Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Антонов, Квантовая модель Вольтерра и универсальная R -матрица, *ТМФ*, 1997, том 113, номер 3, 384–396

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1087>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 15:56:42

А. В. Антонов*

КВАНТОВАЯ МОДЕЛЬ ВОЛЬТЕРРА И УНИВЕРСАЛЬНАЯ R -МАТРИЦА

Показано, что интегрируемая система, решаемая методом обратной задачи рассеяния, может быть описана с помощью чисто алгебраического объекта (универсальной R -матрицы) и некоторого представления. Именно, на примере квантовой модели Вольтерра мы выписываем L -оператор и фундаментальную R -матрицу исходя из универсальной R -матрицы для квантовой аффинной алгебры $U_q(\widehat{sl}_2)$ и представления q -осцилляторов для нее. Таким образом, существует эквивалентность между интегрируемой системой с алгеброй симметрий $\mathcal{A}$ и представлением этой алгебры.

ВВЕДЕНИЕ

Напомним, что классическая модель Вольтерра [1] является разностно-дифференциальным уравнением

$$\frac{ds_n}{dt} = s_n(s_{n+1} - s_{n-1}).$$

Индекс n принадлежит множеству целых чисел. Модель Вольтерра описывает популяционную динамику, а также скорость некоторых химических реакций. Это уравнение имеет приложения и в физике [1]. Кроме того, оно является решеточным аналогом модели Лиувилля [2]. Интегрируемость модели Вольтерра была показана в [1].

Гамильтонова формулировка для периодических граничных условий $s_{n+N} = s_n$ следующая [2]:

$$\frac{ds_n}{dt} = \{H, s_n\},$$

гамильтониан

$$H = -\frac{1}{\gamma} \sum_{n=1}^N \ln s_n, \quad (1)$$

скобки Пуассона

$$\{s_m, s_n\} = -\frac{1}{2}\gamma[(4 - s_m - s_n)(\delta_{m+1,n} - \delta_{m-1,n}) + s_{m-1}\delta_{m-2,n} - s_{m+1}\delta_{m+2,n}], \quad (2)$$

здесь γ — константа связи.

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау, Москва, Россия; Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies Université Pierre et Marie Curie, Paris, France. E-mail: antonov@lpthe.jussieu.fr., antonov@landau.ac.ru.

Перейдем к квантовому случаю модели Вольтерра [3, 4]. Введем на $\mathbb{Z}$ квантовые поля v_α, u_β , удовлетворяющие условию

$$u_i v_i = q v_i u_i,$$

причем поля в различных точках цепочки коммутируют. Чтобы построить квантовый гамильтониан, зададим переменные

$$w_{\alpha\beta} = u_\alpha^{-1} u_\beta^{-1} v_\alpha^{-1} v_\beta$$

с коммутационными соотношениями

$$w_{n+1,n} w_{n,n-1} = q^2 w_{n,n-1} w_{n+1,n}. \quad (3)$$

Для примера рассмотрим случай $q^{2M+1} = 1$ и положим $u^{2M+1} = v^{2M+1} = 1$. Тогда квантовый гамильтониан Вольтерра [3] является полиномом по $w^{\pm 1}$:

$$H = \sum_{n=1}^N H(w_{n+1,n}), \quad (4)$$

где $H(w) = h(w) + h(w^{-1})$ и

$$h(w) = \sum_{j=1}^M \frac{(-1)^j}{q^j - q^{-j}} w^j.$$

В общем случае гамильтониан содержит бесконечные ряды по $w^{\pm 1}$.

Квантовый L -оператор модели Вольтерра [3] в точке α

$$L_\alpha(\lambda) = \begin{pmatrix} u_\alpha & -\lambda v_\alpha^{-1} \\ \lambda v_\alpha & u_\alpha^{-1} \end{pmatrix} \quad (5)$$

удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера (ЯБ) для тригонометрической 4×4 R -матрицы. Используя квантовый метод обратной задачи рассеяния (КМОЗ) [5], можно получить квантовый гамильтониан Вольтерра (4) из L -оператора (5).

Возьмем классический предел квантовой модели и установим связь между переменными $w_{\alpha\beta}^{(\text{cl})}$ и s_n . В пределе коммутационные соотношения (3) переходят в соотношения

$$\{w_{n+1,n}^{(\text{cl})}, w_{n,n-1}^{(\text{cl})}\} = -2w_{n,n-1}^{(\text{cl})} w_{n+1,n}^{(\text{cl})}.$$

Легко видеть, что выражение (так называемое преобразование Миуры на решетке [2])

$$s_n = \frac{1}{(1 + w_{n+1,n}^{(\text{cl})})(1 + (w_{n+1,n}^{(\text{cl})})^{-1})}$$

имеет скобки Пуассона (2). Квантовый гамильтониан (4) в пределе $q \rightarrow 1, M \rightarrow \infty$ переходит в классический (1).

Как было отмечено выше, КМОЗ дает набор квантовых интегралов движения из квантового L -оператора. Производящая функция для интегралов движения есть след матрицы монодромии, зависящей от спектрального параметра. Для периодических граничных условий матрица монодромии имеет вид $M(\lambda) = L_N(\lambda) \dots L_2(\lambda) L_1(\lambda)$.

