Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Веденяпин, О. В. Мингалев, И. В. Мингалев, Представления общих соотношений коммутации, *ТМФ*, 1997, том 113, номер 3, 369–383

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1086>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 12:23:58

В. В. Веденяпин*, О. В. Мингалев†, И. В. Мингалев†

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОБЩИХ СООТНОШЕНИЙ КОММУТАЦИИ

Рассматриваются общие соотношения коммутации, в которых фигурируют оператор рождения, оператор уничтожения и, возможно, оператор числа частиц. Такие соотношения коммутации возникают, в частности, в связи с нестандартными скобками Пуассона. Для этих соотношений изучается задача о построении неприводимых представлений, в которых оператор, равный произведению операторов рождения и уничтожения, имеет в пространстве представления ортонормированный базис из собственных векторов.

Построены все возможные типы неприводимых представлений из указанного класса. Доказано, что все неприводимые представления из рассматриваемого класса, в которых фигурирует оператор числа частиц, сводятся к представлениям одного из четырех построенных типов. Доказано, что все неприводимые представления из рассматриваемого класса, в которых оператор числа частиц отсутствует, при дополнительных условиях сводятся к представлениям одного из пяти построенных типов.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматриваются две формы общих соотношений коммутации. В первой форме соотношений фигурируют сопряженные друг другу операторы рождения и уничтожения $\hat{A}^+$ и $\hat{A}^-$, а также самосопряженный оператор $\hat{S}$, который удовлетворяет соотношениям $[\hat{S}, \hat{A}^\pm] = \pm \hat{A}^\pm$, где $[a, b] \stackrel{\text{def}}{=} ab - ba$ — коммутатор. Такой оператор принято называть оператором типа числа частиц. Отметим, что из этих соотношений следует, что $\hat{S}$ коммутирует с операторами $\hat{A}^\pm \hat{A}^\mp$: $[\hat{S}, \hat{A}^\pm \hat{A}^\mp] = 0$.

Соотношения в первой форме формально можно записать в виде

$$\hat{A}^- \hat{A}^+ = F(\hat{A}^+ \hat{A}^-, \hat{S}), \quad [\hat{S}, \hat{A}^\pm] = \pm \hat{A}^\pm, \quad (1)$$

где $F(x, y)$ — некоторая функция из $R_+ \times R$ со значениями в R , а $R_+ \stackrel{\text{def}}{=} [0, +\infty)$ — множество неотрицательных чисел. Для строгой интерпретации соотношений (1) в случае, когда функция $F(x, y)$ не является полиномом от своих аргументов, необходимо определить, в каком смысле выполняется соотношение $\hat{A}^- \hat{A}^+ = F(\hat{A}^+ \hat{A}^-, \hat{S})$ в пространстве представления.

*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия. E-mail: vicveden@kiam.ru

†Полярный геофизический институт, Кольский научный центр РАН, г. Апатиты, Мурманская область, Россия

Вторая форма соотношений имеет вид

$$\hat{a}^- \hat{a}^+ = f(\hat{a}^+ \hat{a}^-), \quad (2)$$

и в ней фигурируют сопряженные друг другу операторы рождения $\hat{a}^+$ и уничтожения $\hat{a}^-$. Оператор числа частиц здесь в явном виде отсутствует, $f(t)$ – некоторая функция из R_+ со значениями в R_+ , а оператор $f(\hat{a}^+ \hat{a}^-)$ понимается как функция самосопряженного оператора $\hat{a}^+ \hat{a}^-$ (см. определение 2).

Частные случаи соотношений в формах (1) и (2) рассматривались многими авторами, и им посвящена обширная литература [1–36]. Наиболее общей формой соотношений (1) из рассматривавшихся до настоящего времени является приведенная в работе [17] форма

$$[\hat{A}^+, \hat{A}^-] = g(\hat{S}), \quad [\hat{S}, \hat{A}^\pm] = \pm \hat{A}^\pm,$$

где $g(t)$ – аналитическая функция от t на R со значениями в R . Эти соотношения можно переписать в виде

$$\hat{A}^- \hat{A}^+ = \hat{A}^+ \hat{A}^- - g(\hat{S}), \quad [\hat{S}, \hat{A}^\pm] = \pm \hat{A}^\pm.$$

Типичным примером соотношений этого типа является алгебра $SU(2)$, определяемая равенствами $\hat{A}^- \hat{A}^+ = \hat{A}^+ \hat{A}^- - 2\hat{S}$, $[\hat{S}, \hat{A}^\pm] = \pm \hat{A}^\pm$.

В физических приложениях интерес представляют следующие классы неприводимых представлений соотношений вида (1) и (2).

Через класс I обозначим класс неприводимых представлений соотношений вида (1), в которых в пространстве представления существует ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\hat{S}$.

Через класс II обозначим класс неприводимых представлений соотношений вида (2), в которых в пространстве представления существует ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\hat{a}^+ \hat{a}^-$.

Основные результаты работы можно кратко сформулировать следующим образом.

1. Найден 4 типа неприводимых представлений соотношений вида (1) из класса I. Доказано, что любое неприводимое представление из класса I изоморфно представлению одного из четырех построенных типов.

2. Найден 5 типов неприводимых представлений соотношений вида (2) из класса II. Доказано, что все неприводимые представления из класса II при дополнительных условиях изоморфны представлению одного из пяти найденных типов.

План работы следующий. В разделе 2 определяются и строятся неприводимые представления соотношений в формах (1) и (2). В разделе 3 доказываются классификационные теоремы.

2. НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СООТНОШЕНИЙ ВИДА (1) И (2)

Перейдем к точным формулировкам.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть E есть конечномерное евклидово или сепарабельное гильбертово пространство, вещественное или комплексное, а $\hat{A}^-$, $\hat{A}^+$, $\hat{S}$ – действующие в E линейные операторы. Пространство E вместе с операторами $\hat{A}^+$, $\hat{A}^-$, $\hat{S}$ будем называть

представлением соотношений (1) для функции $F(x, y)$ и обозначать через $\{E, \hat{S}, \hat{A}^\pm, F\}$, если выполнены следующие условия:

- 1) оператор $\hat{S}$ самосопряжен, а $\hat{A}^-$ и $\hat{A}^+$ сопряжены друг другу;
- 2) выполнены соотношения $[\hat{S}, \hat{A}^\pm] = \pm \hat{A}^\pm$;
- 3) соотношение $A^- A^+ = F(A^+ A^-, S)$ выполнено в следующем спектральном смысле: существует вещественная функция $h(t)$, для которой справедливы равенства

$$\hat{A}^+ \hat{A}^- = h(\hat{S}), \quad \text{т.е.} \quad \hat{A}^+ \hat{A}^- = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) d\hat{P}_S(t), \quad (3)$$

$$\hat{A}^- \hat{A}^+ = F(h(\hat{S}), \hat{S}), \quad \text{т.е.} \quad \hat{A}^- \hat{A}^+ = \int_{-\infty}^{+\infty} F(h(t), t) d\hat{P}_S(t), \quad (4)$$

