Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Т. Барнавели, М. Я. Гогберашвили, Гравитационно отталкивающие пузыри с “неминковской асимптотикой”, *ТМФ*, 1997, том 113, номер 2, 346–352

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1084>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 13:40:44

А. Т. Барнавели*, М. Я. Гогберашвили†

ГРАВИТАЦИОННО ОТТАЛКИВАЮЩИЕ ПУЗЫРИ С “НЕМИНКОВСКОЙ АСИМПТОТИКОЙ”

Обычно считается, что сферические доменные стенки описываются тем же уравнением состояния, что и плоские. В таком случае они также должны гравитационно отталкивать, что противоречило бы теореме Биркгофа. Однако эта теорема неприменима к решениям, которые на бесконечности не описываются геометрией Минковского. В настоящей статье в тонкостенном формализме рассматривается решение уравнения Эйнштейна, описывающее гравитационно отталкивающую сферическую доменную стенку и обладающее “асимптотикой неминковсковского типа”.

В последнее время большое внимание уделялось изучению гравитационных свойств таких топологических объектов, как доменные стенки, космические струны, монополи. Оказалось, что космические струны не оказывают гравитационного воздействия на окружающие объекты, в то время как глобальные монополи, глобальные струны и плоские доменные стенки гравитационно отталкивают [1–3]. В этой работе мы коснемся некоторых проблем, возникающих при изучении гравитационных свойств сферических доменных стенок, и покажем, что существует решение уравнений Эйнштейна, соответствующее стабильной гравитационно отталкивающей сферической доменной стенке.

Считается, что плоские доменные стенки описываются уравнением состояния [1]

$$\sigma = -p = \text{const}, \quad (1)$$

где σ — поверхностная плотность, а p — сильное давление в двух пространственных направлениях. Это уравнение состояния соответствует деситтеровскому расширению в плоскости стенки и “разбеганию” границ стенки вместе с горизонтом. О гравитационном поле такой стенки можно говорить только в отношении перпендикулярного к стенке направления. Если к таким объектам можно применить ньютоновское приближение с массой, определяемой формулой Толмэна

$$\begin{aligned} M &= \int (T_0^0 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3) \sqrt{-g} dV = \\ &= \int (\sigma + 2p) \sqrt{-g} dV = - \int \sigma \sqrt{-g} dV, \end{aligned} \quad (2)$$

то тогда давление p действует как отталкивающий гравитационный источник и плоская доменная стенка обладает отрицательной гравитационной массой с отталкивающим гравитационным полем [1].

* Институт физики АН Грузии, Тбилиси, Грузия. E-mail: barbi@iberiapac.ge

† Институт физики АН Грузии, Тбилиси, Грузия. E-mail: gogber@physics.iberiapac.ge

Естественно было бы предположить, что сферические доменные стенки (пузыри) ведут себя так же (т.е. гравитационно отталкивают), т.к. обычно считается, что они описываются тем же уравнением состояния (1) [4, 5]. С другой стороны, по теореме Биркгофа пространство вокруг любого сферического тела (в том числе пузыря) описывается метрикой Шварцшильда. Эта метрика содержит параметр

$$m = \int T_0^0 \sqrt{-g} dV \quad (3)$$

(соответствующий массе гравитирующего тела), который независимо от уравнения состояния положителен. Если для плоских доменных стенок (простирающихся до горизонта) отрицательная гравитационная масса (2) допустима, то для пузырей отрицательность массы (3) на первый взгляд кажется удивительной, т.к. T_0^0 всюду определено положительно. В этой связи следовало бы также заметить, что масса Толмэна M совпадает с m только в том случае, если и первая, и вторая фундаментальные формы непрерывны на поверхности объекта.

Вышеупомянутая проблема появилась и при изучении динамики пузырей с использованием тонкостенного формализма [6]. Было получено, что активная гравитационная масса сферической доменной стенки положительна, т.е. такие объекты гравитационно притягивают [4, 5, 7]. Разногласия в гравитационных свойствах плоских и сферических доменных стенок объяснялись либо нестабильностью последних [5], либо существованием некой дополнительной положительной энергии, стабилизирующей пузырь [7]. Однако такие объяснения оставляют без ответа некоторые парадоксы (проявляющиеся в моделях с большим давлением [5, 8, 9]), которые могут быть объяснены, только если пузыри с уравнением состояния (1) гравитационно отталкивают.