Другой подход к объектам КМОЗ основывается на так называемой универсальной R -матрице. Явная формула для нее в случае квантовых аффинных алгебр была найдена в [6].

Для некоторой алгебры $\mathcal{A}$ универсальная R -матрица лежит в квадрате $R \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ и удовлетворяет уравнению ЯБ

$$R_{12} R_{13} R_{23} = R_{23} R_{13} R_{12}$$

в $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$. Мы пишем $R = \sum_i A_i \otimes B_i \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ и полагаем

$$R_{12} = \sum_i A_i \otimes B_i \otimes 1, \quad R_{13} = \sum_i A_i \otimes 1 \otimes B_i, \quad R_{23} = \sum_i 1 \otimes A_i \otimes B_i.$$

Интегрируемая система с симметрией $\mathcal{A}$, решаемая КМОЗ, может быть описана с помощью универсальной R -матрицы $R \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ для алгебры $\mathcal{A}$ и ее некоторого представления. Действительно, представление первой алгебры $\mathcal{A}$ из R (квантовое представление) связано с рассматриваемой интегрируемой системой, в то время как представление второй алгебры из R (вспомогательное представление) определяет тип объекта КМОЗ (L -оператор, фундаментальная R -матрица, Q -оператор Бакстера и т.д.) [7].

Ниже мы рассмотрим случай алгебры $U_q(\widehat{sl}_2)$. Матрица монодромии может быть получена из универсальной R -матрицы $R \in U_q(\widehat{sl}_2) \otimes U_q(\widehat{sl}_2)$ с помощью некоторого квантового представления (зависящего от рассматриваемой интегрируемой системы) для первой алгебры $U_q(\widehat{sl}_2)$ и вспомогательного матричного $(n \times n)$ -представления со спектральным параметром для второй алгебры $U_q(\widehat{sl}_2)$ в квадрате $U_q(\widehat{sl}_2) \otimes U_q(\widehat{sl}_2)$.

Другим примером является Q -оператор Бакстера $Q(\lambda)$, удовлетворяющий уравнению Бакстера [8]

$$T(\lambda)Q(\lambda) = Q(q^2\lambda) + Q(q^{-2}\lambda). \quad (6)$$

Мы можем получить оператор Бакстера из универсальной R -матрицы $R \in U_q(\widehat{sl}_2) \otimes U_q(\widehat{sl}_2)$, используя некоторое квантовое представление для первой алгебры $U_q(\widehat{sl}_2)$ и вспомогательное бесконечномерное представление q -осцилляторов [9, 10] для второй алгебры $U_q(\widehat{sl}_2)$ в квадрате $U_q(\widehat{sl}_2) \otimes U_q(\widehat{sl}_2)$.

Согласно методам получения матрицы монодромии или Q -оператора из универсальной R -матрицы мы определяем только представление второй алгебры $U_q(\widehat{sl}_2)$ в $R \in U_q(\widehat{sl}_2) \otimes U_q(\widehat{sl}_2)$, в то время как представление первой алгебры, определяющее конкретную рассматриваемую модель, не фиксировано. Таким образом, применение универсальной R -матрицы дает универсальную технику для вывода алгебраических соотношений между различными объектами КМОЗ [11].

В этой статье рассматривается бесконечномерное представление q -осцилляторов как квантовое для универсальной R -матрицы. Оказывается, что интегрируемая модель, описываемая таким представлением, является квантовой моделью Вольтерра [3, 4]. Мы

выводим все объекты КМОЗ для системы Вольтерра, такие как L -оператор и фундаментальная R -матрица [3], из универсальной R -матрицы, используя представление q -осцилляторов как квантовое.

В разделе 1 мы напоминаем некоторые ключевые моменты КМОЗ и интерпретируем матрицу монодромии как представление универсальной R -матрицы. В разделе 2 приведена явная конструкция L -оператора модели Вольтерра из универсальной R -матрицы. В разделе 3 мы выводим фундаментальную R -матрицу модели Вольтерра из универсальной R -матрицы. Раздел 4 содержит обсуждение полученных результатов.

Автор признателен Л. Болье и Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Énergies (Париж, Франция) за гостеприимство. Автор благодарен А. А. Белавину, А. Ю. Волкову, Ф. А. Смирнову, Л. Д. Фаддееву, Б. Л. Фейгину, С. М. Хорошкину и Б. Энрикесу за полезные обсуждения, а также М. Кулон за поддержку.

1. КВАНТОВЫЙ МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ И УНИВЕРСАЛЬНАЯ R -МАТРИЦА

В этом разделе мы используем обозначения работы [7]. Квантовый L -оператор является основным объектом КМОЗ. $L_{n,a}(\lambda)$ есть матрица во вспомогательном пространстве ν_a , в то время как матричные элементы $L_{n,a}(\lambda)$ – операторы в гильбертовом пространстве h_n , $n = 1, \dots, N$, связанном с точкой на решетке, λ – спектральный параметр. Операторы в различных точках решетки коммутируют. Таким образом, $L_{n,a}(\lambda)$ – оператор в $h_n \otimes \nu_a$.