где $\hat{P}_S(t)$ – разложение единицы (спектральная функция) самосопряженного оператора $\hat{S}$ (см. [37, 38]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть E есть конечномерное евклидово или сепарабельное гильбертово пространство, вещественное или комплексное, а $\hat{a}^-, \hat{a}^+$ – действующие в E линейные операторы. Пространство E вместе с операторами $\hat{a}^+, \hat{a}^-$ будем называть представлением соотношения (2) для функции $f(x)$ и обозначать через $\{E, \hat{a}^\pm, f\}$, если выполнены следующие условия:

- 1) операторы $\hat{a}^-$ и $\hat{a}^+$ сопряжены друг другу;
- 2) соотношение (2) выполнено в спектральном смысле [37, 38]:

$$\hat{a}^- \hat{a}^+ = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) d\hat{P}(t), \quad (5)$$

где $\hat{P}(t)$ – разложение единицы самосопряженного оператора $\hat{a}^+ \hat{a}^-$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Представление соотношений (1) или (2) назовем неприводимым, если действующий в пространстве представления линейный ограниченный оператор $\hat{B}$ перестановочен со всеми операторами представления в том и только том случае, когда он кратен единичному оператору $\hat{I}$: $\hat{B} = b\hat{I}$, где b – некоторое число.

В случае бесконечномерного представления из класса I или II в сепарабельном гильбертовом пространстве соотношения (1) или (2) выполнены в том же смысле, что и в случае конечномерного представления, т.е. на векторах ортонормированного базиса из собственных векторов оператора $\hat{S}$ или $\hat{a}^+ \hat{a}^-$, соответственно.

Отметим, что определение 3 равносильно отсутствию в неприводимом представлении подпространств (отличных от нулевого и всего пространства), которые были бы инвариантны относительно всех операторов представления.

Представления из класса I строятся следующим образом. Пусть функция $F(x, y)$ и два числа $\nu \in R$ и $x_0 \geq 0$ определяют последовательность неотрицательных чисел $\{x_n\}$ по правилу

$$x_{n+1} = F(x_n, \nu + n) \quad (6)$$

для некоторого множества чисел n , которое обозначим через $Z(F, \nu, x_0)$.

Пусть евклидово пространство E имеет размерность, равную числу элементов в $Z(F, \nu, x_0)$. Пусть векторы $\{\mathbf{h}_n, n \in Z(F, \nu, x_0)\}$ образуют ортонормированный базис в E . Тогда, определяя в E операторы $\hat{S}, \hat{A}^\pm$ формулами

$$\hat{A}^- \mathbf{h}_n = \sqrt{x_n} \mathbf{h}_{n-1}, \quad \hat{A}^+ \mathbf{h}_n = \sqrt{x_{n+1}} \mathbf{h}_{n+1}, \quad \hat{S} \mathbf{h}_n = (\nu + n) \mathbf{h}_n$$

для $n \in Z(F, \nu, x_0)$, получим представление соотношений (1) в пространстве E . Возможны только следующие 4 варианта поведения последовательности (6).

1. Последовательность (6) начинается с нуля, неотрицательна и заканчивается нулем:

$$x_0 = 0, \quad x_1 > 0, \dots, x_m > 0, \quad x_m = 0 \quad (m \geq 2).$$

Тогда можно построить представления в пространстве R^m или C^m . Такие представления рассматриваются в лемме 1. Они аналогичны представлениям алгебры $SU(2)$, и их принято называть парафермионными (см. [19, 20]).

2. Последовательность (6) начинается с нуля, затем все следующие числа положительны:

$$x_0 = 0, \quad x_n > 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Тогда можно построить представления в пространстве l_2 . Такие представления рассматриваются в лемме 3. Они являются аналогами представлений алгебры Гейзенберга и рассматривались во многих работах (см., например, [3–5, 7–9, 17]). Этот тип представлений условно можно назвать бозонным.

3. Последовательность (6) начинается с нуля, но индекс n пробегает все отрицательные числа, при этом все элементы последовательности, кроме первого, положительны:

$$x_0 = 0, \quad x_{-1} > 0, \quad x_{-2} > 0, \dots$$

Тогда можно построить представления в пространстве l_2 . Такие представления условно можно назвать антибозонными. Они рассматриваются в лемме 5. Пример такого представления имеется в работе [17].

4. В последовательности (6) индекс n пробегает все целые числа, а все элементы последовательности положительны:

$$x_n > 0, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Тогда можно построить представления в пространстве l_2 . Такие представления условно можно назвать двусторонними. Они рассматриваются в лемме 4. Примеры использования таких представлений авторам неизвестны.

Представления из класса II строятся аналогично представлениям из класса I. Пусть функция $f(y)$ и число $y_0 \geq 0$ определяют последовательность неотрицательных чисел $\{y_n\}$ по правилу

$$y_{n+1} = f(y_n) \tag{7}$$

для некоторого множества чисел n , обозначим его через $Z(f, y_0)$.

Пусть евклидово пространство E имеет размерность, равную числу элементов в $Z(f, y_0)$. Пусть векторы $\{\mathbf{h}_n, n \in Z(f, y_0)\}$ образуют ортонормированный базис в E . Тогда, определяя в E операторы $\hat{a}^\pm$ формулами

$$\hat{a}^- \mathbf{h}_n = \sqrt{y_n} \mathbf{h}_{n-1}, \quad \hat{a}^+ \mathbf{h}_n = \sqrt{y_{n+1}} \mathbf{h}_{n+1}$$

для $n \in Z(f, y_0)$, получим представление соотношения (2) в пространстве E .

В отличие от соотношений вида (1) для соотношений вида (2) имеются 5 типов неприводимых представлений. Первые 4 типа полностью аналогичны перечисленным выше для соотношений вида (1). Отметим, что в представлениях этих типов можно ввести оператор числа частиц, т.е. существует действующий в E линейный оператор $\hat{N}$, удовлетворяющий соотношениям коммутации $[\hat{N}, \hat{a}^\pm] = \pm \hat{a}^\pm$. Пятый тип состоит из конечномерных представлений размерности $m \geq 2$, в которых ядра операторов $\hat{a}^-$, $\hat{a}^+$ равны нулю, а последовательность (4) положительна и периодична с наименьшим периодом m :

$$y_n > 0, \quad \text{числа } y_0, y_1, \dots, y_{m-1} \text{ различны и } y_0 = y_m.$$

В представлениях этого типа оператор числа частиц не может быть введен.