Проблема отрицательной массы может быть решена, если предположить, что доменные стенки не описываются уравнением состояния (1). Нужно учесть еще и поток наружу из объема интегрирования или некие внешние силы, стабилизирующие доменную стенку. В результате уравнение состояния может получить принципиально другую форму, и доменные стенки, как сферические, так и плоские, могут оказаться гравитационно притягивающими. Другим возможным решением указанного разногласия может стать предположение, что плоские доменные стенки описываются уравнением состояния (1), а сферические – нет.

Недавно мы исследовали динамику пузырей в тонкостенном формализме в предположении, что сферические доменные стенки все же описываются уравнением состояния (1). Было найдено решение, соответствующее гравитационно отталкивающим пузырям с внешней шварцшильдовской геометрией [10], но только для случая, когда направление течения времени меняется на противоположное на поверхности стенки.

В этой работе мы хотим рассмотреть другой случай, когда доменные стенки описываются уравнением состояния (1), направление течения времени одно и то же во всем пространстве, однако метрика вдали от пузыря не переходит в метрику Минковского. Мы покажем, что и в этом случае существует решение уравнений Эйнштейна, соответствующее гравитационно отталкивающему стабильному пузырю.

Предположение о “неминковской асимптотике” вполне резонно, т.к. сферическую доменную стенку (как и плоскую) невозможно окружить какой-либо границей внутри горизонта. Доменная стенка является как бы “частью” решения для скалярного поля, которое заполняет все пространство до горизонта и которое имеет ненулевое вакуумное среднее даже на бесконечности. В результате величина $\int T_{\mu\nu} dS^\nu$ не является

4-вектором энергии-импульса и нельзя определить энергию просто как $\int T_{00} dx dy dz$. Например, плотность энергии расширяющейся доменной стенки остается постоянной (см. (1)) несмотря на увеличение ее поверхности, т.е. такой объект “забирает” энергию из вакуума.

Из теории Эйнштейна следует, что полная энергия изолированной системы, асимптотически описываемой геометрией Минковского, положительна [11]. Вследствие существенной роли асимптотических условий эта теорема не может быть применена к решениям, которые не имеют асимптотической геометрии Минковского. Для демонстрации того, что знак гравитационного потенциала зависит от асимптотической геометрии, рассмотрим нуль-нуль-компоненту метрического тензора для изолированного источника в ньютоновском приближении

$$g_{00} = g_{00}^{\infty} + \Phi,$$

где g_{00}^{∞} – асимптотическое значение метрического тензора, а

$$\Phi = g_{00} - g_{00}^{\infty} \quad (4)$$

– потенциал Ньютона.

В случае, если вдали от источника имеется геометрия Минковского, g_{00}^{∞} достигает своего максимального значения 1, и т.к. $g_{00} \leq 1$, то Φ всегда отрицательно, т.е. имеется гравитационное притяжение. С другой стороны, когда асимптотически нет геометрии Минковского, т.е. $g_{00}^{\infty} < 1$, тогда потенциал Ньютона (4) может быть положительным или нулевым в зависимости от уравнения состояния источника. Как уже отмечалось, такими источниками с “неминковской асимптотикой” и необычными гравитационными свойствами являются топологические объекты [1–3].

Вследствие того, что точное решение уравнений Эйнштейна–Хиггса для сферической доменной стенки неизвестно, мы будем пользоваться приближением тонкой стенки. В этом формализме уравнение Эйнштейна, описывающее движение сферической доменной стенки в случае, когда направление течения времени во всем пространстве одно и то же, имеет вид [4, 6]

$$\sqrt{f_+ + \dot{R}^2} - \sqrt{f_- + \dot{R}^2} = -\kappa G R, \quad (5)$$

где $\kappa = 4\pi\sigma$, $f_{\pm}$ представляют собой нуль-нуль-компоненты метрического тензора во внешней и внутренней областях пузыря, G – гравитационная постоянная, R – радиус пузыря, а точка над буквой обозначает производную по собственному времени τ на поверхности пузыря.