Коммутационные соотношения для матричных элементов $L_{n,a}(\lambda)$ записываются в виде уравнения ЯБ

$$L_{n,a_1}(\mu)L_{n,a_2}(\lambda)R_{a_1,a_2}(\lambda/\mu) = R_{a_1,a_2}(\lambda/\mu)L_{n,a_2}(\lambda)L_{n,a_1}(\mu). \quad (7)$$

Это уравнение в $h_n \otimes \nu_{a_1} \otimes \nu_{a_2}$. Индексы a_1, a_2 и переменные λ и μ связаны со вспомогательными пространствами ν_1 и ν_2 , соответственно, R_{a_1,a_2} – матрица в пространстве $\nu_{a_1} \otimes \nu_{a_2}$.

Ниже мы будем рассматривать только специальную форму R_{a_1,a_2} -матрицы, так называемую тригонометрическую R -матрицу 4×4 . Многие интересные модели на решетке (XXZ -спиновая модель, решеточное уравнение синус-Гордон, система Вольтерра и т. д.) описываются тригонометрической R -матрицей.

Другой важный объект КМОЗ – матрица монодромии

$$M_a(\lambda) = L_{N,a}(\lambda)L_{N-1,a}(\lambda) \dots L_{1,a}(\lambda). \quad (8)$$

Матрица монодромии удовлетворяет уравнению ЯБ (7). Из этого следует, что следы матриц монодромии $T_a(\lambda) = \text{tr}_{\nu_a} M_a(\lambda)$ с разными спектральными параметрами по вспомогательным пространствам коммутируют, т. е.

$$[T_{a_1}(\lambda), T_{a_2}(\mu)] = 0.$$

Таким образом, следматрицы монодромии является производящей функцией для интегралов движения.

Полезно рассмотреть так называемую фундаментальную R -матрицу [12] $R_{n_1, n_2}(\lambda)$, т.е. оператор в $h_{n_1} \otimes h_{n_2}$ (вспомогательное и квантовое пространства совпадают). След матрицы монодромии, построенный по фундаментальной R -матрице, дает набор локальных интегралов движения.

С другой стороны, возможно описать все объекты КМОЗ (тригонометрическую R -матрицу, L -оператор и матрицу монодромии, а также фундаментальную R -матрицу) с помощью одной алгебраической структуры – универсальной R -матрицы. Напомним некоторые факты о ней [6].

Рассмотрим простейший случай аффинной квантовой $U_q(\widehat{sl}_2)$ -алгебры с матрицей Картана

$$A = (a_{ij}), \quad i, j = 0, 1; \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Это ассоциативная алгебра с генераторами $e_{\pm\alpha_i}, k_{\alpha_i}^{\pm 1}$ (равными $q^{\pm h_{\alpha_i}}$), $i = 0, 1$, и коммутационными соотношениями

$$\begin{aligned} [k_{\alpha_i}^{\pm 1}, k_{\alpha_j}^{\pm 1}] &= 0, \quad k_{\alpha_i} e_{\pm\alpha_j} = q^{\pm(\alpha_i, \alpha_j)} e_{\pm\alpha_j} k_{\alpha_i}, \\ [e_{\alpha_i}, e_{-\alpha_j}] &= \delta_{ij} \frac{k_{\alpha_i} - k_{\alpha_i}^{-1}}{q - q^{-1}}, \\ (\text{ad}_{q'} e_{\pm\alpha_i})^{1-a_{ij}} e_{\pm\alpha_j} &= 0 \quad \text{для} \quad i \neq j, \quad q' = q, q^{-1}, \end{aligned}$$

где $(\text{ad}_q e_{\alpha})e_{\beta}$ – q -коммутатор:

$$(\text{ad}_q e_{\alpha})e_{\beta} \equiv [e_{\alpha}, e_{\beta}]_q = e_{\alpha}e_{\beta} - q^{(\alpha, \beta)} e_{\beta}e_{\alpha},$$

а (α, β) – скалярное произведение корней α и β : $(\alpha_i, \alpha_j) = a_{ij}$. Наложено также условие $k_{\alpha_0} k_{\alpha_1} = 1$.

Определим “ко-умножение” в алгебре $U_q(\widehat{sl}_2)$:

$$\begin{aligned} \Delta(k_{\alpha_i}) &= k_{\alpha_i} \otimes k_{\alpha_i}, \\ \Delta(e_{\alpha_i}) &= e_{\alpha_i} \otimes k_{\alpha_i} + 1 \otimes e_{\alpha_i}, \quad \Delta(e_{-\alpha_i}) = e_{-\alpha_i} \otimes 1 + k_{\alpha_i}^{-1} \otimes e_{-\alpha_i}, \end{aligned}$$

и “скрученное ко-умножение”

$$\begin{aligned} \Delta'(k_{\alpha_i}) &= k_{\alpha_i} \otimes k_{\alpha_i}, \\ \Delta'(e_{\alpha_i}) &= k_{\alpha_i} \otimes e_{\alpha_i} + e_{\alpha_i} \otimes 1, \quad \Delta'(e_{-\alpha_i}) = 1 \otimes e_{-\alpha_i} + e_{-\alpha_i} \otimes k_{\alpha_i}^{-1}. \end{aligned}$$

По определению универсальная R -матрица – объект в $U_q(\widehat{sl}_2) \otimes U_q(\widehat{sl}_2)$ такой, что $\Delta'(g)R = R\Delta(g)$ для любого $g \in U_q(\widehat{sl}_2)$ и