Рассмотрим представления в пространствах R^m , C^m и l_2 . Введем для этих пространств следующие обозначения, которые согласуются с принятыми в методе вторичного квантования. Обозначим через $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ скалярное произведение в этих пространствах. Стандартный ортонормированный базис в пространствах R^m и C^m обозначим через

$$|n\rangle = (\delta_{n+1}^1, \dots, \delta_{n+1}^m), \quad n = 0, 1, \dots, m-1,$$

а в пространстве l_2 – через

$$|n\rangle = (\delta_{n+1}^1, \delta_{n+1}^2, \delta_{n+1}^3, \dots), \quad n \in \mathbf{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\},$$

где δ_k^i – символ Кронекера.

ЛЕММА 1. Пусть функция $F(x, y)$ такова, что при $x_0 = 0$ существует число $\nu \in R$, при котором в последовательности (6) элементы $x_1 > 0, \dots, x_{m-1} > 0$, а $x_m = 0$. Тогда существует неприводимое представление соотношений (1) в пространстве R^m или C^m , в котором операторы $\hat{A}^\pm$, $\hat{S}$ действуют на векторы стандартного базиса по формулам

$$\begin{aligned} \hat{A}^- |0\rangle &= \hat{A}^+ |m-1\rangle = 0, \\ \hat{A}^+ |n\rangle &= \sqrt{x_{n+1}} |n+1\rangle, \\ \hat{A}^- |n\rangle &= \sqrt{x_n} |n-1\rangle, \quad \hat{S} |n\rangle = (\nu + n) |n\rangle \end{aligned} \tag{8}$$

при $n = 0, 1, \dots, m-1$; здесь $Z(F, \nu, 0) = \{0, 1, \dots, m-1\}$. Такие представления будем называть парафермионными для соотношений (1).

ЛЕММА 2. Пусть функция $f(x)$ такова, что при $y_0 = 0$ в последовательности (7) $y_1 > 0, \dots, y_{m-1} > 0$, а $y_m = 0$. Тогда существует неприводимое представление соотношения (2) в пространстве R^m или C^m , в котором операторы $\hat{a}^+, \hat{a}^-$ действуют на векторы стандартного базиса по формулам

$$\begin{aligned}\hat{a}^-|0\rangle &= \hat{a}^+|m-1\rangle = 0, \\ \hat{a}^-|n\rangle &= \sqrt{y_n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{y_{n+1}}|n+1\rangle\end{aligned}\quad (9)$$

при $n = 0, 1, \dots, m-1$; здесь $Z(f, 0) = \{0, 1, \dots, m-1\}$. Такие представления будем называть парафермионными для соотношений (2).

Доказательство леммы 1 и следующих ниже лемм 3–9 полностью аналогично доказательству леммы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Тот факт, что определяемые формулами (9) операторы дают представления соотношения (2), устанавливается прямой проверкой. Докажем неприводимость этого представления.

Пусть линейный оператор $\hat{B}$ перестановочен с операторами $\hat{a}^+, \hat{a}^-$. Отметим, что из формул (9) следует, что ядро оператора $\hat{a}^-$ 1-мерно и натянуто на вектор $|0\rangle$. Тогда из равенств

$$\hat{a}^- \hat{B}|0\rangle = \hat{B} \hat{a}^-|0\rangle = 0$$

и 1-мерности ядра оператора $\hat{a}^-$ следует, что

$$\hat{B}|0\rangle = b_0|0\rangle,$$

где b_0 – число. Отсюда в свою очередь следует, что

$$\hat{B}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{y_1}} \hat{B} \hat{a}^+|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{y_1}} \hat{a}^+ \hat{B}|0\rangle = \frac{b_0}{\sqrt{y_1}} \hat{a}^+|0\rangle = b_0|1\rangle.$$

Этим доказано, что $\hat{B}|1\rangle = b_0|1\rangle$. Далее индукцией по n доказываем, что

$$\hat{B}|n+1\rangle = \frac{\hat{B} \hat{a}^+|n\rangle}{\sqrt{y_{n+1}}} = \frac{\hat{a}^+ \hat{B}|n\rangle}{\sqrt{y_{n+1}}} = \frac{b_0 \hat{a}^+|n\rangle}{\sqrt{y_{n+1}}} = b_0|n+1\rangle$$

для $n = 0, 1, \dots, m-2$. Отсюда следует, что $\hat{B} = b_0 \hat{I}$. Неприводимость представления доказана.

Примеры представлений фермионного типа.

1. Фермионы: $f(t) = 1 - t$, $y_0 = y_2 = 0$, $y_1 = 1$.

2. Алгебра $SU(2)$: $F(s, t) = s - 2t$, $x_0 = 0$, $x_n = -n(2\nu + n - 1)$. Имеется неприводимое представление в каждом пространстве R^m или C^m : $\nu = -(m-1)/2$, $x_n = n(m-n)$, $n = 0, 1, \dots, m-1$.

ЛЕММА 3. Пусть функция $F(x, y)$ такова, что при $x_0 = 0$ существует число $\nu \in R$, при котором в последовательности (6) для всех $n > 0$ элементы $x_n > 0$. Тогда существует неприводимое представление соотношений (1) в пространстве l_2 , в котором операторы $\hat{A}^\pm, \hat{S}$ определены формулами $\hat{A}^-|0\rangle = 0$ и (8) для $n \in \mathbf{Z}_+$; здесь $Z(F, \nu, 0) = \mathbf{Z}_+$. Этот тип представлений назовем бозонным.

ЛЕММА 4. Пусть функция $f(t)$ такова, что в последовательности (7) при $y_0 = 0$ для всех $n > 0$ элементы $y_n > 0$. Тогда существует неприводимое представление соотношения (2) в пространстве l_2 , в котором $Z(f, 0) = \mathbf{Z}_+$, а операторы $\hat{a}^+$, $\hat{a}^-$ действуют на векторы стандартного базиса так: $\hat{a}^-|0\rangle = 0$, и для $n \in \mathbf{Z}_+$ выполнены формулы (9). Этот тип представлений также назовем бозонным.

Примеры представлений бозонного типа.

1. Алгебра Гейзенберга: $f(t) = 1 + t$, $y_0 = 0$, $y_n = n$, $n \in \mathbf{N}$.
2. q -Деформация алгебры Гейзенберга: $f(t) = 1 + qt$, $q > -1$, $q \neq 0$, $q \neq 1$. Здесь $y_0 = 0$, $y_n = (q^n - 1)/(q - 1)$, $n \in \mathbf{N}$.
3. Свободная алгебра: $f(t) = 1$, $y_0 = 0$, $y_n = 1$, $n \in \mathbf{N}$.
4. $f(t) = 1 + \sin(\pi t/2)$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 1, \dots, y_{2n-1} = 1$, $y_{2n} = 2$.

