Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. С. Вернов, М. Н. Мнацаканова, Свойства алгебры q -деформированных коммутаторов в пространстве с индефинитной метрикой, *ТМФ*, 1997, том 113, номер 3, 355–368

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1085>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 03:24:16

Ю. С. Вернов*, М. Н. Мнацаканова†

СВОЙСТВА АЛГЕБРЫ q -ДЕФОРМИРОВАННЫХ КОММУТАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ

В пространстве с индефинитной метрикой исследуются представления, инвариантные свойства и обобщение алгебры q -коммутирующих.

1. ВВЕДЕНИЕ

Алгебра q -деформированных коммутаторов (для краткости q -алгебра) есть по определению алгебра операторов a , a^+ и N , удовлетворяющих следующим соотношениям:

$$[a, a^+]_q = q^{-N}, \quad [a, a^+]_q \equiv aa^+ - qa^+a, \quad (1)$$

$$[N, a] = -a, \quad [N, a^+] = a^+. \quad (2)$$

Мы предполагаем, что операторы a и a^+ сопряжены относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$, которое в общем случае является индефинитным. Оператор N самосопряженный, $q \in \mathbb{R}$ или $q \in \mathbb{C}$, $|q| = 1$. Эта алгебра связана с квантовыми группами, свойства которых интенсивно исследовались в последние годы [1–3]. q -Алгебра в гильбертовом пространстве рассматривалась во многих статьях [4–8]. Свойства этой алгебры в пространстве с индефинитной метрикой изучались в [9, 10]. Предлагаемая статья является продолжением этих работ.

Отметим, что, с одной стороны, q -алгебра находит применение в теории поля [11], а с другой стороны, пространства с индефинитной метрикой широко используются в калибровочной квантовой теории поля [12–14].

Статья построена следующим образом. Сначала (разделы 2, 3) рассматриваются алгебры более общего вида, чем q -алгебра, а именно алгебры, в которых условие (1) заменено условием

$$a^+a = \varphi(N), \quad aa^+ = \varphi_1(N), \quad (3)$$

где $\varphi(N)$ и $\varphi_1(N)$ – некоторые функции. Нами исследуются представления, в которых эти функции несингулярны. Доказывается, что в случае, когда оператор N имеет собственный вектор

$$N\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda, \quad (4)$$

* Институт ядерных исследований РАН. E-mail: vernov@theory.npi.msu.ru

† Научно-исследовательский институт ядерной физики МГУ. E-mail: mnatsak@theory.npi.msu.ru

а представление рассматриваемой алгебры неприводимо, спектр N может быть построен единым образом для всех алгебр указанного типа и состоит из чисел $\lambda + k$, где $k \in \mathbf{Z}$. Подчеркнем, что такой тип спектра обычно рассматривается в случае положительной метрики и предполагается, что только в этом случае соответствующие представления интересны для квантовой теории.

Далее изучены характерные свойства пространств, соответствующих неприводимым представлениям указанных алгебр, и для этих алгебр получен аналог теоремы единственности фон Неймана [15].

Вторая часть работы посвящена свойствам q -алгебры. В разделе 4 получено общее соотношение между операторами a^+a и N (формулы (26) и (26')). Это соотношение содержит произвольную действительную константу c , в связи с чем при заданном операторе N существует целый набор операторов a и a^+ , вместе с N образующих q -алгебру. В каждом конкретном представлении q -алгебры константа c фиксирована и формулы (26) и (26') являются частным случаем формул (3). Для гильбертова пространства аналогичная формула получена в [5]. В том же разделе рассмотрена зависимость спектра оператора N от величины c . В частности, показано, что при "почти всех" положительных c спектр $\text{Sp } N$ неограничен, а метрика соответствующего пространства индефинитна.

В разделах 5, 6 изучены неунитарные преобразования, оставляющие q -алгебру инвариантной. Доказано, что если в некотором пространстве J может быть реализовано какое-либо неприводимое представление q -алгебры, то в случае, когда $q > 0$, $c > 0$, в том же пространстве существуют представления с произвольными положительными константами q и c при условии, что тип спектра соответствующего оператора N не меняется (т.е. при переходе к новому представлению спектр остается неограниченным или ограниченным снизу (сверху)). Такого же типа результаты получены для представлений, в которых $q > 0$, $c < 0$, а также для представлений с $c < 0$.

В разделе 7 рассмотрена связь между представлениями q -алгебр при различных q . Особенно интересным оказывается случай $q > 0$, $c > 0$. При этих условиях из существования в пространстве J представлений q -алгебры с некоторыми фиксированными $q > 0$, $c > 0$ вытекает существование (в том же пространстве) представлений q -алгебры при произвольных положительных q и c при условии, что тип спектра соответствующего оператора N не меняется.

В разделе 8 рассмотрено разложение представлений рассматриваемых алгебр на неприводимые представления.

В приложении обсуждаются свойства представлений q -алгебры при комплексных q . Показано, что отказ от условия положительной определенности метрики приводит к существенному расширению набора представлений q -алгебры.

2. СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВА НЕПРИВОДИМОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РАССМАТРИВАЕМЫХ АЛГЕБР

Пусть J – линейное пространство, в котором реализовано неприводимое представление алгебры, заданной условиями (2) и (3). Для произвольных векторов этого пространства определено индефинитное скалярное произведение, относительно которого операторы a и a^+ сопряжены, а оператор N самосопряжен. Как будет показано ниже, условие существования собственного вектора у оператора N приводит к тому, что J оказывает-

ся натянутым на собственные векторы оператора N , т.е. произвольный вектор этого пространства есть линейная комбинация собственных векторов оператора N . При этом J содержит все конечные линейные комбинации этих векторов. Мы предполагаем, что соответствующее пространство J_0 слабо плотно в J , т.е. что $\forall x, y \in J$:

$$\langle x, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y_n \rangle, \quad x_n, y_n \in J_0.$$

Поскольку, как это будет видно ниже, в общем случае a , a^+ и N — неограниченные операторы, необходимо сделать дополнительные утверждения об областях определения этих операторов. Мы предполагаем, что существует плотная в J область D : $D = D(a^+a) \cap D(aa^+) \cap D(N)$ и что соотношения (2) и (3) выполнены в этой области. Условия (2) эквивалентны равенствам

$$Na = a(N - 1), \quad Na^+ = a^+(N + 1). \quad (2')$$

Точный смысл равенств (2') состоит в том, что если для какого-то вектора ψ определено действие оператора $a(N - 1)$ ($a^+(N + 1)$), то определено и действие оператора Na (Na^+), и наоборот, причем выполнены равенства (2'). По определению $D \subset D(a)$ и $D \subset D(a^+)$.