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}. \quad (9)$$

Это уравнение является универсальной формой уравнения ЯБ в $U_q(\widehat{sl}_2) \otimes U_q(\widehat{sl}_2) \otimes U_q(\widehat{sl}_2)$. Как и во введении, мы пишем $R = \sum_i A_i \otimes B_i \in U_q(\widehat{sl}_2) \otimes U_q(\widehat{sl}_2)$ и полагаем

$$R_{12} = \sum_i A_i \otimes B_i \otimes 1, \quad R_{13} = \sum_i A_i \otimes 1 \otimes B_i, \quad R_{23} = \sum_i 1 \otimes A_i \otimes B_i.$$

Наряду с коммутационными соотношениями для алгебры $U_q(\widehat{sl}_2)$ нам понадобится также антиинволюция $*$, определенная как $(k_{\alpha_i})^* = k_{\alpha_i}^{-1}$, $(e_{\pm\alpha_i})^* = e_{\mp\alpha_i}$, $(q)^* = q^{-1}$.

Мы также пользуемся стандартными обозначениями для q -экспонент и q -чисел

$$\exp_q(x) = 1 + x + \frac{x^2}{(2)_q!} + \cdots + \frac{x^n}{(n)_q!} + \cdots = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(n)_q!},$$

где

$$(a)_q = \frac{q^a - 1}{q - 1}, \quad [a]_q = \frac{q^a - q^{-a}}{q - q^{-1}}.$$

Определим теперь генераторы Картана–Вейля алгебры $U_q(\widehat{sl}_2)$. Пусть α_1 и $\alpha_0 = \delta - \alpha_1$ суть простые корни аффинной алгебры $\widehat{sl}_2$. Тогда $\delta = \alpha_1 + \beta$ есть минимальный мнимый корень. Зафиксируем следующее нормальное упорядочение системы положительных корней:

$$\alpha_1, \alpha_1 + \delta, \alpha_1 + 2\delta, \dots, \delta, 2\delta, \dots, \alpha_0 + 2\delta, \alpha_0 + \delta, \alpha_0.$$

Положим

$$\begin{aligned} e'_\delta &= e_\delta = [e_{\alpha_1}, e_{\alpha_0}]_q, \\ e_{\alpha_1+l\delta} &= (-1)^l ([2]_q)^{-l} (\text{ad } e'_\delta)^l e_{\alpha_1}, \\ e_{\alpha_0+l\delta} &= ([2]_q)^{-l} (\text{ad } e'_\delta)^l e_{\alpha_0}, \\ e'_{l\delta} &= [e_{\alpha_1+(l-1)\delta}, e_{\alpha_0}]_q. \end{aligned} \tag{10}$$

Обозначим через $E(z)$ и $E'(z)$ производящие функции для $e_{n\delta}$ и $e'_{n\delta}$:

$$E(z) = \sum_{n \geq 1} e_{n\delta} z^{-n}, \quad E'(z) = \sum_{n \geq 1} e'_{n\delta} z^{-n}, \tag{11}$$

связанные соотношением

$$(q - q^{-1})E(z) = \log(1 + (q - q^{-1})E'(z)).$$

Векторы, соответствующие отрицательным корням, имеют вид $e_{-\gamma} = e_\gamma^*$.

Универсальная R -матрица для $U_q(\widehat{sl}_2)$ выглядит следующим образом [6]:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \left(\prod_{n \geq 0}^{\rightarrow} \exp_{q^{-2}}((q - q^{-1})e_{\alpha_1+n\delta} \otimes e_{-\alpha_1-n\delta}) \right) \times \\ &\quad \times \exp\left(\sum_{n > 0} (q - q^{-1}) \frac{n(e_{n\delta} \otimes e_{-n\delta})}{[2n]_q} \right) \times \\ &\quad \times \left(\prod_{n \geq 0}^{\leftarrow} \exp_{q^{-2}}((q - q^{-1})e_{\alpha_0+n\delta} \otimes e_{-\alpha_0-n\delta}) \right) \times \mathcal{K}, \end{aligned} \tag{12}$$

где порядок перемножения по n прямой в первом произведении и обратный по второму. Множитель $\mathcal{K}$ определяется формулой

$$\mathcal{K} = q^{\frac{h_\alpha \otimes h_\alpha}{2}}.$$

Мы видим из (12), что универсальная R -матрица принадлежит $U_q(b_+) \otimes U_q(b_-)$, где $b_\pm$ – положительная (отрицательная) борелевская подалгебра алгебры $U_q(\widehat{sl}_2)$, образованная e_{α_i} , $k_{\alpha_i}^{\pm 1}$ и $e_{-\alpha_i}$, $k_{\alpha_i}^{\pm 1}$ ($i = 0, 1$), соответственно.

Можно получить объекты КМОЗ из универсальной R -матрицы, используя конкретные представления алгебры $U_q(\widehat{sl}_2)$. Например, тригонометрическая 4×4 R -матрица получается из универсальной с помощью матричного (2×2) -представления со спектральным параметром.