ЛЕММА 5. Пусть функция $F(s, t)$ такова, что в последовательности (6) при $x_0 = 0$ и некотором $\nu \in R$ индекс n пробегает только целые отрицательные числа и для $n > 0$ все элементы $x_{-n} > 0$. Тогда существует неприводимое представление соотношений (1) в пространстве l_2 , в котором операторы $\hat{A}^\pm$, $\hat{S}$ действуют по формулам

$$\begin{aligned}\hat{A}^+|0\rangle &= 0, & \hat{A}^+|n\rangle &= \sqrt{x_{-n}}|n-1\rangle, \\ \hat{A}^-|n\rangle &= \sqrt{x_{-(n+1)}}|n+1\rangle, & \hat{S}|n\rangle &= (\nu - 1 - n)|n\rangle\end{aligned}$$

при $n \in \mathbf{Z}_+$; здесь $Z(F, \nu, 0) = \mathbf{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$. Этот тип представлений назовем антибозонным.

ЛЕММА 6. Пусть функция $f(t)$ такова, что в последовательности (7) при $y_0 = 0$ индекс n пробегает только целые отрицательные числа и для $n > 0$ все элементы $y_{-n} > 0$. Тогда в пространстве l_2 существует неприводимое представление соотношения (2), в котором операторы $\hat{a}^+$, $\hat{a}^-$ действуют по формулам

$$\hat{a}^+|0\rangle = 0, \quad \hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{y_{-n}}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^-|n\rangle = \sqrt{y_{-(n+1)}}|n+1\rangle$$

при $n \in \mathbf{Z}_+$; здесь $Z(f, 0) = \mathbf{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$. Этот тип представлений также назовем антибозонным.

Пример представления антибозонного типа дает функция из [17]: $f(x) = x - \alpha$, $\alpha > 0$. Тогда в l_2 существует неприводимое представление, в котором $y_{-n} = \alpha n$, $n \in \mathbf{Z}_+$.

ЛЕММА 7. Пусть функция $F(x, y)$ такова, что существуют числа $x_0 > 0$ и $\nu \in R$, при которых в последовательности (6) все элементы $x_n > 0$, $n \in \mathbf{Z}$. Тогда существует неприводимое представление соотношений (1) в пространстве l_2 , в котором $Z(F, \nu, x_0) = \mathbf{Z}$ и операторы $\hat{A}^-$, $\hat{A}^+$ и $\hat{S}$ действуют по формулам

$$\hat{A}^- \mathbf{g}_n = \sqrt{x_n} \mathbf{g}_{n-1}, \quad \hat{A}^+ \mathbf{g}_n = \sqrt{x_{n+1}} \mathbf{g}_{n+1}, \quad \hat{S} \mathbf{g}_n = (\nu + n) \mathbf{g}_n, \quad n \in \mathbf{Z},$$

где через $\mathbf{g}_n$ обозначены следующие векторы базиса:

$$\mathbf{g}_0 \stackrel{\text{def}}{=} |0\rangle, \quad \mathbf{g}_n \stackrel{\text{def}}{=} |2n-1\rangle, \quad \mathbf{g}_{-n} \stackrel{\text{def}}{=} |2n\rangle, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Этот тип представлений назовем двусторонним.

ЛЕММА 8. Пусть функция $f(t)$ такова, что существует последовательность (7), в которой индекс n пробегает все целые числа и все числа $y_n > 0$ различны и положительны. Тогда существует неприводимое представление соотношения (2) в пространстве l_2 , в котором операторы $\hat{a}^+$, $\hat{a}^-$ действуют по формулам

$$\hat{a}^- \mathbf{g}_n = \sqrt{y_n} \mathbf{g}_{n-1}, \quad \hat{a}^+ \mathbf{g}_n = \sqrt{y_{n+1}} \mathbf{g}_{n+1}, \quad n \in \mathbf{Z},$$

где $\mathbf{g}_n$ определены в лемме 7. Этот тип представлений также назовем *двусторонним*.

ЛЕММА 9. Пусть функция $f(x)$ такова, что при некотором $y_0 > 0$ последовательность (7) положительна и периодична с минимальным периодом $m \geq 1$ при $n \geq 0$: $y_n > 0$, $y_{n+m} = y_n$, $n \in \mathbf{Z}_+$. Тогда существует неприводимое представление $\{R^m(C^m), \hat{a}^\pm, f\}$ соотношения (2) из класса II в пространстве R^m или C^m , в котором операторы $\hat{a}^-$, $\hat{a}^+$ действуют на векторы стандартного базиса по формулам

$$\begin{aligned} \hat{a}^- |n\rangle &= \sqrt{y_n} |n-1\rangle, \quad n = 1, \dots, m-1, \\ \hat{a}^+ |n\rangle &= \sqrt{y_{n+1}} |n+1\rangle, \quad n = 0, 1, \dots, m-2, \\ \hat{a}^- |0\rangle &= e^{-i\varphi} \sqrt{y_0} |m-1\rangle, \quad \hat{a}^+ |m-1\rangle = e^{i\varphi} \sqrt{y_0} |0\rangle, \end{aligned}$$

где $\varphi \in [0; 2\pi]$ для представления в C^m и $\varphi = 0, \pi$ для представления в R^m ; здесь $Z(f, y_0) = \{0, 1, \dots, m-1\}$. Этот тип представлений назовем *циклическим*.

Следует отметить, что в циклических представлениях не существует линейного оператора $\hat{N}$, который удовлетворял бы соотношениям $[\hat{N}, \hat{a}^\pm] = \pm \hat{a}^\pm$, т.е. оператор числа частиц отсутствует.

Примеры циклических представлений.

1. $f(t) = 1 + \sin(\pi t/2)$, $y_0 = 1$, $y_1 = 2$, $y_{2n-1} = 2$, $y_{2n} = 1$.
2. $f(t) = at^2 - ((ac)^2 + 1)t/ac + c$, где числа $a, c > 0$ и $ac > 1$; $y_0 = (ac - 1)/a$, $y_1 = 1/(a^2c)$, $y_{2n} = (ac - 1)/a$, $y_{2n-1} = 1/(a^2c)$.

3. КЛАССИФИКАЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ

Покажем, что всякое неприводимое представление соотношений вида (1) из класса I изоморфно представлению одного из четырех типов, указанных в леммах 1, 3, 5, 7, а всякое неприводимое представление соотношения вида (2) из класса II изоморфно представлению одного из пяти типов, указанных в леммах 2, 4, 6, 8, 9.

Напомним определение изоморфизма представлений. Пусть линейные пространства E_1 и E_2 изоморфны и J — изоморфизм, переводящий E_1 в E_2 , а J^{-1} — обратное к J отображение. Пусть $\hat{B}_1$ — действующий в E_1 линейный оператор с областью определения $D(\hat{B}_1)$.

Обозначим через $J\hat{B}_1$ действующий в E_2 линейный оператор с областью определения $D(J\hat{B}_1) = J(D(\hat{B}_1))$, который задается правилом

$$J\hat{B}_1 \mathbf{y} = J(\hat{B}_1(J^{-1}\mathbf{y})) \quad \text{для } \mathbf{y} \in J(D(\hat{B}_1)).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Представления $\{E_1, \hat{S}_1, \hat{A}_1^\pm\}$ и $\{E_2, \hat{S}_2, \hat{A}_2^\pm\}$ изоморфны друг другу, если существует такой изоморфизм $J: E_1 \mapsto E_2$, при котором операторы $\hat{A}_1^\pm, \hat{S}_1$ переходят в операторы $\hat{A}_2^\pm, \hat{S}_2$, соответственно, т.е. $J\hat{S}_1 = \hat{S}_2, J\hat{A}_1^\pm = \hat{A}_2^\pm$.