Мы рассматриваем представления, в которых оператор N имеет собственный вектор (см. (4)). Согласно условиям (3) $\psi_\lambda \in D$. Далее, поскольку $D \subset D(a)$ и $D \subset D(a^+)$, то существуют векторы $a\psi_\lambda$ и $a^+\psi_\lambda$. В силу соотношений (2') они являются собственными векторами оператора N , т.е.

$$Na^+\psi_\lambda = (\lambda + 1)a^+\psi_\lambda, \quad (5)$$

$$Na\psi_\lambda = (\lambda - 1)a\psi_\lambda. \quad (5')$$

Продолжая этот процесс, мы видим, что векторы $\psi_{\lambda+n} = (a^+)^n\psi_\lambda$ и $\psi_{\lambda-n} = a^n\psi_\lambda$ являются собственными векторами N :

$$N\psi_{\lambda+k} = (\lambda + k)\psi_{\lambda+k}, \quad (6)$$

где k здесь и далее — целое число.

Легко видеть, что векторы $\psi_{\lambda+k}$ исчерпывают множество собственных векторов оператора N . Действительно, согласно (3) и (6)

$$a^+\psi_{\lambda-n} = a^+a\psi_{\lambda-n+1} = \varphi(\lambda - n + 1)\psi_{\lambda-n+1}, \quad (7)$$

$$a\psi_{\lambda+n} = aa^+\psi_{\lambda+n-1} = \varphi_1(\lambda + n - 1)\psi_{\lambda+n-1}. \quad (8)$$

Из формул (7) и (8) заключаем, что

$$M(a^n, a^{+m})\psi_\lambda \sim \psi_{\lambda+m-n},$$

где $M(a^n, a^{+m})$ — произвольный моном n операторов a и m операторов a^+ . Следовательно,

$$P_n(a, a^+)\psi_\lambda = \sum_k c_k \psi_{\lambda+k}, \quad (9)$$

где $P_n(a, a^+)$ – произвольный полином от a и a^+ .

Рассмотрим J_0 – пространство всех векторов вида $P_n(a, a^+)\psi_\lambda$, т.е. согласно (9) пространство всех конечных линейных комбинаций векторов $\psi_{\lambda+k}$. Очевидно, что $D \supset J_0$.

Легко убедиться в том, что J_0 не содержит подпространств, инвариантных относительно рассматриваемой алгебры. Таким образом, полученное представление неприводимо. Легко также проверить, что любой $x \in J_0$ является циклическим вектором, как и должно быть для неприводимого представления (см. [16, с. 302]).

ЗАМЕЧАНИЕ. Если оператор N имеет простой дискретный спектр, то соотношения (3) являются следствием формул (2).

Действительно, согласно (2') $[a^+a, N] = [aa^+, N] = 0$ и $a^+a\psi_{\lambda+k} \sim aa^+\psi_{\lambda+k} \sim \psi_{\lambda+k}$ вследствие простоты спектра оператора N . Поскольку пространство J_0 натянуто на векторы $\psi_{\lambda+k}$, то $a^+a = \varphi(N)$, $aa^+ = \varphi_1(N)$. Сделанное утверждение доказано.

Пространство J , вообще говоря, не обязано быть полным пространством. Однако, введя на J гильбертову метрику (строго говоря, это можно сделать разными способами), мы можем пополнить J и построить замкнутое пространство J' . Поскольку рассматриваемое представление неприводимо, то $J' = \bar{J}_0$, где $\bar{J}_0$ – замыкание пространства J_0 (относительно введенной метрики). Различные (т.е. содержащие разные бесконечные последовательности векторов $\psi_{\lambda+k}$) пространства J содержат J_0 в качестве слабо плотной области. Уместно не различать представления, совпадающие на J_0 , и считать, что $J = \bar{J}_0$.

Существует естественный способ построения $\bar{J}_0$, который в случае положительной метрики совпадает с обычной процедурой пополнения предгильбертова пространства. Сначала перейдем к системе ортонормированных векторов $\tilde{\psi}_{\lambda+k}$:

$$\tilde{\psi}_{\lambda+k} = \frac{\psi_{\lambda+k}}{|\langle \psi_{\lambda+k}, \psi_{\lambda+k} \rangle|^{1/2}}. \quad (10)$$

Так как $N = N^+$, то

$$\langle \tilde{\psi}_{\lambda+k}, \tilde{\psi}_{\lambda+l} \rangle = \delta_{kl} \delta_k, \quad \delta_k = \pm 1. \quad (11)$$

Формула (11) подразумевает, что множество $\psi_{\lambda+k}$ не содержит нейтральных векторов, т.е. что $\langle \psi_{\lambda+k}, \psi_{\lambda+k} \rangle \neq 0 \quad \forall k$. Это условие фактически не является дополнительным предположением, т.к. согласно полученным ниже формулам (17), (18) и приведенным там же рассуждениям в этом случае либо J_0 – изотропное пространство, т.е. $\langle x, y \rangle = 0 \quad \forall x, y \in J_0$, либо рассматриваемое представление не является неприводимым. Мы исключаем возможность того, что J_0 – изотропное пространство, поскольку рассматриваемые задачи в таком пространстве не представляют физического интереса.

Разбив все множество векторов $\tilde{\psi}_{\lambda+k}$ на множество положительных $\tilde{\psi}_{\lambda+k}^+$ и отрицательных $\tilde{\psi}_{\lambda+k}^-$ векторов, мы видим, что J_0 допускает фундаментальное разложение (см. [17, с. 24])

$$J_0 = J_0^+ \oplus J_0^-,$$

где J_0^+ (J_0^-) – пространство всех конечных линейных комбинаций векторов $\tilde{\psi}_{\lambda+k}^+$ ($\tilde{\psi}_{\lambda+k}^-$).

