Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Вшивцев, В. О. Галкин, А. В. Татаринцев, Р. Н. Фаустов, Спектральная задача для радиального уравнения Шредингера со степенными потенциалами удерживающего типа, *ТМФ*, 1997, том 113, номер 3, 397–412

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1088>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 16:40:36

А. С. Вшивцев*, В. О. Галкин†, А. В. Татаринцев*, Р. Н. Фаустов†

СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ РАДИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА СО СТЕПЕННЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ УДЕРЖИВАЮЩЕГО ТИПА

Предложен подход, сводящий решение уравнения Шредингера для ряда широко используемых степенных потенциалов к решению задачи на собственные значения для бесконечной системы алгебраических уравнений. Построенный алгоритм удобен как для аналитических вычислений, так и для численного расчета. На основе разработанного метода вычислены спектры масс “чармония” и “боттомония” для “корнельского” потенциала и суммы кулоновского и осцилляторного потенциалов. Используемый подход позволяет находить спектр масс релятивистских уравнений типа уравнения Шредингера. Получено хорошее согласие с экспериментальными данными.

1. ВВЕДЕНИЕ

Решение спектральной задачи для уравнения Шредингера со сферически-симметричными потенциалами является одной из важных задач для спектроскопии сложных химических соединений, молекул, а также для описания спектров барионных резонансов [1, 2] и мезонов-кваркониев [2–4]. Как известно, несмотря на отсутствие строгого теоретического обоснования потенциальные модели дают неплохое описание спектров масс таких систем, как кварконий (“чармоний” и др). При моделировании потенциала взаимодействия этих систем обычно используют потенциалы удерживающего типа. Примером может служить “корнельский” потенциал, в котором имеются два слагаемых, из которых одно ответственно за кулоновское взаимодействие кварков, а второе отвечает удерживающему – струнному взаимодействию, обеспечивающему конфайнмент.

Задача вычисления спектров энергий для уравнения Шредингера с различными типами потенциалов давно привлекает к себе исследователей и решается многими способами: прямым численным решением при заданных граничных условиях на волновые функции, вариационными методами, различными модификациями, комбинирующими аналитические и численные подходы. Значительное развитие получил квазиклассический метод, который хорошо зарекомендовал себя для довольно широкого класса задач квантовой механики [5, 6]. Представляет интерес “интуитивный” подход, обсуждаемый в [7], который, по-видимому, тесным образом связан с решением обратной задачи рассеяния [8].

---

*Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет), Москва, Россия

†Научный совет по комплексной проблеме “Кибернетика” РАН, Москва, Россия

В данной работе продолжается развитие метода, предложенного в работах [9, 10], который существенным образом учитывает характер асимптотического поведения волновых функций при больших значениях параметра r (что эквивалентно малым импульсам). Этот метод фактически обобщает метод интегральных преобразований для ядер специального вида, определяющих правильное асимптотическое поведение волновых функций. Как было показано в работах [9–11], такой подход оказывается весьма плодотворным для нахождения низко лежащих уровней спектра. Отметим, что именно низко лежащие спектральные уровни в задачах изучения барионов и мезонов играют существенную роль. Последнее обстоятельство позволяет надеяться на то, что развитие этого метода, предложенное в статье, окажется полезным для задач адронной спектроскопии.

С учетом сказанного в работе дан точный алгоритм приведения радиального уравнения Шредингера к алгебраической задаче на собственные значения, из которой методом последовательных приближений возможно получение спектра исходного уравнения. Эта процедура оказывается весьма простой как для аналитических вычислений, так и для численного счета, что позволяет получить некоторые приближенные аналитические формулы для нижних уровней энергии, которые могут быть полезны для качественного анализа спектра исследуемой модельной системы. Следует особо отметить, что получаемая теория возмущений оказывается сходящейся. Этот результат представляет самостоятельный интерес и указывает на правомерность развиваемого метода и возможность его использования при решении конкретных задач.

В качестве примера в настоящей работе мы рассматриваем сферически-симметричные “запирающие” потенциалы следующего вида:

$$U_k(r) = a^2 r^k - Z/r, \quad a > 0, \quad k = 1, 2, \quad (1)$$

имеющие важное значение в приложениях адронной физики.