Для соотношений вида (2) определение изоморфизма представлений полностью аналогично.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{E, \hat{S}, \hat{A}^\pm, F\}$ есть неприводимое представление соотношений (1) для функции F и в этом представлении оператор $\hat{S}$ имеет хотя бы один собственный вектор. Тогда представление $\{E, \hat{S}, \hat{A}^\pm, F\}$ принадлежит классу I и изоморфно представлению либо парафермионного типа (если ядра операторов $\hat{A}^-$ и $\hat{A}^+$ ненулевые), либо бозонного типа (если ядро оператора $\hat{A}^-$ ненулевое, а ядро оператора $\hat{A}^+$ нулевое), либо антибозонного типа (если ядро оператора $\hat{A}^-$ нулевое, а ядро оператора $\hat{A}^+$ ненулевое), либо двустороннего типа (если ядра операторов $\hat{A}^-$ и $\hat{A}^+$ нулевые).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим базис из собственных векторов оператора $\hat{A}^+\hat{A}^-$, а из соответствующих им собственных значений построим последовательность (6). Пусть $\mathbf{e}_\lambda$ есть собственный вектор оператора $\hat{S}$ с собственным значением λ и $\|\mathbf{e}_\lambda\| = 1$. Из соотношений $[\hat{S}, \hat{A}^\pm] = \pm \hat{A}^\pm$ при всех $n \in \mathbb{N}$ следуют равенства

$$\hat{S}(\hat{A}^\pm)^n \mathbf{e}_\lambda = (\lambda \pm n)(\hat{A}^\pm)^n \mathbf{e}_\lambda, \quad (10)$$

которые означают, что для тех n , при которых вектор $(\hat{A}^\pm)^n \mathbf{e}_\lambda \neq 0$, он является собственным вектором оператора $\hat{S}$ с собственным числом $\lambda \pm n$. Введем обозначения:

$$n^+ = \max\{n : (\hat{A}^+)^{n-1} \mathbf{e}_\lambda \neq 0\} \text{ и } n^- = \max\{n : (\hat{A}^-)^n \mathbf{e}_\lambda \neq 0\}.$$

Рассмотрим для $k = 1, \dots, n^-$ и $n = 1, \dots, n^+ - 1$ векторы

$$\mathbf{e}_{\lambda-k} = (\hat{A}^-)^k \mathbf{e}_\lambda / \|(\hat{A}^-)^k \mathbf{e}_\lambda\|, \quad \mathbf{e}_{\lambda+n} = (\hat{A}^+)^n \mathbf{e}_\lambda / \|(\hat{A}^+)^n \mathbf{e}_\lambda\|.$$

Система векторов

$$\{\mathbf{e}_{\lambda+n}, -n^- \leq n \leq n^+ - 1\} \quad (11)$$

ортонормированна, и замыкание ее линейной оболочки инвариантно относительно операторов $\hat{S}, \hat{A}^\pm$. Из неприводимости представления $\{E, \hat{S}, \hat{A}^\pm, F\}$ вытекает, что система (11) является ортонормированным базисом в пространстве E . Далее, из определения 1 и равенств (3), (10) вытекают равенства

$$\hat{A}^+ \hat{A}^- (\hat{A}^\pm)^n \mathbf{e}_\lambda = h(\lambda \pm n) (\hat{A}^\pm)^n \mathbf{e}_\lambda, \quad (12)$$

где $h(t)$ — функция, указанная в определении 1. Также из определения 1 и равенств (4), (10) вытекают равенства

$$\hat{A}^- \hat{A}^+ (\hat{A}^\pm)^n \mathbf{e}_\lambda = F(h(\lambda \pm n), \lambda \pm n) (\hat{A}^\pm)^n \mathbf{e}_\lambda. \quad (13)$$

Равенства (12) и (13) означают, что векторы $(\hat{A}^\pm)^n \mathbf{e}_\lambda$, а значит, и векторы $\mathbf{e}_{\lambda \pm n}$ из системы (11) являются собственными для операторов $\hat{A}^+ \hat{A}^-$, $\hat{A}^- \hat{A}^+$ с собственными числами $h(\lambda \pm n)$ и $A(h(\lambda \pm n), \lambda \pm n)$, соответственно. Из равенств (12), (13) и очевидного равенства

$$\hat{A}^\pm \hat{A}^\mp (\hat{A}^\pm)^n \mathbf{e}_\lambda = \hat{A}^\pm \hat{A}^\mp \hat{A}^\pm (\hat{A}^\pm)^{n-1} \mathbf{e}_\lambda$$

вытекает условие

$$h(\lambda + n + 1) = F(h(\lambda + n), \lambda + n) \quad \text{для} \quad -n^- \leq n \leq n^+ - 1. \quad (14)$$

Из равенств (12)–(14) и сопряженности друг другу операторов $\hat{A}^+$, $\hat{A}^-$ следуют равенства

$$\begin{aligned} \left\| (\hat{A}^+)^n \mathbf{e}_\lambda \right\|^2 &= h(\lambda + 1)h(\lambda + 2) \dots h(\lambda + n), \\ \left\| (\hat{A}^-)^n \mathbf{e}_\lambda \right\|^2 &= h(\lambda)h(\lambda - 1) \dots h(\lambda + 1 - n). \end{aligned} \quad (15)$$

Возможны только следующие случаи поведения базиса (11):

- 1) система (11) обрывается снизу и сверху, т.е. $n^- < +\infty$, $n^+ < +\infty$;
- 2) система (11) обрывается только снизу, т.е. $n^- < +\infty$, но $n^+ = +\infty$;
- 3) система (11) обрывается только сверху, т.е. $n^- = +\infty$, но $n^+ < +\infty$;
- 4) система (11) не обрывается ни снизу, ни сверху, т.е. $n^- = +\infty$ и $n^+ = +\infty$.