Рассмотрим общий случай сферически-симметричного заряженного пузыря, когда метрика снаружи имеет вид

$$f_+ = 1 - \Delta - \frac{2Gm}{r} + \frac{Ge^2}{r^2} - G\Lambda_+ r^2,$$

а внутри –

$$f_- = 1 - G\Lambda_- r^2,$$

где $\Lambda_{\pm} \equiv (8\pi/3)\rho_{\pm}$, а $\rho_{\pm}$ – вакуумная плотность энергии во внешней и внутренней областях пузыря. Параметры m и e суть соответственно шварцшильдовская масса и заряд оболочки пузыря, а $g_{00}^{\infty} = 1 - \Delta$ – значение метрического тензора на бесконечности.

Теперь уравнение движения (5) принимает вид

$$\sqrt{\dot{R}^2 + 1 - \Delta - \Lambda_+ G R^2 - \frac{2Gm}{R} + \frac{Ge^2}{R}} - \sqrt{\dot{R}^2 + 1 - \Lambda_- G R^2} = -\kappa G R.$$

Находя m из этого уравнения, получим

$$m = -\frac{\Delta}{2G}R - \frac{a}{2}R^3 + \frac{e^2}{2R} + \kappa R^2 \sqrt{\dot{R}^2 + 1 - \Lambda_- G R^2}, \quad (6)$$

где $a \equiv \Lambda_+ - \Lambda_- + G\kappa^2$.

Нетрудно понять смысл каждого члена в (6). Первый член есть асимптотическая энергия хиггсовского поля, создающего пузырь. Второй член представляет собой объемную энергию пузыря (разность между вакуумными плотностями энергии старой и новой фаз) и энергию гравитационного самодействия на оболочке (энергия связи поверхности с поверхностью). Третий член есть электростатическая энергия вне пузыря. Последний член содержит кинетическую энергию оболочки и энергию связи поверхности с объемом.

Вводя новые безразмерные переменные

$$z \equiv \frac{Rb^{1/6}}{(-2m)^{1/3}}, \quad \tau' \equiv \frac{\tau b^{1/2}}{2\kappa}, \quad (7)$$

где $b = a^2 + 4\kappa^2 \Lambda_- G$, и безразмерные параметры

$$\begin{aligned} A &\equiv ab^{-1/2}, & E &\equiv -4\kappa^2(-2m)^{-2/3}b^{-2/3}, \\ Q^2 &\equiv e^2(-2m)^{-4/3}b^{1/6}, & D &\equiv \Delta(-2m)^{-2/3}b^{1/3}, \end{aligned}$$

можно записать уравнение движения (6) как

$$\left(\frac{dz}{d\tau'}\right)^2 + U(z) = E,$$

что идентично уравнению движения точечной частицы с энергией E , совершающей одномерное движение в поле с потенциалом

$$U(z) = -\left[z^2 - \frac{2A}{z}\left(1 + \frac{Q^2}{z} + Dz\right) + \frac{1}{z^4}\left(1 + \frac{Q^2}{z} + Dz\right)^2\right]. \quad (8)$$

В состоянии равновесия

$$z|_{z=z_0} = 0, \quad \left(\frac{\partial U(z)}{\partial z}\right)_{z=z_0} = 0,$$

где z_0 — точка равновесия, выполняется равенство $U(z_0) = E$ и можно найти критическое значения массы и равновесный радиус пузыря

$$m_0 = -\frac{4\kappa^3}{bU_0^{3/2}}, \quad R_0 = \frac{2\kappa z_0}{b^{1/2}U_0^{1/2}}, \quad (9)$$

где $U_0 = |U(z_0)| > 0$. Отметим, что m_0 отрицательна для положительных значений параметра b .

Для реальных траекторий потенциал (8) должен быть отрицательным, т.к. $E < 0$. Такой потенциал для случая незаряженных оболочек ($Q = 0$, $m > 0$) был обсужден в [9, 12], а для случая асимптотической геометрии Минковского ($D = 0$, $m < 0$) — в [10]. Исследуя потенциал (8), мы получили [10], что при $D = 0$ он имеет один максимум и состояние равновесия с (9) неустойчиво для любых значений параметров. Однако при $D \neq 0$ член Dz в (8) при некоторых значениях D вызывает появление минимума в потенциале и приводит к существованию стабильной конфигурации.