Можно получить оператор $L_{n,a}(\lambda)$ из универсальной R -матрицы $R \in U_q(b_+) \otimes U_q(b_-)$, представляя первую алгебру $U_q(b_+)$ в квантовом пространстве, а вторую $U_q(b_-)$ – с помощью матриц со спектральным параметром (вспомогательное пространство). Подставляя генераторы $\Delta^{(N-1)}U_q(\widehat{sl}_2)$ N -й степени алгебры $U_q(\widehat{sl}_2)$ (взятые в качестве квантового представления) в формулу для универсальной R -матрицы, получим матрицу монодромии на N узлах (8).

Проиллюстрируем вывод уравнения ЯБ (7) из универсального уравнения (9), которое является уравнением в $U_q(\widehat{sl}_2) \otimes U_q(\widehat{sl}_2) \otimes U_q(\widehat{sl}_2)$. Чтобы получить уравнение (7), представим первую алгебру в квантовом пространстве h_n , а вторую и третью – в конечномерном матричном представлении со спектральным параметром.

2. ЯВНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ L -ОПЕРАТОРА ВОЛЬТЕРРА ИЗ УНИВЕРСАЛЬНОЙ R -МАТРИЦЫ

Напомним, что квантовый L -оператор модели Вольтерра

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} u & -\lambda v^{-1} \\ \lambda v & u^{-1} \end{pmatrix} \quad (13)$$

был введен в [3] при помощи пары Вейля u и v ,

$$uv = qvu. \quad (14)$$

L -оператор удовлетворяет уравнению ЯБ (7) для тригонометрической R -матрицы. Для вывода L -оператора (13) из универсальной R -матрицы используем представление q -осцилляторов, важность которого была подчеркнута в [9]. Было показано, что для получения оператора Бакстера $Q(\lambda)$ из $R = \sum_i A_i \otimes B_i \in U_q(b_+) \otimes U_q(b_-)$ нужно использовать представление q -осцилляторов $V_\pm$ для второй алгебры $U_q(b_-)$, когда

$$e_{\alpha_0} e_{\alpha_1} - q^2 e_{\alpha_1} e_{\alpha_0} = \frac{\lambda^2}{q^{-2} - 1} \quad (\text{представление } V_+(\lambda))$$

и

$$e_{\alpha_1} e_{\alpha_0} - q^2 e_{\alpha_0} e_{\alpha_1} = \frac{\lambda^2}{q^{-2} - 1} \quad (\text{представление } V_-(\lambda)).$$

Имеем

$$Q_+(\lambda) = \text{tr}_{V_+(\lambda)} R, \quad Q_-(\lambda) = \text{tr}_{V_-(\lambda)} R$$

для любого квантового представления $U_q(b_+)$ (для любой интегрируемой модели)¹⁾. Такие Q -операторы удовлетворяют уравнению Бакстера (6).

Здесь представление q -осцилляторов (как вспомогательное) описывает сорт объектов КМОЗ: он дает Q -оператор Бакстера для любого квантового представления алгебры $U_q(b_+)$.

Возникает вопрос: какая интегрируемая модель соответствует представлению q -осцилляторов?

Покажем, что такой моделью является квантовая модель Вольтерра. Для конструкции ее L -оператора мы используем частный случай представления $V_\pm(\lambda)$. Именно, определим представление $W(\lambda)$ алгебры $U_q(b_+)$ следующим образом:

$$e_{\alpha_1} = \lambda e(q - q^{-1})^{-1}, \quad e_{\alpha_0} = \lambda e^{-1}(q - q^{-1})^{-1}, \quad k_{\alpha_1} = k(= q^h), \quad (15)$$

где $ke = q^2 ek$. Представление $V_\pm(\lambda)$ вырождается в коммутирующие генераторы e_{α_1} и e_{α_0} .

Согласно определению генераторов нашей алгебры (10) имеем

$$e'_\delta = \frac{\lambda^2}{q^2 - 1}.$$

Используя преобразования (11), получим, что

$$e_{n\delta} = (-)^{n+1} \frac{q^{-n}}{q - q^{-1}} \frac{\lambda^{2n}}{n}, \quad (16)$$

$$e_{\alpha_1 + l\delta} = e_{\alpha_0 + l\delta} = 0 \quad \text{для} \quad l = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Чтобы получить L -оператор модели Вольтерра, рассмотрим представление операторов алгебры $U_q(\widehat{sl}_2)$ в терминах $U_q(sl_2) \otimes C[\lambda, \lambda^{-1}]$:

$$e_{\pm\alpha_1} = \lambda^{\pm 1} e_{\pm\alpha}, \quad e_{\pm\alpha_0} = -\lambda^{\pm 1} e_{\mp\alpha}, \quad k_{\alpha_1} = k_\alpha, \quad (18)$$

где алгебра $U_q(sl_2)$ имеет генераторы $e_{\pm\alpha}$ и $k_\alpha^{\pm 1}$ с обычными коммутационными соотношениями

$$k_\alpha e_{\pm\alpha} = q^{\pm 2} e_{\pm\alpha} k_\alpha, \quad [e_\alpha, e_{-\alpha}] = \frac{k_\alpha - k_\alpha^{-1}}{q - q^{-1}}.$$

Введем неприводимое 2-мерное матричное представление алгебры $U_q(sl_2)$:

$$e_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{-\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k_\alpha = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

¹⁾Мы выбираем бесконечномерное пространство представлений $V_\pm(\lambda)$ так, что след $Q_\pm(\lambda) = \text{tr}_{V_\pm(\lambda)} R$ существует.