В случае 1 положим $m = n^- + n^+$, $\nu = \lambda - n^-$, $x_0 = 0$, $x_n = h(\lambda - n^- + n)$, $n = 0, 1, \dots, m$. В силу формул (14) и (15) функция $F(x, y)$ удовлетворяет условиям леммы 1 при $m = n^- + n^+$ и $\nu = \lambda - n^-$. В силу этой леммы существует неприводимое представление парафермионного типа в пространстве R^m или C^m . Изоморфизм между этим представлением и представлением $\{E, \hat{S}, \hat{A}^\pm, F\}$ задается правилом

$$J\mathbf{e}_{\lambda - n^- + n} = |n\rangle, \quad n = 0, 1, \dots, m - 1.$$

В случае 2 положим $\nu = \lambda - n^-$, $x_0 = 0$, $x_n = h(\lambda - n^- + n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. В силу формул (14) и (15) функция $F(x, y)$ удовлетворяет условиям леммы 3 при $\nu = \lambda - n^-$. В силу этой леммы существует неприводимое представление бозонного типа в пространстве l_2 . Изоморфизм между этим представлением и представлением $\{E, \hat{S}, \hat{A}^\pm, F\}$ задается правилом

$$J\mathbf{e}_{\lambda - n^- + n} = |n\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В случае 3 положим $\nu = \lambda + n^+$, $x_0 = 0$, $x_n = h(\lambda + n^+ - n)$, $n \in \mathbf{Z}_+$. В силу формул (14) и (15) функция $F(x, y)$ удовлетворяет условиям леммы 5 при $\nu = \lambda + n^+$. В силу этой леммы существует неприводимое представление антибозонного типа в пространстве l_2 . Изоморфизм между этим представлением и представлением $\{E, \hat{S}, \hat{A}^\pm, F\}$ задается правилом

$$J\mathbf{e}_{\lambda + n^+ - n - 1} = |n\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В случае 4 для произвольного целого k положим $\nu = \lambda + k$, $x_0 = h(\lambda + k)$, $x_n = h(\lambda + k + n)$, $n \in \mathbf{Z}$. В силу формул (14) и (15) для всякого целого k функция $F(x, y)$ удовлетворяет условиям леммы 7 при $x_0 = h(\lambda + k)$, $\nu = \lambda + k$. В силу этой леммы для

всякого целого k существует неприводимое представление двустороннего типа в пространстве l_2 . Изоморфизм между этим представлением и представлением $\{E, \hat{S}, \hat{A}^\pm, F\}$ задается правилом

$$J e_{\lambda+n^+-n-1} = g_n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\{E, \hat{a}^\pm, f\}$ есть неприводимое представление (размерности больше 1) соотношения (2) для функции $f(x)$ и в этом представлении ядро оператора $\hat{a}^-$ ненулевое. Тогда представление $\{E, \hat{a}^\pm, f\}$ принадлежит классу II и изоморфно представлению либо парафермионного типа (если ядро оператора $\hat{a}^+$ ненулевое), либо бозонного типа (если ядро оператора $\hat{a}^+$ нулевое).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\{E, \hat{a}^\pm, f\}$ есть неприводимое представление (размерности больше 1) соотношения (2) для функции $f(x)$. Пусть в этом представлении ядро оператора $\hat{a}^-$ нулевое, а соотношение (2) представимо в виде

$$\hat{a}^+ \hat{a}^- = \Phi(\hat{a}^- \hat{a}^+), \quad (16)$$

где $\Phi(t)$ – вещественная функция и оператор $\hat{a}^+ \hat{a}^-$ имеет хотя бы один собственный вектор. Тогда представление $\{E, \hat{a}^\pm, f\}$ принадлежит классу II и изоморфно представлению либо антибозонного типа (если ядро оператора $\hat{a}^+$ ненулевое), либо двустороннего или циклического типа (если ядро оператора $\hat{a}^+$ нулевое).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Построим базис из собственных векторов оператора $\hat{a}^+ \hat{a}^-$, а из соответствующих им собственных значений построим последовательность (7). Обозначим через $\ker \hat{a}^\pm$ ядра операторов $\hat{a}^\pm$, соответственно. Пусть вектор $e_0 \in \ker \hat{a}^-$ и $\|e_0\| = 1$. Введем обозначение

$$n^+ = \max\{n: (\hat{a}^+)^{n-1} e_0 \neq 0\}.$$

Рассмотрим векторы

$$e_n = (\hat{a}^+)^n e_0 / \|(\hat{a}^+)^n e_0\| \quad \text{для } n = 1, \dots, n^+ - 1 \quad (17)$$

и последовательность чисел

$$y_0 = 0, \quad y_{n+1} = f(y_n) \quad \text{для } n = 1, \dots, n^+. \quad (18)$$

Из соотношения (5) и взаимной сопряженности операторов $\hat{a}^+, \hat{a}^-$ следуют равенства

$$\begin{aligned} \hat{a}^+ \hat{a}^- (\hat{a}^- e_0) &= \hat{a}^+ f(\hat{a}^+ \hat{a}^-) e_0 = f(0) \hat{a}^+ e_0 = y_1 \hat{a}^+ e_0, \\ \|\hat{a}^+ e_0\| &= \sqrt{y_1}, \quad \hat{a}^+ e_0 = \sqrt{y_1} e_1, \quad \hat{a}^- e_1 = \sqrt{y_1} e_0, \\ (e_0, \hat{a}^+ e_0) &= (\hat{a}^- e_0, e_0) = (0, e_0) = 0, \end{aligned}$$

из которых вытекает, что вектор $\hat{a}^+ e_0$ является собственным вектором оператора $\hat{a}^+ \hat{a}^-$ с собственным числом $f(0) = y_1$. Последовательно повторяя эти рассуждения для

$n = 1, 2, \dots, n^+ - 1$, получим, что векторы $(\hat{a}^+)^n \mathbf{e}_0$ являются собственными векторами оператора $\hat{a}^+ \hat{a}^-$ с собственными числами y_n , соответственно, и верны равенства

$$\begin{aligned} \hat{a}^+ \mathbf{e}_n &= \sqrt{y_{n+1}} \mathbf{e}_{n+1}, \quad \hat{a}^- \mathbf{e}_n = \sqrt{y_n} \mathbf{e}_{n-1}, \\ \|(\hat{a}^+)^n \mathbf{e}_0\| &= \sqrt{y_1 \dots y_n}, \\ (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{n+p}) &= ((\hat{a}^-)^p \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0) / \sqrt{y_{n+1} \dots y_{n+p}} = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

для $n = 1, \dots, n^+ - 1$ и $p = 1, \dots, n^+ - 1 - n$. Из формул (19) следует, что система векторов

$$\{\mathbf{e}_n, 0 \leq n \leq n^+ - 1\} \quad (20)$$

ортонормированна. В силу неприводимости представления $\{E, \hat{a}^\pm, f\}$ система векторов (20) образует ортонормированный базис в пространстве E . Возможны только 2 случая поведения системы (20):

- 1) система (20) конечна, т.е. $n^+ < +\infty$;
- 2) система (20) счетна, т.е. $n^+ = +\infty$.