Подробно построение быстро сходящейся процедуры теории возмущений с учетом алгебраической симметрии изложено в работе [9]. В данной статье метод переносится на случай потенциалов (1).

Рассмотрим радиальную часть уравнения Шредингера в следующем виде:

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} + U_{\text{eff}}(r) \right] R(r) = \lambda R(r). \quad (2)$$

Полагаем, что полная волновая функция решения содержит наряду с радиальной частью еще и стандартную угловую зависимость

$$\psi_{nlm}(\mathbf{r}) = \frac{R_n(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (3)$$

В этом случае эффективный потенциал в (2) будет иметь хорошо известный вид

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{l(l+1)}{r^2} + U_k(r). \quad (4)$$

Если потенциал $U_k(r)$ не содержит отрицательных степеней старше чем r^{-1} (как в случае (1)), поведение радиальной части волновой функции $R(r) \sim r^{l+1}$ в нуле будет определяться именно первым слагаемым в (4). Сделаем замену $R(r) \sim r^{l+1} F(r)$, где $F(0) \neq 0$. Полученное уравнение запишем в удобной для дальнейших преобразований форме

$$F'' + \frac{2}{r}(l+1)F' + [\lambda - U(r)]F = 0. \quad (5)$$

2. СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА $U_1(r)$

Для потенциала (1) при $k = 1$ постоянная $a^2 > 0$ может быть убрана одновременной заменой переменной в уравнении (5) $r \rightarrow a^{-2/3}r$ и введением “безразмерных” комбинаций параметров $\lambda^* = \lambda a^{-4/3}$, $z^* = z a^{-2/3}$. Решения уравнения (5) будем искать в виде ряда

$$F(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{f_k} r^k, \quad f_k = \left(\frac{2}{3}\right)^{2k/3} \frac{\Gamma\left(\frac{2k+4l+5}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{4l+5}{3}\right)}. \quad (6)$$

Коэффициенты f_k выбираются из соображений симметризации матрицы Якоби, в которую входят коэффициенты a_k , и получения правильного асимптотического поведения волновой функции на бесконечности

$$R(r) \sim \exp\left[-\frac{2}{3}r^{3/2}\right],$$

совпадающего в данном случае с асимптотикой известной функции Эйри. Кроме того, выбор коэффициентов в предложенном виде позволяет правильно подобрать ядро обобщенного интегрального преобразования Лапласа (преобразования Миттаг-Лефлера). Полученное подстановкой (6) в (5) рекуррентное соотношение будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} (k+2)a_{k+2} - \left(k+2l+\frac{2}{3}\right)a_{k-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} \frac{z^*}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} B\left(\frac{2k+4l+6}{3}; \frac{1}{3}\right) a_{k+1} + \\ + \left(\frac{2}{3}\right)^{-1/3} \frac{\lambda^*}{\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right)} B\left(\frac{2k+4l+6}{3}; -\frac{1}{3}\right) a_k = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

После введения производящей функции $\Phi(w) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^{2k/3}$ оно преобразуется к интегродифференциальному уравнению

$$\left[(1-w^2)\Phi' - \frac{4l+5}{3}w\Phi\right] + \frac{z^*}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \left(\frac{2}{3}\right)^{4/3} w^{-\frac{1}{3}} I + \frac{\lambda^*}{\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right)} \left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} w^{\frac{1}{3}} I^* = 0, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} I(w) &= \int_0^1 dt t^{\frac{4l+1}{3}} (1-t)^{-\frac{2}{3}} \Phi(wt), \\ I^*(w) &= \int_0^1 dt t^{\frac{4l+3}{3}} (1-t)^{-\frac{4}{3}} \Phi(wt). \end{aligned}$$

Выделяя явным образом особенность функции в точке $w = 1$,

$$\Phi(w) = (1-w^2)^{\frac{-4l-5}{6}} H(w),$$

и осуществляя конформное отображение комплексной плоскости w в единичный круг $x = (1-w)/(1+w)$, для новой неизвестной функции $\overline{\Lambda}(x)$, где

$$H(w) \equiv x^{\frac{4l+5}{6}} (1-x)^{\frac{-4l+2}{3}} \overline{\Lambda}(x),$$