Векторы

$$x^\pm = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k^\pm \tilde{\psi}_{\lambda+k}^\pm$$

могут принадлежать J , только если

$$|\langle x^\pm, x^\pm \rangle| < \infty,$$

т.е. если

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_k^\pm|^2 < \infty.$$

Предполагая, что последнее условие является не только необходимым, но и достаточным, для того чтобы $x^\pm \in \bar{J}_0^\pm$ (иными словами, используя для пополнения $J_0^\pm$ исходное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$), построим $\bar{J}_0$ в виде

$$\bar{J}_0 = \bar{J}_0^+ \oplus \bar{J}_0^-. \quad (12)$$

К тому же пространству $\bar{J}_0$ можно прийти, введя на J_0 гильбертову метрику следующим способом. Поскольку для всех $x \in J_0$ справедливо разложение

$$x = x^+ + x^-, \quad x^\pm \in J_0^\pm, \quad (13)$$

то легко проверить, что $(x, y) \equiv \langle x^+, y^+ \rangle - \langle x^-, y^- \rangle$ — положительно-определенное скалярное произведение. Замыкая J_0 , используя топологию, заданную (x, x) , приходим к пространству $\bar{J}_0$. Таким образом, мы реализовали $\bar{J}_0$ как пространство всех векторов вида

$$x = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k \tilde{\psi}_{\lambda+k},$$

для которых выполнено условие

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |c_k|^2 < \infty. \quad (14)$$

Согласно (13) $\bar{J}_0$ является пространством Крейна [17, с. 100; 18, с. 26].

Докажем теперь, что скалярные произведения в J однозначно определяются числом λ и видом функции $\varphi(N)$. Сначала покажем, что $\varphi_1(N) = \varphi(N+1)$. Действительно,

$$\begin{aligned} a^+ a a^+ \psi_{\lambda+n} &= \varphi(\lambda+n+1) \psi_{\lambda+n+1} = \varphi_1(\lambda+n) \psi_{\lambda+n+1}, \\ a a^+ a \psi_{\lambda-n} &= \varphi(\lambda-n) \psi_{\lambda-n-1} = \varphi_1(\lambda-n-1) \psi_{\lambda-n-1}, \end{aligned}$$

далее,

$$\langle \psi_{\lambda+n}, \psi_{\lambda+n} \rangle = \langle \psi_{\lambda+n-1}, a a^+ \psi_{\lambda+n-1} \rangle = \varphi(\lambda+n) \langle \psi_{\lambda+n-1}, \psi_{\lambda+n-1} \rangle, \quad (15)$$

$$\langle \psi_{\lambda-n}, \psi_{\lambda-n} \rangle = \langle \psi_{\lambda-n+1}, a^+ a \psi_{\lambda-n+1} \rangle = \varphi(\lambda-n+1) \langle \psi_{\lambda-n+1}, \psi_{\lambda-n+1} \rangle. \quad (16)$$

Из соотношений (15) и (16) следует, что

$$\langle \psi_{\lambda+n}, \psi_{\lambda+n} \rangle = \varphi(\lambda+n) \varphi(\lambda+n-1) \dots \varphi(\lambda+1) \langle \psi_\lambda, \psi_\lambda \rangle, \quad (17)$$

$$\langle \psi_{\lambda-n}, \psi_{\lambda-n} \rangle = \varphi(\lambda-n+1) \varphi(\lambda-n+2) \dots \varphi(\lambda) \langle \psi_\lambda, \psi_\lambda \rangle. \quad (18)$$

Отметим, что если $\varphi(\lambda + m) = 0$ при каком-то $m \in \mathbf{Z}^+$, то это означает, что спектр N ограничен сверху, т.е. что $\psi_{\lambda+m} = 0$. Действительно, $\langle \psi_{\lambda+m}, \psi_{\lambda+m} \rangle = 0$ и тогда $\langle \psi_{\lambda+m+n}, \psi_{\lambda+m+n} \rangle = 0 \quad \forall n \in \mathbf{Z}^+$. Легко видеть, что пространство D_0 , образованное векторами вида $P_n(a, a^+) \psi_{\lambda+m}$, ортогонально J_0 и инвариантно относительно рассматриваемой алгебры. Действительно,

$$\langle P_n(a, a^+) \psi_{\lambda+m}, P_l(a, a^+) \psi_{\lambda} \rangle = \langle \psi_{\lambda+m}, P_n^+(a, a^+) P_l(a, a^+) \psi_{\lambda} \rangle = 0.$$

Если $\varphi(\lambda - n) \neq 0 \quad \forall n$, то

$$P_l(a, a^+) \psi_{\lambda+m} = \sum_n c_n \psi_{\lambda+m+n}.$$

Последнее равенство противоречит неприводимости рассматриваемого представления.

Аналогичные рассуждения приводят к тому, что если $\varphi(\lambda - m) = 0$, а $\varphi(\lambda + n) \neq 0 \quad \forall n$, то $\psi_{\lambda-m-1} = 0$ и спектр N ограничен снизу; а также, если $\varphi(\lambda + m_1) = 0$ и $\varphi(\lambda - m_2) = 0$, то спектр N состоит из чисел $\lambda + k$, где $-m_2 \leq k < m_1$.

Легко убедиться в том, что пространство J_0 , а следовательно, и J не вырождены, т.е. $x = 0$, если $x \perp J_0$.

3. АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ФОН НЕЙМАНА ДЛЯ РАССМАТРИВАЕМЫХ АЛГЕБР

Согласно теореме фон Неймана [15], два неприводимых представления канонических коммутационных соотношений (ККС) в гильбертовом пространстве

$$b_i b_i^+ - b_i^+ b_i = 1, \quad i = 1, 2, \quad (19)$$

связаны между собой унитарным преобразованием, если только эти представления удовлетворяют некоторым “естественным” условиям. Аналог этой теоремы для ККС в пространстве с индефинитной метрикой получен в [19], а для q -алгебры – в [9].