В случае 1 из (19) следует, что $y_{n^+} = 0$, т.е. функция $f(x)$ удовлетворяет условиям леммы 2 при $m = n^+$ и существует n^+ -мерное представление соотношения (2) парафермионного типа. Изоморфизм J между этим представлением и представлением $\{E, \hat{a}^\pm, f\}$ задается правилом

$$J\mathbf{e}_n = |n\rangle, \quad n = 1, \dots, n^+ - 1. \quad (21)$$

В случае 2 в силу (19) для всех $n \in \mathbf{N}$ числа $y_n > 0$ и ядро оператора $\hat{a}^+$ равно нулю. Тогда функция $f(x)$ удовлетворяет условиям леммы 4 и существует представление соотношения (2) в пространстве l_2 бозонного типа. Изоморфизм J между этим представлением и представлением $\{E, \hat{a}^\pm, f\}$ задается правилом (21) при $n \in \mathbf{Z}_+$. Теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Схема доказательства теоремы 3 аналогична схеме доказательства теоремы 2. Пусть $\mathbf{e}_\lambda$ есть собственный вектор оператора $\hat{a}^\pm$ с собственным значением λ и $\|\mathbf{e}_\lambda\| = 1$. Введем обозначение

$$n^+ = \max\{n: (\hat{a}^+)^{n-1} \mathbf{e}_0 \neq 0\}.$$

Рассмотрим для $k \in \mathbf{N}$ и $n = 1, \dots, n^+ - 1$ векторы

$$\mathbf{e}_{\lambda-k} = (\hat{a}^-)^k \mathbf{e}_\lambda / \|(\hat{a}^-)^k \mathbf{e}_\lambda\|, \quad \mathbf{e}_{\lambda+n} = (\hat{a}^+)^n \mathbf{e}_\lambda / \|(\hat{a}^+)^n \mathbf{e}_\lambda\| \quad (22)$$

и последовательность чисел

$$y_0 = \lambda, \quad y_{-(k+1)} = \Phi(y_{-k}), \quad y_{n+1} = f(y_n). \quad (23)$$

Аналогично доказательству формул (19) из соотношений (5), (16) и взаимной сопряженности операторов $\hat{a}^+$, $\hat{a}^-$ вытекает, что векторы $\mathbf{e}_{\lambda-k}$, $\mathbf{e}_{\lambda+n}$ являются собственными векторами оператора $\hat{a}^+ \hat{a}^-$ с собственными числами y_{-k} , y_n , соответственно, и верны формулы

$$\begin{aligned} \hat{a}^+ \mathbf{e}_{\lambda+n} &= \sqrt{y_{n+1}} \mathbf{e}_{\lambda+n+1}, & \hat{a}^- \mathbf{e}_{\lambda+n} &= \sqrt{y_n} \mathbf{e}_{\lambda+n-1}, \\ \|(\hat{a}^+)^n \mathbf{e}_\lambda\| &= \sqrt{y_1 \dots y_n}, & \|(\hat{a}^-)^n \mathbf{e}_\lambda\| &= \sqrt{y_0 y_{-1} \dots y_{1-n}} \end{aligned} \quad (24)$$

при $n \leq n^+ - 1$. Из условия $\ker \hat{a}^- = \mathbf{0}$ и (24) следует, что при $n \leq n^+ - 1$ все числа $y_n > 0$ и все векторы $(\hat{a}^-)^k \mathbf{e}_\lambda \neq \mathbf{0}$. В силу неприводимости представления $\{E, \hat{a}^\pm, f\}$ система векторов

$$\{\mathbf{e}_{\lambda+n}, n \leq n^+ - 1\} \quad (25)$$

содержит базис пространства E . Возможны только 3 случая поведения последовательности (23) и системы векторов (25):

- 1) последовательность (23) и система (25) обрываются сверху, т.е. $n^+ < +\infty$;
- 2) последовательность (23) и система (25) не обрываются сверху, т.е. $n^+ = +\infty$, и в последовательности (23) все числа различны;
- 3) последовательность (23) и система (25) не обрываются сверху, и последовательность (23) периодична с минимальным периодом $m > 1$: числа $y_0, y_1, \dots, y_{m-1}$ различны и $y_{n+m} = y_n$.

В случае 1 $\hat{a}^+ \mathbf{e}_{\lambda+n^+-1} = \mathbf{0}$ и, значит, $\ker \hat{a}^+ \neq \mathbf{0}$. Выберем $n^+ = 1$, т.е. $y_0 = 0$, $\lambda = \Phi(0) = y_{-1}$, $\mathbf{e}_\lambda \in \ker \hat{a}^+$. Тогда получим последовательность

$$y_0 = 0, \quad y_{-1} = \Phi(0) = \lambda, \quad y_{-(n+1)} = \Phi(y_{-n}), \quad n \in \mathbf{Z}_+, \quad (26)$$

и систему векторов

$$\mathbf{e}_\lambda \in \ker \hat{a}^+, \quad \mathbf{e}_{\lambda-n} = (\hat{a}^-)^n \mathbf{e}_\lambda / \sqrt{y_{-1} \dots y_{-n}}, \quad n \in \mathbf{Z}_+. \quad (27)$$

Из (26) следует, что все числа y_{-n} различны. Тогда система (25) образует ортонормированный базис в пространстве E , функция $f(x)$ удовлетворяет условиям леммы 6 и существует представление соотношения (2) антибозонного типа в пространстве l_2 . Изоморфизм J между этим представлением и представлением $\{E, \hat{a}^\pm, f\}$ задается правилом

$$J \mathbf{e}_{\lambda-n} = |n\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В случае 2 из различия чисел y_n следует, что система (25) при $n \in \mathbf{Z}$ образует ортонормированный базис в пространстве E , функция $f(x)$ удовлетворяет условиям леммы 8 и существует представление соотношения (2) двустороннего типа в пространстве l_2 . Изоморфизм J между этим представлением и представлением $\{E, \hat{a}^\pm, f\}$ задается правилом

$$J \mathbf{e}_{\lambda+n} = \mathbf{g}_n, \quad n \in \mathbf{Z},$$

где векторы $\mathbf{g}_n$ введены в лемме 7.

В случае 3 операторы $\hat{a}^\pm$ ограничены и спектр операторов $\hat{a}^\pm \hat{a}^\mp$ состоит из m различных чисел $y_0, y_1, \dots, y_{m-1}$.

Заметим, что оператор $(\hat{a}^+)^m$ перестановочен с $\hat{a}^-$:

$$\hat{a}^- (\hat{a}^+)^m = (\hat{a}^+)^m \hat{a}^-. \quad (28)$$

Вследствие ограниченности операторов равенство (28) достаточно проверить на векторах цепочки (25). Из формул (24) и периодичности последовательности (23) следует, что для всякого $n \in \mathbf{Z}$ верны равенства

$$\begin{aligned} \hat{a}^- (\hat{a}^+)^m \mathbf{e}_{\lambda+n} &= y_{n+m} \sqrt{y_{n+1} \dots y_{n+m-1}} \mathbf{e}_{\lambda+n+m-1} = \\ &= y_n \sqrt{y_{n+1} \dots y_{n+m-1}} \mathbf{e}_{\lambda+n+m-1} = (\hat{a}^+)^m \hat{a}^- \mathbf{e}_{\lambda+n}, \end{aligned}$$

которые и доказывают формулу (28).