Здесь нам хотелось бы отметить, что иногда для приложений более удобно оценивать критический радиус и массу пузыря прямо из уравнения (6), налагая условия [4]

$$\dot{R} = 0, \quad \left. \frac{\partial m(R, \dot{R})}{\partial R} \right|_{\dot{R}=0} = 0. \quad (10)$$

Знак в последнем члене в уравнении (6) имеет принципиальное значение, когда мы изучаем проблему стабильности сферических оболочек. Для обычной материи этот знак отрицателен, таким образом,

$$\left. \frac{\partial m(R, \dot{R})}{\partial (\dot{R}^2)} \right|_{\dot{R}=0} < 0$$

и состояние равновесия (10) будет устойчивым в случае, если функция $m(R, \dot{R} = 0)$ будет иметь максимум в точке R_0 [4]. Для доменных стенок в соответствии с формулой Толмэна (2) знак последнего члена в (6) положителен,

$$\left. \frac{\partial m(R, \dot{R})}{\partial (\dot{R}^2)} \right|_{\dot{R}=0} > 0,$$

и состояние равновесия (10) будет устойчивым, если функция $m(R, \dot{R} = 0)$ имеет минимум в точке R_0 [4].

Теперь рассмотрим несколько частных случаев.

Простейшим примером гравитационно отталкивающей стабильной конфигурации может служить пузырь с метрикой Минковского $f_- = 1$ внутри и метрикой Шварцшильда с “неминковской асимптотикой” $f_+ = 1 - \Delta - 2m/r$ снаружи. В этом случае уравнение (6) имеет вид

$$m = -\frac{\Delta}{2G}R - \frac{G\kappa^2}{2}R^3 + \kappa R^2 \sqrt{\dot{R}^2 + 1}.$$

В приближении, когда мы пренебрегаем вторым членом этого уравнения, из (10) легко вычислить критические радиус и массу пузыря:

$$R_0 = \frac{\Delta}{4G\kappa}, \quad m_0 = -\left(\frac{\Delta}{4G\kappa}\right)^2.$$

Эта конфигурация стабильна, т.к. R_0 является точкой минимума функции $m(R, \dot{R} = 0)$.

В качестве другого примера рассмотрим случай, когда при оценке массы пузыря последним членом в уравнении (6) можно пренебречь по сравнению с остальными членами. Следует, однако, заметить, что этот член играет большую роль при оценке стабильности системы, как это уже отмечалось выше. Из соотношений (10) для этого случая нетрудно найти, что

$$R_0^2 = \frac{\Delta}{6G(-a)} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{12ae^2}{\Delta^2}} \right), \quad (11)$$

$$m_0 = \frac{\Delta R}{G} \left(-2 + \sqrt{1 + \frac{12(-a)e^2}{\Delta^2}} \right). \quad (12)$$

Из (11), (12) замечаем, что стабильная конфигурация возможна только для отрицательного $a = \Lambda_+ - \Lambda_-$. Знак массы критического пузыря зависит от значений параметров a , e и Δ и для различных моделей может быть положительным, отрицательным или равным нулю.

Очередным примером стабильного сферического объекта с “неминковской асимптотикой” является глобальный монополяр. Удобно обсуждать свойства этого объекта, также используя тонкостенный формализм. При этом можно считать, что все изменение скалярного поля, формирующего монополяр, происходит на некотором расстоянии R_0 от центра монополя. В сферических координатах нуль-нуль-компонента тензора энергии-импульса глобального монополя имеет вид (см., например, [2])

$$T_0^0 = \eta^2 \left[\frac{f^2}{r^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 + \frac{\lambda}{4} \eta^2 (f^2 - 1)^2 \right], \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} f &= 0 & \text{при } r < R_0, \\ f &= 1 & \text{при } r > R_0. \end{aligned}$$

Другими словами, в такой модели монополяр представляет собой старый вакуум внутри и новый вакуум снаружи с резкой границей перехода. Таким образом, для монополя наружная вакуумная плотность энергии ρ_+ равна нулю. Во внутренней области $\rho_- = \lambda\eta^4/4$, и мы имеем

$$e = \Lambda_+ = 0, \quad \Lambda_- = \frac{8\pi}{3} \frac{\lambda\eta^4}{4}. \quad (14)$$

Для поверхностной плотности монополя σ в тонкостенном приближении находим

$$\begin{aligned} \sigma &= \int_{R_0-\delta}^{R_0+\delta} T_0^0 dr = \\ &= \int_{R_0-\delta}^{R_0} \frac{\lambda\eta^4}{4} dr + \int_{R_0}^{R_0+\delta} \frac{\eta^2}{r^2} dr \approx \left(\frac{\lambda\eta^4}{4} + \frac{\eta^2}{R_0^2} \right) \delta, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\delta \ll R_0$ есть ширина стенки. Таким образом, постоянная $\kappa \equiv 4\pi\sigma \ll \Lambda$, и мы можем пренебречь ею в уравнении (6) для монополя.