Здесь мы докажем, что и в случае алгебр, заданных соотношениями (3), при определенных условиях неприводимые представления этих алгебр оказываются унитарно-эквивалентными. Ниже, вплоть до раздела 8, мы рассматриваем только неприводимые представления и не оговариваем этого.

ТЕОРЕМА. Пусть $R_i \quad (i = 1, 2)$ – представления алгебры операторов a_i, a_i^+, N_i в пространствах J_i – определены условиями (2) и (3). Если $\varphi_2(\lambda_2 + k) = \varphi_1(\lambda_1 + k), \quad \forall k$ (см. формулы (17), (18)), то операторы a_2 и a_1 связаны следующими преобразованиями:

1) унитарным –

$$a_2 = V a_1 V^+, \quad V V^+ = V^+ V = I, \quad (20)$$

если $\langle \psi_{\lambda_1}^{(1)}, \psi_{\lambda_1}^{(1)} \rangle = \langle \psi_{\lambda_2}^{(2)}, \psi_{\lambda_2}^{(2)} \rangle$,

2) квазиунитарным –

$$a_2 = -V a_1 V^+, \quad V V^+ = V^+ V = -I, \quad (21)$$

если $\langle \psi_{\lambda_1}^{(1)}, \psi_{\lambda_1}^{(1)} \rangle = -\langle \psi_{\lambda_2}^{(2)}, \psi_{\lambda_2}^{(2)} \rangle$.

Достаточно доказать соотношение (20), т.к. формула (21) выводится аналогично.

Пусть $\psi_{\lambda_2+k}^{(2)} = V\psi_{\lambda_1+k}^{(1)}$. Соответствие между J_1 и J_2 взаимно однозначное, т.к. $x_2 = Vx_1$, если $x_i = \sum c_k \psi_{\lambda_i+k}^i$. Поскольку $\varphi_2(\lambda_2 + k) = \varphi_1(\lambda_1 + k)$, то согласно формулам (17) и (18) $\langle x_2, y_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle$, если $x_2 = Vx_1$, $y_2 = Vy_1$. Поскольку x_1 и y_1 — произвольные векторы, а пространства J_1 и J_2 не вырождены, это равенство означает, что $V^+V = I$. Кроме того, и $VV^+ = I$, т.к. оператор V^{-1} существует.

Таким образом, мы видим, что если $\varphi_2(N_2) = \varphi_1(N_1)$ и $\text{Sp } N_1 = \text{Sp } N_2$, то представления R_1 и R_2 (квази-)унитарно-эквивалентны; (квази-)унитарные преобразования не исчерпывают всех преобразований, относительно которых q -алгебра инвариантна. Неунитарные преобразования рассмотрены ниже (разделы 5, 6).

4. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ОПЕРАТОРАМИ a^+a И N В СЛУЧАЕ q -АЛГЕБРЫ

Найдем вид функции $\varphi(N)$ в случае q -алгебры. Запишем $\varphi(N)$ в виде

$$\varphi(N) = \varphi_1(N) + \varphi_2(N). \quad (22)$$

Если $\varphi_1(N)$ выбрана таким образом, что

$$\varphi_1(N+1) - q\varphi_1(N) = q^{-N}, \quad (23)$$

то

$$\varphi_2(N+1) = q\varphi_2(N),$$

следовательно,

$$\varphi_2(N) = c'q^N, \quad c' - \text{константа}. \quad (24)$$

Легко проверить, что $\varphi_1(N)$ может быть выбрана следующим образом:

$$\varphi_1(N) = \frac{q^N - q^{-N}}{q - q^{-1}}, \quad q \neq -1, \quad (25)$$

$$\varphi_1(N) = Ne^{i\pi(N+1)}, \quad q = -1. \quad (25')$$

Из (22), (24), (25) и (25') получаем, что

$$a^+a = \frac{cq^N - q^{-N}}{q - q^{-1}} \equiv [N]_{c,q}, \quad c = 1 + c'(q - q^{-1}), \quad q \neq -1, \quad (26)$$

$$a^+a = (N + c)e^{i\pi(N+1)} \equiv [N]_{c,-1}, \quad c = -c', \quad q = -1. \quad (26')$$

Таким образом, при фиксированном c q -алгебра является одной из алгебр, описываемых формулой (3). Вместе с тем соотношение (1) не фиксирует однозначно связь между a^+a и N . Ниже для краткости мы опускаем q в $[N]_{c,q}$.

В случае q -алгебры формулы (17) и (18) имеют вид

$$\langle \psi_{\lambda+n}, \psi_{\lambda+n} \rangle = [\lambda + n]_c [\lambda + n - 1]_c \dots [\lambda + 1]_c \langle \psi_\lambda, \psi_\lambda \rangle, \quad (17')$$

$$\langle \psi_{\lambda-n}, \psi_{\lambda-n} \rangle = [\lambda - n + 1]_c [\lambda - n + 2]_c \dots [\lambda]_c \langle \psi_\lambda, \psi_\lambda \rangle. \quad (18')$$

$\text{Sp } N$ может быть ограничен сверху или снизу, только если $[\lambda + k]_c = 0$ при некотором k , т.е. если

$$c \equiv c_k = q^{-2(\lambda+k)}, \quad q \neq -1, \quad (27)$$

$$c \equiv c_k = -(\lambda + k), \quad q = -1. \quad (27')$$

Согласно (27), (27'), если $q \in \mathbb{R}$, то спектр N может быть или неограниченным, или ограниченным только снизу или сверху.

Легко показать, что т.к. a^+a и N – самосопряженные операторы, то $c \in \mathbb{R}$. Кроме того, если $q < 0$, то λ – целое число.

Действительно, если $q = -\tilde{q}$, $\tilde{q} > 0$, то согласно (1)

$$\langle \psi_{\lambda+k}, aa^+ + \tilde{q}a^+a\psi_{\lambda+k} \rangle = \tilde{q}^{-(\lambda+k)} e^{i\pi(\lambda+k)}.$$

Левая часть этого равенства действительна, следовательно, $\lambda \in \mathbf{Z}$. Если $q \in \mathbb{C}$, то $|q| = 1$, $c = 1$ (см. приложение).