Из неприводимости представления $\{E, \hat{a}^\pm, f\}$ вытекает, что оператор $(\hat{a}^+)^m$ кратен единичному, т.е.

$$(\hat{a}^\pm)^m = e^{\pm i\varphi} \sqrt{y_0 y_1 \dots y_{m-1}} \hat{I}, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad (29)$$

откуда следуют формулы

$$(\hat{a}^+) \mathbf{e}_{\lambda+m-1} = e^{i\varphi} \sqrt{y_0} \mathbf{e}_\lambda, \quad (\hat{a}^-) \mathbf{e}_\lambda = e^{-i\varphi} \sqrt{y_0} \mathbf{e}_{\lambda+m-1}.$$

А это означает, что пространство E является m -мерным. Последовательность $\{y_n\}$ удовлетворяет условиям леммы 9, в силу которой существует m -мерное представление циклического типа. Изоморфизм J между этим представлением и представлением $\{E, \hat{a}^\pm, f\}$ задается правилом

$$J \mathbf{e}_{\lambda+n} = |n\rangle, \quad n = 0, 1, \dots, m-1.$$

Теорема 3 доказана.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрены два типа коммутационных соотношений и доказано, что для второго типа существует больше неприводимых представлений в том случае, когда оператор числа частиц не может быть введен. Представляет интерес рассмотреть свойства квантовых и классических гамильтонианов со скобками Пуассона, соответствующих таким коммутационным соотношениям. Это будет сделано в дальнейшем.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №95-01-01114.

Список литературы

- [1] Я. Перица. Квантовая статистика линейных и нелинейных оптических явлений. М.: Мир, 1987.
- [2] Н. Н. Боголюбов, Н. Н. Боголюбов (мл.). Введение в квантовую статистическую механику. М.: Наука, 1984.
- [3] M. Salerno, A. C. Scott. Nonlinearity. 1991. V. 4. № 3. P. 853–860.
- [4] I. Ya. Arefieva, I. V. Volovich. Phys. Lett. B. 1991. V. 268. P. 179–182.
- [5] S. De Filippo, M. Fusco Girard, M. Salerno. Nonlinearity. 1989. V. 2. № 3. P. 477–487.
- [6] Yu. N. Orlov, V. V. Vedenyapin. Mod. Phys. Lett. B. 1995. V. 9. № 5. P. 291–298.
- [7] E. Celengini, M. Rasetti, G. Vitiello. Phys. Rev. Lett. 1991. V. 66. № 16. P. 2056–2059.
- [8] R. Jagannathan, P. Sridhar, R. Vasudeviant, S. Chaturvedi, M. Krishnakumari, P. Shanta, V. Srinivasson. J. Phys. A: Math. Gen. 1992. V. 25. P. 1–26.
- [9] V. S. Gerjikov, M. I. Ivanov, P. P. Kulish. J. Math. Phys. 1984. V. 25. № 1. P. 25–34.
- [10] O. V. Mingalev, Yu. N. Orlov, V. V. Vedenyapin. Phys. Lett. A. 1996. V. 233. P. 246–250.
- [11] М. В. Карасев, В. П. Маслов. Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. М.: Наука, 1991.
- [12] В. В. Веденяпин, Ю. Н. Орлов. Доклады РАН. 1996. Т. 351. № 4. С. 444–447.
- [13] В. В. Веденяпин, О. В. Мингалев. Доклады РАН. 1997. Т. 352. № 2. С. 155–158.
- [14] Э. Е. Вайслеб, Ю. С. Самойленко. УМЖ. 1990. Т. 42. № 8. С. 1011–1019.
- [15] В. В. Веденяпин, О. В. Мингалев. Представления общих соотношений коммутации. Законы сохранения для квантовых гамильтонианов. Препринт ИПМ РАН № 30. Москва, 1995.
- [16] В. В. Веденяпин, О. В. Мингалев. Полуограниченность и асимптотика спектра трех квантовых гамильтонианов. Препринт ИПМ РАН № 49. Москва, 1995.

- [17] *Feng Pan.* J. Math. Phys. 1994. V. 35. № 9. P. 5065–5073.
- [18] *С. П. Новиков.* УМН. 1982. Т. 37. № 5. С. 3–49.
- [19] *C. Quesne.* Phys. Lett. A. 1994. V. 193. P. 245–250.
- [20] *C. Delbecq, C. Quense.* J. Phys. A. 1993. V. 26. P. L127.
- [21] *C. Delbecq, C. Quense.* Phys. Lett. B. 1993. V. 300. P. 227.
- [22] *Е. К. Склянин.* Функц. анализ и его прилож. 1982. Т. 16. № 4. С. 27–34.
- [23] *V. G. Drinfeld.* In: Proc. of the IMC. Berkeley, CA: California University, 1986. P. 798.
- [24] *M. Jimbo.* Lett. Math. Phys. 1986. V. 11. P. 247.
- [25] *Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев.* УМН. 1979. Т. 4. № 5. С. 209.
- [26] *L. Faddeev, N. Reshetikhin, L. Takhtadjan.* Algebra and Anal. 1988. V. 1. P. 129.
- [27] *A. Solomon, J. Katriel.* J. Phys. A. 1990. V. 23. P. L1209.
- [28] *P. P. Raychev, R. P. Roussev, Yu. F. Smirnov.* J. Phys. G. 1991. V. 16. P. L137.
- [29] *D. Bonatsos, S. B. Drenska, P. P. Raychev, R. P. Roussev, Yu. F. Smirnov.* J. Phys. G. 1991. V. 17. P. L67.
- [30] *E. E. Vaisleb, Yu. S. Samoilenko.* Selecta Mathematica Formely Sovietica. 1994. V. 13. № 1. P. 35–54.
- [31] *Э. Е. Вайслеб.* УМЖ. 1990. Т. 42. № 9. С. 1258–1262.
- [32] *S. S. Sharma.* Phys. Rev. C. 1992. V. 46. P. 904.
- [33] *F. Pan.* Acta Phys. Sinica. 1993. V. 42. P. 867.
- [34] *D. Bonatsos, C. Daskaloyannis.* Phys. Lett. B. 1992. V. 278. P. 1.
- [35] *C. Daskaloyannis.* J. Phys. A. 1992. V. 25. P. 2261.
- [36] *Е. К. Склянин.* ДАН СССР. 1979. Т. 244. С. 1337–1341.
- [37] *К. Иосида.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
- [38] *М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.

Поступила в редакцию 14.XII.1995 г.,
после доработки 16.IV.1997 г.

V. V. Vedenyapin, O. V. Mingalev, I. V. Mingalev

REPRESENTATIONS OF GENERAL COMMUTATION RELATIONS

We consider general commutation relations for generation and annihilation operators, and for the number operator. These commutation relations appear in connection with nonstandard Poisson brackets. We consider the problem of irreducible representations of these commutation relations.