Величину Δ в (6) можно найти из решения уравнений Эйнштейна для монополя

$$g_{00} = 1 + \frac{8\pi G}{r} \int_0^\infty T_0^0 r^2 dr = 1 - \Delta - \frac{2Gm}{r}, \quad (16)$$

где

$$\Delta = \frac{8\pi G}{r} \int_{\infty}^r T_0^0 r^2 dr = 8\pi G \eta^2 \neq 0. \quad (17)$$

Используя выражения (14), (15) и (17), из (11) и (12) мы находим радиус и массу монополя:

$$R_0 \sim \left(\frac{\Delta}{3G\Lambda_-} \right)^{1/2} = \frac{2}{\eta\sqrt{\Lambda}},$$

$$m \sim -\frac{\Delta^{3/2}}{3G^{3/2}\Lambda_-^{1/2}} = -\frac{16\pi\eta}{3\sqrt{\Lambda}} < 0.$$

Эти значения хорошо согласуются с точными решениями для глобального монополя, полученными в работе [2].

В заключение мы хотели бы заметить, что в случае монополя 'т Хоофта–Полякова энергия калибровочного поля устраняет ненулевую энергию скалярного поля на бесконечности. Таким образом, $\Delta = 0$ и остается обычная метрика Шварцшильда, как это было рассмотрено в [13].

Исследование, проведенное в этой работе, стало возможным отчасти благодаря гранту Академии наук Грузии.

Список литературы

- [1] *A. Vilenkin, E. P. S. Shellard.* Cosmic Strings and Other Topological Defects. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994.
- [2] *D. Harari, C. Lousto.* Phys. Rev. D. 1990. V. 42. № 8. P. 2626–2631.
- [3] *D. Harrari, P. Sikivie.* Phys. Rev. D. 1988. V. 37. P. 3438–3445.
- [4] *V. A. Berezin, V. A. Kuzmin, I. I. Tkachev.* Phys. Rev. D. 1987. V. 36. № 10. P. 2919–2944.
- [5] *J. Ipser, P. Sikivie.* Phys. Rev. D. 1984. V. 30. № 4. P. 712–719.
- [6] *W. Israel.* Nuovo. Cim. B. 1966. V. 44. № 1. P. 1–14.
- [7] *C. Lopez.* Phys. Rev. D. 1984. V. 30. № 2. P. 313–316.
- [8] *O. Grøn.* Phys. Rev. D. 1985. V. 31. № 8. P. 2129–2131.
- [9] *S. Blau, E. Guendelman, A. Guth.* Phys. Rev. D. 1987. V. 35. № 6. P. 1747–1767.
- [10] *A. Барнавели, М. Гогберашвили.* ТМФ. 1994. Т. 100. № 2. С. 303–311; *A. Barnaveli, M. Gogberashvili.* New Frontiers in Gravitation. Palm Harbor: Hadron Press, 1996; hep-ph/9505412.
- [11] *R. Schoen, S. T. Yau.* J. Math. Phys. 1981. V. 79. P. 231–239.
- [12] *A. Aurilia, R. Kissack, R. Mann, E. Spallucci.* Phys. Rev. D. 1987. V. 35. № 10. P. 2961–2975.
- [13] *Y. Cho, P. Freund.* Phys. Rev. D. 1975. V. 12. P. 1588–1589.

Поступила в редакцию 11.IV.1997 г.

A. Barnaveli, M. Gogberashvili

ANTIGRAVITING BUBBLES WITH NON-MINKOWSKIAN ASYMPTOTIC

Usually it is assumed that the spherical domain walls are described by the same state equation as the flat ones. In this case they also must be gravitationally repulsive, what is seemingly in contradiction with Birkhoff's theorem. However, this theorem is not applicable to solutions which do not display Minkowski geometry at infinity. In the paper a solution of Einstein equations describing the stable gravitationally repulsive spherical domain wall is considered in thin wall formalism for the case of non-Minkowskian asymptotic.