Согласно теореме (см. (17'), (18')) два представления q -алгебры (квази-)унитарно-эквивалентны, если $\text{Sp } N_1 = \text{Sp } N_2$ и $c_1 = c_2$. Ниже мы не будем различать такие представления.

Рассмотрим теперь вопрос, в каких случаях, т.е. при каких c и q , метрика является индефинитной, а при каких – положительно-определенной. Прежде всего заметим, что если $[\lambda + k]_c$ заданы, то согласно (17'), (18') изменение знака $\langle \psi_{\lambda+k}, \psi_{\lambda+k} \rangle$ при некотором $k = k_0$ приводит к изменению знака у всех $\langle \psi_{\lambda+k}, \psi_{\lambda+k} \rangle$. Такая замена соответствует квазиунитарному преобразованию, и, поскольку мы не различаем представления, связанные таким преобразованием, знак $\langle \psi_{\lambda+k_0}, \psi_{\lambda+k_0} \rangle$ можно выбрать произвольным образом.

Проанализируем зависимость знаков $\langle \psi_{\lambda+k}, \psi_{\lambda+k} \rangle$ от величины c .

Рассмотрим отдельно несколько случаев.

1а. $q > 0$, $c > 0$. Разобьем действительную ось на интервалы: $I_k(q) \equiv I_k$, $c \in I_{k_0}$, если

$$c_{k_0} < c < c_{k_0-1}, \quad q > 1, \quad (28)$$

$$c_{k_0-1} < c < c_{k_0}, \quad q < 1, \quad (28')$$

где $c_k = q^{-2(\lambda+k)}$.

Пусть $c \neq c_k \quad \forall k$. Тогда если $q > 1$ и $c \in I_{k_0}$, то согласно (17'), (18') $[\lambda + k]_c > 0$ при $k \geq k_0$ и $[\lambda + k]_c < 0$ при $k < k_0$. Положим $\langle \psi_{\lambda+k_0}, \psi_{\lambda+k_0} \rangle > 0$. Тогда из формул (17'), (18') непосредственно следует, что

$$\langle \psi_{\lambda+k}, \psi_{\lambda+k} \rangle > 0, \quad k \geq k_0, \quad (29)$$

$$\langle \psi_{\lambda+k}, \psi_{\lambda+k} \rangle = (-1)^{k_0-k} |\langle \psi_{\lambda+k}, \psi_{\lambda+k} \rangle|, \quad k < k_0. \quad (29')$$

Если $q < 1$ и $c \in I_{k_0}$, то, считая, как и раньше, $\langle \psi_{\lambda+k_0}, \psi_{\lambda+k_0} \rangle > 0$, видим, что теперь

$$\langle \psi_{\lambda+k}, \psi_{\lambda+k} \rangle > 0, \quad k \leq k_0, \quad (30)$$

$$\langle \psi_{\lambda+k}, \psi_{\lambda+k} \rangle = (-1)^{k-k_0} |\langle \psi_{\lambda+k}, \psi_{\lambda+k} \rangle|, \quad k > k_0. \quad (30')$$

Таким образом, когда $c > 0$ и спектр N неограничен, метрика всегда индефинитна.

Если $c = c_k$ (см. (27)), спектр N ограничен сверху или снизу. При $q > 1$ метрика положительна, если спектр ограничен снизу, и индефинитна, если – сверху; при $q < 1$ наоборот.

1б. $q > 0$, $c < 0$. В этом случае, если $q > 1$, то $[\lambda + k]_c < 0 \ \forall k$; если $q < 1$, то $[\lambda + k]_c > 0 \ \forall k$. Таким образом, если $q > 1$, то метрика индефинитна, причем, если $\psi_{\lambda+k}$ – положительный вектор, то $\psi_{\lambda+k\pm 1}$ – отрицательные векторы. Если $q < 1$, то метрику всегда можно считать положительно-определенной.

2. $q < 0$. Тогда формула (26) может быть переписана в виде

$$a^+a = e^{i\pi(N+1)}[N]_{c,\tilde{q}}, \quad q = -\tilde{q}. \quad (26'')$$

Согласно (26') и (26'') при $q < 0$ метрика всегда индефинитна. Тем же способом, что и раньше, легко определить знаки $\langle \psi_{\lambda+k}, \psi_{\lambda+k} \rangle$.

Из проведенного анализа следует, что, вообще говоря, при заданном N вещественная константа c не может быть произвольной. Действительно, пусть a, a^+, N – некоторое представление q -алгебры, $a^+a = [N]_c$. Предположим, что существует другое представление q -алгебры: $a', a'^+, N, a'^+a' = [N]_{c'}$. Докажем, что это возможно лишь тогда, когда

$$\frac{[\lambda + k]_c}{[\lambda + k]_{c'}} > 0 \quad \forall k. \quad (31)$$

Действительно, в соответствии со сделанным предположением $a'^+\psi_\lambda = \psi'_{\lambda+1}$ есть собственный вектор оператора N . Поскольку мы рассматриваем случай простого спектра оператора N , то $\psi'_{\lambda+1} \sim \psi_{\lambda+1}$. Однако согласно (26), (26')

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\lambda+1}, \psi_{\lambda+1} \rangle &= [\lambda + 1]_c \langle \psi_\lambda, \psi_\lambda \rangle, \\ \langle \psi'_{\lambda+1}, \psi'_{\lambda+1} \rangle &= [\lambda + 1]_{c'} \langle \psi_\lambda, \psi_\lambda \rangle. \end{aligned}$$

Условие $\psi'_{\lambda+1} \sim \psi_{\lambda+1}$ означает, что векторы $\psi'_{\lambda+1}$ и $\psi_{\lambda+1}$ либо оба положительны, либо оба отрицательны. Требуемое условие доказано для $k = 1$. Для произвольного k оно вытекает из аналогичных соотношений. Если $q > 0$, $c > 0$, то из формул (29) – (30') следует, что условие (31) может быть выполнено, только если c и c' принадлежат одному и тому же интервалу I_k . Кроме того, легко увидеть, что соотношения (29) – (30') фиксируют тот интервал I_k , которому может принадлежать c .

5. НЕУНИТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ, ОТНОСИТЕЛЬНО КОТОРЫХ q -АЛГЕБРА ИНВАРИАНТНА, СЛУЧАЙ $q > 0$

Пусть операторы a, a^+ и N принадлежат q -алгебре (1), $q > 0$. Тогда в рассматриваемом пространстве существует набор других представлений этой алгебры. Новые представления могут быть получены с помощью следующих преобразований:

1. “Скейлинговые” преобразования. Если

$$a' = q^{\nu/2}a, \quad (a')^+ = q^{\nu/2}a^+, \quad N' = N - \nu, \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad (32)$$

то простое вычисление показывает, что $a', (a')^+$ и N' принадлежат q -алгебре так же, как a, a^+ и N . Согласно (26)

$$c' = q^{2\nu}c. \quad (33)$$

2. Преобразования, оставляющие N инвариантным. Пусть

$$a' = \varphi(N)a, \quad (a')^+ = a^+ \varphi(N). \quad (34)$$

Тогда a' , $(a')^+$ и N принадлежат q -алгебре, если (см. (26))

$$(a')^+ a' = [N]_{c'}, \quad a' (a')^+ = [N + 1]_{c'}.$$

Следовательно, согласно (34)

$$\begin{aligned} [N + 1]_{c'} &= \varphi(N) a a^+ \varphi(N) = \varphi^2(N) [N + 1]_c, \\ \varphi(N) &= \left(\frac{[N + 1]_{c'}}{[N + 1]_c} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (35)$$

Из формул (34) следует, что $\varphi(N) = \varphi^+(N)$. Поскольку

$$\varphi(N) \varphi^+(N) \psi_{\lambda+k} = \varphi(\lambda + k) \varphi^*(\lambda + k) \psi_{\lambda+k},$$

то формула (35) справедлива, если выполнено условие (31). Согласно проведенному в конце предыдущего раздела анализу, это условие выполняется при произвольном $c < 0$. При $c > 0$ условие (31) будет выполнено, когда c и c' принадлежат одному и тому же I_k .

Если в J существует некоторое представление q -алгебры, то, используя преобразования (32) и (34), мы можем построить любое представление с тем же знаком c и тем же видом спектра N (неограниченного или ограниченного сверху (или снизу)).

Действительно, если в заданном представлении a , a^+ , N соответствующее $c > 0$ и $c \neq c_k$ (спектр N неограничен), то, используя преобразование (32), мы всегда можем прийти к представлению a' , $(a')^+$, N' с произвольным неограниченным спектром N' и c' , принадлежащим любому интервалу I_k . Затем с помощью преобразования (34) мы можем связать это представление с представлением a'' , $(a'')^+$, $N'' = N'$, где c'' — любая константа, принадлежащая интервалу I_k . Если $c = c_k$ и $\text{Sp } N$ ограничен сверху (снизу), то с помощью преобразования (32) мы можем прийти к любому представлению a' , $(a')^+$, N' , где N' ограничен сверху (снизу). Аналогично мы можем связать любое заданное представление a , a^+ , N при $c < 0$ с произвольным представлением a' , $(a')^+$, N' , если только $c' < 0$.

Таким образом, когда $q > 0$, два произвольных представления q -алгебры связаны комбинацией унитарного и неунитарного преобразований, описанных выше, если только знаки соответствующих констант и типы спектров соответствующих операторов совпадают.

6. НЕУНИТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ОТНОСИТЕЛЬНО КОТОРЫХ q -АЛГЕБРА ИНВАРИАНТНА, СЛУЧАЙ $q < 0$

При $q = -\tilde{q}$, $\tilde{q} > 0$ мы рассмотрим только случай $\tilde{q} \neq 1$, т.к. случай $\tilde{q} = 1$ может быть исследован аналогично.

Согласно (26'') условие (27) принимает вид

$$c_k = \tilde{q}^{-2(\lambda+k)}. \quad (27'')$$

Напомним, что $\text{Sp } N$ состоит из целых чисел (см. раздел 4).

Преобразование (32) справедливо теперь, только если $\nu = 2l$, $l \in \mathbf{Z}$, следовательно,

$$N' = N - 2l, \quad c' = q^{4l}c. \quad (32')$$

Преобразование (34) остается неизменным. Как и раньше, оно возможно, только если s и c' принадлежат одному и тому же интервалу I_k (см. (28), (28')). Однако теперь аналогичные условия формулируются для $\tilde{q}$.

Рассмотрим отдельно случаи $s > 0$ и $s < 0$.

1а. $s > 0$, $s \neq c_k$. Начиная с некоторого представления q -алгебры мы можем построить другие, используя преобразования (32') и (34). Разница со случаем, когда $q > 0$, состоит в том, что теперь мы можем связать два представления a, a^+, N, s и $a', (a')^+, N', c'$, только если $s \in I_{2k}$ и $c' \in I_{2l}$ или $s \in I_{2k+1}$ и $c' \in I_{2k+1}$.

1б. $s > 0$, $s = c_k$. В этом случае, если $s \in I_{2k}(I_{2k+1})$ и $c' \in I_{2l}(I_{2l+1})$, соответствующие представления могут быть связаны преобразованием (32').

2. $s < 0$. При этом знак $[l]_c$ не зависит от s . Если $\tilde{q} > 1$, то $[l]_c > 0$. Если $\tilde{q} < 1$, то $[l]_c < 0$. Заданное представление a, a^+, N, s может быть связано с любым представлением $a', (a')^+, N, c'$ преобразованием (34), если только $c' < 0$.

Нам осталось рассмотреть свойства q -алгебры при $q \in \mathbb{C}$. В приложении показано, что тогда $q = \exp(i\varphi)$, $\varphi \in \mathbb{R}$, $s = 1$. Очевидно, что здесь преобразование (32) тривиально. Следовательно, мы можем рассмотреть только вид спектра N . Напомним, что в гильбертовом пространстве этот спектр всегда конечен и только выделенные значения φ возможны, точнее, $q = \sqrt[n]{-1}$. В пространстве с индефинитной метрикой все значения φ возможны и спектр N может быть ограничен, полуограничен или неограничен. Используя формулы (17') и (18'), легко получить связь между φ и видом спектра оператора N (см. приложение).

7. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПРЕДСТАВЛЕНИЯМИ q -АЛГЕБРЫ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ q

Покажем, что существование в пространстве J представления q -алгебры влечет за собой существование представлений аналогичной алгебры, но отвечающей другому значению q : $q \rightarrow q'$.

Как обычно, рассмотрим отдельно случаи $q > 0$ и $q < 0$.

1. $q > 0$. Пусть спектр N неограничен, т.е. $c(q) \neq c_k(q)$ и $c(q) > 0$. Докажем, что тогда существуют представления q' -алгебры при любом $q' > 0$ и любом $c(q') \neq c_k(q')$, если $c(q') > 0$.

Сначала найдем преобразование, переводящее q -алгебру в q' -алгебру в том случае, когда $q > 1$ ($q < 1$), $q' > 1$ ($q' < 1$).

Пусть $c(q) \in I_k(q)$. Выберем $c(q')$ таким образом, чтобы $c(q') \in I_k(q')$. Согласно результатам раздела 5 знаки величин $[\lambda + l]_{c,q}$ и $[\lambda + l]_{c',q'}$ совпадают при всех l , если $q > 1$, $q' > 1$ или $q < 1$, $q' < 1$. Поэтому оператор $\varphi_{q,q'}(N) = [N + 1]_{c,q}/[N + 1]_{c',q'}$ хорошо определен. Проведя те же рассуждения, что и при выводе формулы (34), получим, что операторы N и

$$a(q') = \varphi_{q,q'}(N)a(q), \quad (36)$$

$$a^+(q') = a^+(q)\varphi_{q,q'}(N) \quad (36')$$

удовлетворяют q' -алгебре. Далее, применяя к q' -алгебре преобразования (32), (34), получим произвольное представление этой алгебры при $c(q') > 0$, $c(q') \neq c_k(q')$. Осталось установить связь между операторами q - и q' -алгебр, если $q > 1$, $q' < 1$ или наоборот.

Согласно (32) произвольное представление, для которого $c(q') > 0$, можно связать с представлением, в котором $c(q) = 1$. Однако, если $c(q) = 1$, то согласно (26) $[N]_q = [N]_{q^{-1}}$ и соответствующие операторы $a(q)$, $a^+(q)$, N удовлетворяют не только q -алгебре, но и q^{-1} -алгебре. Далее к q^{-1} -алгебре можно применить рассуждения, проведенные для q -алгебры. Сделанное утверждение полностью доказано.

Если $c(q) = c_k(q)$, то с помощью преобразования (32) перейдем к представлению, в котором $c = 1$. В этом случае есть две возможности: $\text{Sp } N = \mathbb{N}$ и $\text{Sp } N = \mathbb{Z}_-$. Согласно (26) в первом случае все $[l]_{1,q} > 0$, во втором все $[l]_{1,q} < 0$. Поскольку эти неравенства не зависят от q , то и в первом, и во втором случаях существует преобразование, аналогичное (36), если $c' \in c_l(q')$.

Осталось рассмотреть случай $c(q) < 0$. В этом случае, если $q < 1$, то все $[\lambda + l]_{q,c} > 0$; если $q > 1$, то все $[\lambda + l]_{q,c} < 0$. Преобразование (36) существует, если $q > 1$ и $q' > 1$ или $q < 1$ и $q' < 1$, при этом $c(q') < 0$.

2. $q < 0$. Ограничимся рассмотрением случая $q \neq -1$. Пусть $c \neq c_k$, $c > 0$. Согласно результатам раздела 5 представления распадаются на два класса: $c \in I_{2k}$ и $c \in I_{2k+1}$. Преобразования (32), (34) существуют только для представлений, принадлежащих одному и тому же классу. Соответственно из существования q -алгебры определенного класса ($c \in I_{2k}$ или $c \in I_{2k+1}$) следует существование q' -алгебры того же класса. При этом $q' > 1$, если $q > 1$, или $q' < 1$, если $q < 1$.

Если $c \in c_{2k}$ или $c \in c_{2k+1}$, то мы приходим к тем же результатам. В случае, если $c \in c_{2k}$, с помощью преобразования (32') можно получить представление с $c = 1$, которое, как и при $q > 0$, является одновременно представлением q - и q^{-1} -алгебры.

8. ОБЩЕЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РАССМАТРИВАЕМЫХ АЛГЕБР В СЛУЧАЕ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА ОПЕРАТОРА N

В этом разделе мы покажем, что если оператор N имеет дискретный спектр и каждому собственному значению оператора N соответствует неприводимое представление алгебры, заданной соотношениями (2) и (3), построенное описанным в разделе 3 способом, то произвольное представление рассматриваемых алгебр есть прямая сумма представлений, описанных в разделе 3.

Действительно, если $\psi_{\lambda_1}^1$ — собственный вектор оператора N , то неприводимое представление рассматриваемой алгебры можно построить так же, как в разделе 3.

Обозначим соответствующее пространство через J_1 . Если $J \neq J_1$, то рассмотрим пространство $J - J_1$, в этом пространстве выделим собственный вектор $\psi_{\lambda_1}^2$ (или $\psi_{\lambda_2}^1$, если собственному значению λ_1 соответствует один собственный вектор) и построим неприводимое представление, соответствующее этому вектору. Продолжая этот процесс, получим $J \supset J_1 + J_2 + \dots$. Докажем, что в действительности

$$J = J_1 + J_2 + \dots \quad (37)$$

Для этого заметим, что множество пространств J_i может быть частично упорядочено естественным образом по включению: $J_i \subset J^i$, где $J^i = \sum_{k=1}^i J_k$. Согласно лемме

Порна такое множество имеет максимальный элемент $J^{\max}$. Однако если $J \neq J^{\max}$, то в пространстве $J - J^{\max}$ у оператора N должен быть собственный вектор и, следовательно, обычным образом можно построить пространство $\tilde{J}$, соответствующее этому вектору. Пространство $J^{\max} + \tilde{J}$, очевидно, принадлежит системе пространств J_i , и включение $J^{\max} \subset J^{\max} + \tilde{J}$ находится в противоречии с определением $J^{\max}$. Следовательно, $J^{\max} = J$ и равенство (37) доказано. Полученное разложение фактически является частным случаем разложения общего представления некоторой алгебры на ее циклические представления [16, с. 286].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Как известно, в случае положительной метрики, если $q \in \mathbb{C}$, то $\text{Sp } N$ конечен, а соответствующие представления существуют только при выделенных значениях q , а именно, $q = \sqrt[n]{-1}$.