получим уравнение

$$\begin{aligned} x(1-x)\overline{\Lambda}' + \left[\frac{4l+5}{6} + \frac{4l-9}{6}x \right] \overline{\Lambda} = \\ = \frac{2^{2/3}z^*}{3^{4/3}\Gamma(\frac{1}{3})}(1-x)^{-2/3}I(x) + \frac{\lambda^*}{2^{2/3}3^{2/3}\Gamma(-\frac{1}{3})}I^*(x). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь значения интегралов I, I^* связаны с функцией $\overline{\Lambda}(x)$ преобразованиями

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_x^1 (1-u)u^{-\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{x}{u}\right)^{-\frac{2}{3}} \overline{\Lambda}(u) du, \\ I^*(x) &= \int_x^1 (1-u)^{\frac{5}{3}} u^{-\frac{4}{3}} \left(1 - \frac{x}{u}\right)^{-\frac{4}{3}} \overline{\Lambda}(u) du. \end{aligned}$$

В соответствии с общей теорией [9] необходимое асимптотическое поведение волновой функции выполняется лишь в том случае, если $x = 0$ является регулярной точкой функции $\overline{\Lambda}(x)$, что позволяет искать такие решения в виде ряда по неотрицательным степеням

$$\overline{\Lambda}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k. \quad (10)$$

Вычисляя интегралы I, I^* с помощью прямого и обратного интегральных преобразований Меллина, легко получить в этом случае рекуррентное соотношение на коэффициенты A_k

$$\left(n + \frac{2}{3}l + \frac{5}{6}\right)A_n - \left(n - \frac{2}{3}l + \frac{1}{2}\right)A_{n-1} = \overline{z} \sum_{k=0}^{\infty} F_{nk} A_k + \overline{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} G_{nk} A_k. \quad (11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F_{nk} &= \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^n C_n^m \left[\frac{\Gamma(n-m+\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})} \right] \left[\frac{\Gamma(m+\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})} \right] \left[\frac{\Gamma(k-m+\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})} \right] \left[\frac{\Gamma(\frac{7}{3})}{\Gamma(k-m+\frac{7}{3})} \right], \\ G_{nk} &= \frac{1}{n!} \left[\frac{\Gamma(\frac{7}{3})}{\Gamma(k-n+\frac{7}{3})} \right] \left[\frac{\Gamma(n+\frac{4}{3})}{\Gamma(\frac{4}{3})} \right] \left[\frac{\Gamma(k-n-\frac{1}{3})}{\Gamma(-\frac{1}{3})} \right] \end{aligned}$$

— полубесконечные матрицы, а $\overline{\lambda} = 5 \cdot 2^{-5/3} 3^{-2/3} a^{-4/3} \lambda \Gamma(2/3)/\Gamma(1/3)$ и $\overline{z} = 2^{-4/3} 3^{2/3} a^{-2/3} z/\Gamma(1/3)$ — параметры. Дальнейшая процедура получения приближенных собственных значений энергии λ_n связана с конечным обрезанием матриц $\widehat{F}, \widehat{G}$ на размерах $(N+1) \times (N+1)$, где $N = 0, 1, 2, \dots$. Получаемые таким образом $N+1$ собственных значений λ_n , $n = 0, 1, \dots, N$, определяют положение первых уровней спектральной задачи. Чем выше значение N , тем меньше равномерная оценка погрешности. При этом точность первых уровней получается существенно выше.

Проиллюстрируем скорость сходимости данной процедуры на примере точно решаемой задачи. В частном случае $z = 0$, $l = 0$ из соотношения (11) получаются собственные значения спектра для сферического потенциала линейного вида $U_{\text{eff}} = r$. Как хорошо известно, они совпадают с соответствующими нулями функции Эйри [12]. Для второй итерации ($N = 1$) приближенное значение для энергии основного состояния

$\lambda_0(N = 1) = 2.3376$ отличается от точного значения (первый нуль функции Эйри) $\lambda_0^{\text{exact}} = 2.3381$ с относительной погрешностью 0.021%. Данные для более высоких значений индекса обрезания приведены в табл. 1, в которой сравниваются решения уравнения (11) с потенциалом $V(r) = r$ для S -состояний с точными решениями, определяемыми нулями функции Эйри (Ai). По горизонтали отложено радиальное квантовое число n , по вертикали – размер $(N + 1)$ обрезаний матриц $\hat{F}$ и $\hat{G}$ в уравнении (11). Видно, что скорость сходимости предложенной процедуры достаточно высока.

