c_s} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \left(\frac{\langle \omega \rangle \bar{R}^2}{(c_s + v_n)b}\right)^2.$$

При $\langle \omega \rangle = 0$ будем иметь $F = 1$ и формула (5.10) определяет давление нормальной компоненты без квантовых вихрей [22].

При $\chi = 0$ формула (5.7) задает обычный фононный спектр $E_p = c_s |\vec{p}|$, который использовали Картер и Ланглуа [22] при вычислении давления нормальной компоненты. Их результат без труда обобщается на пространство размерности $n > 2$. Если под дифференциалом $d\vec{p}$ в формуле (5.2) понимать элемент $(n - 1)$ -мерной гиперповерхности в пространстве импульсов, то в соответствии с (5.1) находим

$$\psi = \frac{\Gamma(n) \zeta(n) S^{n-2}}{n - 1} \frac{\Theta^n}{(2\pi \hbar)^{n-1}} \frac{1}{v} \left\{ \frac{1}{(c_s - v)^{n-2}} - \frac{1}{(c_s + v)^{n-2}} \right\},$$

где $S^{n-2} = 2[\Gamma(1/2)]^{n-2} / \Gamma(n/2 - 1/2)$ – объем $(n - 2)$ -мерной сферы [10]. А при $n = 2$ будем иметь

$$\psi = \int \frac{dp}{2\pi \hbar} \ln(1 - e^{-(c_s - v)p/\Theta}) = \frac{1}{c_s - v} \frac{\Theta^2}{2\pi \hbar} \int \frac{x dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{12\pi \hbar} \frac{\Theta^2}{c_s - v}. \quad (5.11)$$

Последнее выражение обобщает соответствующее уравнение состояния для так называемых композитных или “теплых” струн [18] на случай отличной от нуля относительной скорости v .

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Резюмируем результаты, полученные в данной работе. Уравнения движения многокомпонентной сверхтекучей жидкости имеют одинаковый вид (2.10), (2.11) в пространстве любой размерности, если ни одна из сверхтекучих компонент не содержит квантовых вихрей. При наличии квантовых вихрей в сверхтекучей компоненте соответствующие уравнения движения приобретают более сложную форму (3.6), отражающую зависимость от размерности пространства. Формулы (4.1)–(4.20) показывают, что многокомпонентная система всегда будет неидеальной жидкостью. Присутствие квантовых

вихрей в сверхтекучей компоненте отражается на уравнении состояния нормальной компоненты (5.8), (5.9). Следует отметить, что вклад от квантовых вихрей в полное давление нормальной компоненты всегда оказывается положительным.

В реальных условиях тотальное пространство E часто имеет границу, а потому представляет интерес рассмотреть теорию на ∂ -многообразиях, что позволит приложить к физическим задачам такие новейшие достижения математики, как результаты Шварца по разложению Ходжа.

Автор признателен А.В. Аминовой, Г. Валасину, Г.Е. Воловику, В. Израэлю, А.Ю. Каменщикову и И.М. Халатникову за оказанную поддержку.

Список литературы

- [1] *W. Israel*. Phys. Lett. A. 1981. V. 86. № 1. P. 79.
- [2] *B. Carter, I. M. Khalatnikov*. Rev. Math. Phys. 1994. V. 6. № 2. P. 277.
- [3] *W. G. Dixon*. Arch. Rat. Mech. Anal. 1982. V. 80. № 2. P. 159.
- [4] *A. B. Прозоркевич, В. Л. Самородов, С. А. Смолянский*. ТМФ. 1982. Т. 52. № 3. С. 463.
- [5] *В. В. Лебедев, И. М. Халатников*. ЖЭТФ. 1982. Т. 83. № 5. С. 1601.
- [6] *B. Carter, I. M. Khalatnikov*. Phys. Rev. D. 1992. V. 45. № 12. P. 4536.
- [7] *B. Carter*. Class. Quantum. Gravit. 1994. V. 11. № 8. P. 2013.
- [8] *B. Carter, D. Langlois*. Nucl. Phys. B. 1995. V. 454. № 3. P. 402; hep-th/9611082.
- [9] *M. I. Monastyrsky*. Topology of gauge fields and condensed matter. New York: Plenum, 1993.
- [10] *Y. Choquet-Bruhat, C. Morete-DeWitt, M. Dillard-Bleick*. Analysis, manifolds and physics. Pt. 1. Amsterdam: North-Holland, 1977.
- [11] *R. Abraham, J. E. Marsden, T. Ratiu*. Manifolds, tensor analysis and applications. Berlin: Springer, 1988.
- [12] *A. Lichnerowicz*. Relativistic hydrodynamics and magnetohydrodynamics. New York: Benjamin, 1968.
- [13] *H. Balasin, W. Israel*. Do vortex filaments in a superfluid neutron star produce gravimagnetic forces? (Submitted for publication).
- [14] *B. Carter, I. M. Khalatnikov*. Ann. Rev. (N. Y.). 1992. V. 219. № 2. P. 243.
- [15] *U. Ben Ya'acov*. Nucl. Phys. B. 1992. V. 382. № 3. P. 597.
- [16] *A. S. Schwartz*. Topology for physicists. Berlin: Springer, 1994.
- [17] *B. Carter*. Nucl. Phys. B. 1994. V. 412. № 3. P. 345.
- [18] *R. Davies, E. P. Shellard*. Phys. Lett. B. 1988. V. 214. № 2. P. 219.
- [19] *A. D. Sedrakian, A. D. Sedrakian*. Astrophys. J. 1995. V. 413. № 2. P. 658.
- [20] *W. G. Unruh*. Phys. Rev. D. 1995. V. 51. P. 2827.
- [21] *G. E. Volovik, T. Vachaspati*. Int. J. Mod. Phys. B. 1996. V. 10. № 5. P. 471.
- [22] *B. Carter, D. Langlois*. Phys. Rev. D. 1995. V. 51. № 12. P. 5855.
- [23] *D. V. Gal'tsov, P. S. Letelier*. Phys. Rev. D. 1993. V. 47. P. 4273.

Поступила в редакцию 13.III.1997 г.
после доработки 27.VI.1997 г.

Yu. V. Vlasov

PHENOMENOLOGY OF MULTI-COMPONENT RELATIVISTIC SUPERFLUID IN MULTI-DIMENSIONAL SPACE

Relativistic multi-component hydrodynamics in a multi-dimensional space is discussed. With the account of the possibility of quantum vortices the generalized equations of motion are derived. Particular examples of the relevant equation of state are considered.