Теперь мы можем определить представление операторов аффинной алгебры $U_q(\widehat{sl}_2)$ из (18) и представление (19) для простой алгебры $U_q(sl_2)$:

$$e_{\alpha_1+m\delta} = \lambda^{2m+1} k_{\alpha}^{-m} e_{\alpha}, \quad e_{\alpha_0+m\delta} = -\lambda^{2m+1} e_{-\alpha} k_{\alpha}^{-m} \quad (20)$$

и

$$e_{-(\alpha_1+m\delta)} = \lambda^{-2m-1} e_{-\alpha} k_{\alpha}^m, \quad e_{-(\alpha_0+m\delta)} = -\lambda^{-2m-1} k_{\alpha}^m e_{\alpha}. \quad (21)$$

Для векторов, соответствующих мнимым корням, имеем

$$e_{m\delta} = -\frac{q^m + q^{-3m} - k_{\alpha}^{-m} - q^{-2m} k_{\alpha}^{-m}}{m(q - q^{-1})} \lambda^{2m}, \quad (22)$$

$$e_{-m\delta} = \frac{q^{-m} + q^{3m} - k_{\alpha}^m - q^{2m} k_{\alpha}^m}{m(q - q^{-1})} \lambda^{-2m}. \quad (23)$$

Теперь все готово для вывода L -оператора модели Вольтерра из универсальной R -матрицы. Обозначим через $L_{1/2}(\lambda)$ некоторый L -оператор, полученный из $R = \sum_i A_i \otimes B_i \in U_q(b_+) \otimes U_q(b_-)$ с помощью такого представления, когда первая алгебра $U_q(b_+)$ представлена в квантовом пространстве $W(\lambda)$, а вторая алгебра $U_q(b_-)$ – во вспомогательном пространстве спина $1/2$.

Первое и третье произведения в формуле (12) с учетом свойства (17) имеют вид

$$\begin{aligned} & \left(\prod_{n \geq 0}^{\rightarrow} \exp_{q^{-2}}((q - q^{-1})e_{\alpha_1+n\delta} \otimes e_{-\alpha_1-n\delta}) \right) = \\ & = 1 + (q - q^{-1})e_{\alpha_1} \otimes e_{-\alpha_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda e & 1 \end{pmatrix}, \\ & \left(\prod_{n \geq 0}^{\leftarrow} \exp_{q^{-2}}((q - q^{-1})e_{\alpha_0+n\delta} \otimes e_{-\alpha_0-n\delta}) \right) = \\ & = 1 + (q - q^{-1})e_{\alpha_0} \otimes e_{-\alpha_0} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda e^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Используя формулы (16) и (23), для второго множителя в (12) (с точностью до константы) имеем

$$\begin{aligned} & \exp \left(\sum_{n > 0} (q - q^{-1}) \frac{n(e_{n\delta} \otimes e_{-n\delta})}{[2n]_q} \right) = \\ & = \exp \left((q - q^{-1}) \sum_{n > 0} (-)^n \frac{\lambda^{2n}}{n} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\lambda^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Множитель $\mathcal{K}$ сводится к выражению

$$\mathcal{K} = q^{\frac{\hbar_{\alpha} \otimes \hbar_{\alpha}}{2}} = \begin{pmatrix} k^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & k^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, оператор $L_{1/2}(\lambda)$ принимает вид

$$L_{\frac{1}{2}}(\lambda) = \begin{pmatrix} k^{\frac{1}{2}} & -\lambda e^{-1} k^{-\frac{1}{2}} \\ \lambda e k^{\frac{1}{2}} & k^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Выбирая $e = vu^{-1}$ и $k = u^2$, мы получаем, что $L_{1/2}(\lambda)$ совпадает с L -оператором модели Вольтерра (13).

3. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ R -МАТРИЦА МОДЕЛИ ВОЛЬТЕРРА

В этом разделе мы построим фундаментальную R -матрицу модели Вольтерра R_f [3, 13]. Введем представление $U_q(b_-)$ алгебры $\widehat{W}(\lambda)$:

$$e_{-\alpha_1} = \lambda^{-1} \tilde{e}^{-1} (q - q^{-1})^{-1}, \quad e_{-\alpha_0} = \lambda^{-1} \tilde{e} (q - q^{-1})^{-1}, \quad k_{\alpha_1} = \tilde{k} (= q^{\tilde{h}}), \quad (25)$$

где $\tilde{k}\tilde{e} = q^2 \tilde{e}\tilde{k}$, причем остальные генераторы подалгебры $U_q(b_-)$ имеют вид

$$e_{-\alpha_1 + l\delta} = e_{-\alpha_0 + l\delta} = 0, \quad e_{-(l+1)\delta} = \text{const} \quad \text{для} \quad l = 1, 2, \dots \quad (26)$$

Чтобы получить R_f из $R = \sum_i A_i \otimes B_i \in U_q(b_+) \otimes U_q(b_-)$, необходимо представить алгебру $U_q(b_+)$ в квантовом пространстве $W(\lambda)$ (15)–(17), а алгебру $U_q(b_-)$ – в пространстве $\widehat{W}(\lambda)$ (25), (26). Согласно определению фундаментальной R -матрицы ее квантовое пространство совпадает со вспомогательным.