В случае индефинитной метрики набор различных представлений намного шире: φ может быть любым ($q = e^{i\varphi}$), и спектр N может быть любого типа, т.е. неограниченным, полуограниченным снизу (сверху) или ограниченным.

Прежде всего докажем, что для индефинитной метрики, так же как и для положительной метрики, $|q| = 1$ (согласно (27)), в противном случае $\text{Sp } N$ или неограничен или полуограничен. Предполагая, что спектр N неограничен сверху, рассмотрим (26) при $n \rightarrow \infty$. Простые выкладки показывают, что условие $(a^+a)^+ = a^+a$ не может быть выполнено, если $|q| \neq 1$. Случай неограниченного снизу спектра N рассматривается аналогично.

Для вывода равенства $c = 1$ достаточно записать c в виде $c = 1 + c'(q - q^{-1})$ и заметить, что в данном случае условие $N = N^+$ эквивалентно условию самосопряженности оператора $c'e^{iN\varphi}$, которое выполнено, если только $c' = 0$.

Итак, доказано, что $q = e^{i\varphi}$, $0 < \varphi < 2\pi$. Ниже мы считаем, что $0 < \varphi < \pi$, поскольку случай $\pi < \varphi < 2\pi$ рассматривается аналогично. Для конкретности пусть $-1 < \lambda < 1$ (см. (4)). Общий случай легко может быть проанализирован тем же способом. Заметим, что если $\lambda \neq 0$, то метрика всегда индефинитна. Действительно, если $\lambda > 0$, то $[\lambda] > 0$, а $[\lambda - 1] < 0$; если $\lambda < 0$, то $[\lambda] < 0$, $[\lambda + 1] > 0$.

Элементарные выкладки показывают, что спектр N ограничен сверху, если

$$\varphi = \frac{n_1\pi}{\lambda + m_1}, \quad n_1, m_1 \in \mathbf{Z}^+, \quad (\text{П.1})$$

снизу, если

$$\varphi = \frac{n_2\pi}{m_2 - \lambda}, \quad n_2, m_2 \in \mathbf{Z}^+, \quad (\text{П.2})$$

и содержит конечное число собственных векторов, если равенства (П.1) и (П.2) справедливы одновременно. В этом случае

$$\lambda = \frac{n_1m_2 - m_1n_2}{n_1 + n_2}.$$

В остальных случаях спектр N неограничен.

Список литературы

- [1] *L. D. Faddeev*. Integrable models in $(1+1)$ -dimensional quantum field theory. In: Les Houches Lectures. Amsterdam: Elsevier, 1982. P. 563.
- [2] *P. P. Kulish, E. K. Sklyanin*. In: Lectures Notes in Physics. V. 151. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1981. P. 61.
- [3] *M. Jimbo*. Int. J. Mod. Phys. 1989. V. 4. P. 3759.
- [4] *M. Chaichian, P. P. Kulish*. Phys. Lett. B. 1990. V. 234. P. 72.
- [5] *P. P. Kulish, E. V. Damaskinsky*. J. Phys. A: Math. Gen. 1990. V. 23. P. L415.
- [6] *П. П. Кулиш*. ТМФ. 1991. Т. 86. С. 157.
- [7] *A. Kempf*. J. Math. Phys. 1993. V. 34. P. 969.
- [8] *A. A. Andrianov, F. Cannata, J.-P. Dedonder, M. V. Ioffe*. Phys. Lett. A. 1996. V. 217. P. 7.
- [9] *M. Chaichian, M. N. Mnatsakanova, Yu. S. Vernov*. In: Proc. of the XV Workshop "Problems on High Energy Physics and Field Theory" (Protvino, 1992). Protvino: IHEP, 1995. P. 126; *M. N. Mnatsakanova, Yu. S. Vernov*. In: Proc. of the XVIII Workshop "Problems on High Energy Physics and Field Theory". Protvino: IHEP, 1996. P. 337.
- [10] *M. Chaichian, M. N. Mnatsakanova, Yu. S. Vernov*. J. Phys. A: Math. Gen. 1994. V. 27. P. 2053.
- [11] *I. Ya. Aref'eva*. Quantum Group Gauge Fields. Preprint CERN-TH.6207/91. Geneva: CERN, 1991.
- [12] *F. Strocchi, A. S. Wightman*. J. Math. Phys. 1974. V. 15. P. 2198.
- [13] *F. Strocchi*. Selected Topics on the General Properties of Quantum Field Theory. Singapore: World Scientific, 1993.
- [14] *G. Morchio, F. Strocchi*. Ann. Inst. Henri Poincaré. 1980. V. 33. P. 251.
- [15] *C. R. Putnam*. Commutation Properties of Hilbert Space Operators and Related Topics. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1967.
- [16] *М. А. Наймарк*. Нормированные кольца. М.: Наука, 1968.
- [17] *J. Bognar*. Indefinite Inner-Product Spaces. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1974.
- [18] *Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов*. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М.: Наука, 1986.
- [19] *M. Mnatsakanova, G. Morchio, F. Strocchi, Yu. Vernov*. Irreducible representations of the Heisenberg algebra in Krein spaces. Preprint IFUP-TH-95. Pisa: INFN, 1995.

Поступила в редакцию 26.III.1997 г.,
после доработки 19.VI.1997 г.

Yu. S. Vernov, M. N. Mnatsakanova

**ALGEBRA OF q -DEFORMED COMMUTATORS
IN AN INDEFINITE METRIC SPACE**

Representations and invariant properties of q -deformed commutator algebra and its generalization are investigated in an indefinite metric space.