Таким образом, второй и третий множители в формуле (12) имеют вид

$$\begin{aligned} \left(\prod_{n \geq 0}^{\rightarrow} \exp_{q^{-2}}((q - q^{-1})e_{\alpha_1 + n\delta} \otimes e_{-\alpha_1 - n\delta}) \right) &= \exp_{q^{-2}}((q - q^{-1})^{-1}e \otimes \tilde{e}^{-1}\lambda), \\ \left(\prod_{n \geq 0}^{\leftarrow} \exp_{q^{-2}}((q - q^{-1})e_{\alpha_0 + n\delta} \otimes e_{-\alpha_0 - n\delta}) \right) &= \exp_{q^{-2}}((q - q^{-1})^{-1}e^{-1} \otimes \tilde{e}\lambda) \end{aligned}$$

в соответствии с формулами (17) и (26). Далее мы видим, что мнимые корни для $U_q(b_+)$ и $U_q(b_-)$ являются константами. Следовательно, мы можем опустить второй множитель, содержащий экспоненту от мнимых корней.

Имеем

$$R_f(\lambda) = \exp_{q^{-2}}((q - q^{-1})^{-1}e \otimes \tilde{e}^{-1}\lambda) \exp_{q^{-2}}((q - q^{-1})^{-1}e^{-1} \otimes \tilde{e}\lambda) q^{\frac{\hbar \otimes \tilde{\hbar}}{2}}. \quad (27)$$

Покажем место фундаментальной R -матрицы в уравнении ЯБ. Универсальная форма уравнения ЯБ имеет вид²⁾

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12} \in U_q(b_+) \otimes U_q(\widehat{sl}_2) \otimes U_q(b_-).$$

²⁾Заметим, что продолжить представление $W(\lambda)$ с $U_q(b_+)$ на целую алгебру $U_q(\widehat{sl}_2)$ невозможно.

Здесь для первой алгебры $U_q(b_+)$ мы выбираем представление $W(\lambda) \equiv n_1$, для второй алгебры $U_q(\widehat{sl}_2)$ – представление, тождественно равное a , и для третьей – представление $\widehat{W}(\lambda) \equiv n_2$.

Таким образом, имеем

$$L_{n_1,a}(\lambda)R_{n_1,n_2}(\mu\lambda)L_{a,n_2}(\mu) = L_{a,n_2}(\mu)R_{n_1,n_2}(\mu\lambda)L_{n_1,a}(\lambda), \quad (28)$$

где $L_{n_1,a}(\lambda)$ – L -оператор модели Вольтерра и $R_{n_1,n_2}(\lambda) \equiv R_f(\lambda)$ – фундаментальная R -матрица модели Вольтерра.

Обозначим след матрицы монодромии для фундаментальной R -матрицы следующим образом:

$$I(\lambda) = \text{tr}_h [R_{N,h}(\lambda)R_{N-1,h}(\lambda) \dots R_{1,h}(\lambda)].$$

Уравнение (28) гарантирует коммутативность $I(\lambda)$ и следа $T_a(\lambda) = \text{tr}_{\nu_a} M_a(\lambda)$.

Записав генераторы в терминах пары Вейля (14):

$$\begin{aligned} e &= vu^{-1}, & k &= u^2, \\ \tilde{e} &= vu^{-3}, & \tilde{k} &= u^2, \end{aligned}$$

получаем для $R_f(\lambda)$ выражение

$$R_f(\lambda) = \exp_{q^{-2}}((q - q^{-1})^{-1}vu^{-1} \otimes u^3v^{-1}\lambda) \exp_{q^{-2}}((q - q^{-1})^{-1}uv^{-1} \otimes vu^{-3}\lambda) q^{\frac{h_\alpha \otimes h_\alpha}{2}}.$$

После нормализации находим формулу для фундаментальной R -матрицы

$$r(\lambda, w) = R_f(1)^{-1}R_f(\lambda) = \frac{\exp_{q^{-2}}((q - q^{-1})^{-1}w\lambda) \exp_{q^{-2}}((q - q^{-1})^{-1}w^{-1}\lambda)}{\exp_{q^{-2}}((q - q^{-1})^{-1}w) \exp_{q^{-2}}((q - q^{-1})^{-1}w^{-1})}, \quad (29)$$

где $w = vu \otimes uv^{-1}$.

Действительно, функция $r(\lambda, w)$ удовлетворяет уравнению ЯБ

$$r(\lambda, w_{12})r(\lambda\mu, w_{23})r(\mu, w_{12}) = r(\mu, w_{23})r(\lambda\mu, w_{12})r(\lambda, w_{23})$$

с $w_{12} = vu \otimes uv^{-1} \otimes 1$ и $w_{23} = 1 \otimes vu \otimes uv^{-1}$. Решение этого уравнения было найдено в [13] и имеет вид

$$r(\lambda, w) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - \lambda)(q - \lambda q^{-1}) \dots (q^{k-1} - \lambda q^{-k+1})}{(q^{-1} - \lambda q) \dots (q^{-k} - \lambda q^k)} w^k.$$

В [3] было замечено, что r -матрица $r(\lambda, w)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\frac{r(\lambda, wq)}{r(\lambda, wq^{-1})} = \frac{1 + \lambda w}{\lambda + w}.$$

Для доказательства этого факта достаточно представить q -экспоненту как бесконечное произведение

$$\exp_{q^{-2}}((q - q^{-1})^{-1}w) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 + q^{2k+1}w).$$

Мультипликативная форма (29) была найдена в [14].

Можно написать стандартную форму уравнения ЯБ для фундаментальной R -матрицы $Pr(\lambda)$ (29) и L -оператора Вольтерра (13)³⁾:

$$L_{n_2,a}(\lambda)L_{n_1,a}(\mu)Pr(\mu/\lambda) = Pr(\mu/\lambda)L_{n_1,a}(\mu)L_{n_2,a}(\lambda).$$

4. ОБСУЖДЕНИЕ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе была показана роль универсальной R -матрицы в формализме КМОЗ на примере квантовой модели Вольтерра.

На основе универсальной R -матрицы $R = \sum_i A_i \otimes B_i \in U_q(b_+) \otimes U_q(b_-)$ установлено, что квантовое представление модели Вольтерра совпадает с представлением q -осцилляторов. Таким образом, мы вывели L -оператор Вольтерра и фундаментальную R -матрицу. Вырожденное представление q -осцилляторов является простейшим для алгебры $U_q(b_+)$.

Было бы интересно обобщить взаимнооднозначное соответствие между интегрируемой системой и квантовым представлением универсальной R -матрицы q -осцилляторов на другие представления $U_q(b_+)$.

Например, пусть V_μ – модуль Верма для $U_q(sl_2)$ со старшим весом $\mu \in C$. Тогда обозначим представление вычисления аффинной алгебры $U_q(\widehat{sl}_2)$ как $V_\mu(\lambda)$. Квантовый L -оператор, полученный из универсальной R -матрицы имеет вид

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} k_\alpha^{\frac{1}{2}} - \lambda^2 q^{-1} k_\alpha^{-\frac{1}{2}} & -\lambda e_{-\alpha} k_\alpha^{-\frac{1}{2}} (q - q^{-1}) \\ \lambda e_\alpha k_\alpha^{\frac{1}{2}} (q - q^{-1}) & k_\alpha^{-\frac{1}{2}} - \lambda^2 q^{-1} k_\alpha^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix},$$

где $e_{\pm\alpha}$ и $k_\alpha^{\pm 1}$ – генераторы алгебры $U_q(sl_2)$. Этот L -оператор напоминает L -оператор для решеточной модели синус-Гордон [15].

³⁾ P – оператор перестановки: $P(w_1 \otimes w_2) = w_2 \otimes w_1$.

Список литературы

- [1] *В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский.* Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
- [2] *L. D. Faddeev, L. A. Takhtajan.* Springer Lecture Notes in Physics. 1986. V. 246. P. 166.
- [3] *A. Volkov.* Phys. Lett. A. 1992. V. 167. P. 345.
- [4] *O. Babelon.* Phys. Lett. B. 1990. V. 238. P. 234.
- [5] *Е. К. Склянин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев.* ТМФ. 1979. Т. 40. С. 194.
- [6] *S. Khoroshkin, A. Stolin. V. Tolstoy.* Mod. Phys. Lett. A. 1995. V. 10. № 19. P. 1375.
- [7] *L. Faddeev.* Int. J. Mod. Phys. A. 1995. V. 10. № 13. P. 1845.
- [8] *R. Baxter.* Exactly Solved Models in Statistical Mechanics. London: Academic Press, 1982.
- [9] *V. Bazhanov, S. Lukyanov, A. Zamolodchikov.* Integrable Structure of Conformal Field Theory II. Q -operator and DDV equation. hep-th/9604044.
- [10] *E. Damaskinsky, P. Kulish.* Irreducible representations of deformed oscillator algebra and q -special functions. q-alg/9610002.
- [11] *A. Antonov, B. Feigin.* Phys. Lett. B. 1997. V. 392. P. 115.
- [12] *В. О. Тарасов, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев.* ТМФ. 1983. Т. 57. С. 163.
- [13] *V. Fateev, A. B. Zamolodchikov.* Phys. Lett. A. 1982. V. 92. P. 37.
- [14] *L. D. Faddeev, A. Volkov.* Phys. Lett. B. 1993. V. 315. P. 311.
- [15] *A. Izergin, V. Korepin.* Lett. Math. Phys. 1981. V. 5. P. 199.

Поступила в редакцию 24.IV.1997 г.

A. V. Antonov

QUANTUM VOLTERRA MODEL AND UNIVERSAL R -MATRIX

In this paper, we explicitly prove that an integrable system solved by the quantum inverse scattering method can be described by a pure algebraic object (universal R -matrix) and a proper algebraic representation. For the example of the quantum Volterra model, we construct the L -operator and the fundamental R -matrix from the universal R -matrix for the quantum affine $U_q(\widehat{sl}_2)$ algebra and q -oscillator representation for it. In this way, there is an equivalence between the integrable system with the symmetry algebra $\mathcal{A}$ and the representation of this algebra.