Таблица 1

N	n					
	0	1	2	3	4	5
0	2.17747					
1	2.33762	3.90446				
2	2.32928	4.19704	5.49815			
3	2.33298	4.06720	5.87930	7.12835		
4	2.33464	4.08297	5.46807	7.57050	8.84809	
5	2.33561	4.08355	5.52374	6.70034	9.33590	10.66484
6	2.33623	4.08466	5.51523	6.81654	7.85466	11.18931
7	2.33664	4.08538	5.51718	6.77696	8.03348	8.98943
8	2.33693	4.08588	5.51784	6.78365	7.92349	9.21939
9	2.33714	4.08626	5.51828	6.78389	7.94408	8.98263
10	2.33730	4.08652	5.51905	6.78145	7.95138	9.01194
Нули						
Ai	2.33810	4.08795	5.52056	6.78671	7.94413	9.02265

Отметим, однако, что для больших значений z необходимо брать более высокие приближения по N . В то же время зависимость от параметров a и z качественно верно воспроизводится даже в случае $N = 0, 1, 2$. Так, например, для $N = 0$ основное радиальное состояние в потенциале данного типа будет следующим:

$$\lambda_{0,l}^{(N=0)} = 1.742a^{4/3} \left(l + \frac{5}{4} \right) - 2.415a^{2/3}z. \quad (12)$$

При $N = 1$ получим две серии уровней, соответствующих основному и первому возбужденному радиальным состояниям

$$\bar{\lambda}_{0,l}^{(N=1)} = q - \sqrt{\frac{D}{4}}, \quad \bar{\lambda}_{1,l}^{(N=1)} = q + \sqrt{\frac{D}{4}}, \quad (13)$$

где

$$q = \frac{13}{18}l - \frac{23}{24}\bar{z} + \frac{43}{36},$$

$$\frac{D}{4} = q^2 - \left(\frac{31}{36}l + \frac{113}{144} - \frac{13}{12}\bar{z}\right)\left(\frac{7}{12}l + \frac{77}{48} - \frac{5}{6}\bar{z}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{12}l + \frac{11}{48} - \frac{11}{42}\bar{z}\right)\left(\frac{49}{36}l - \frac{49}{144} - \frac{7}{12}\bar{z}\right).$$

Для $N = 2$ решениями кубического уравнения являются значения, соответствующие трем радиальным квантовым числам 0, 1, 2.

Следует отметить, что удовлетворительная точность данных аналитических выражений может быть получена в ограниченной области параметров $z < z_{\max}(N)$, $a < a_{\max}(N)$. При этом граничные значения тем больше, чем больше индекс обрезания бесконечной матрицы N . Оценки граничных значений с заданной погрешностью могут быть проведены лишь численно. Сходимость данного метода определяется компактностью исходного дифференциального оператора, а ее скорость достаточно высока для проведения численных расчетов, не требующих существенных затрат ресурсов ЭВМ.

3. СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА $U_2(r)$

Так же как и в предыдущем случае, для потенциала $U_2(r)$ заменой $r \rightarrow r/\sqrt{a}$, $z^* = Z/\sqrt{a}$, $\lambda^* = \lambda/a$ убирается коэффициент при старшей степени r . Проводя аналогичные рассуждения, легко получить уравнение в виде (ср. с (9))

$$x(1-x)\bar{\Lambda}' + \left[\left(\frac{l}{2} + \frac{3}{4} - \frac{\lambda}{4}\right) + \left(\frac{l}{2} - \frac{3}{4} - \frac{\lambda}{4}\right)x\right]\bar{\Lambda} = \frac{1}{2}\bar{z}I(x),$$

$$I(x) = \int_x^1 u^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x}{u}\right)^{-\frac{1}{3}} \bar{\Lambda}(u) du, \quad \bar{z} = \frac{Z^*}{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)},$$
(14)

а рекуррентное соотношение на коэффициенты разложения функции $\bar{\Lambda}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k$ будет следующим:

$$\left(n + \frac{l}{2} + \frac{3}{4} - \frac{\lambda}{4}\right)A_n - \left(n - \frac{l}{2} - \frac{1}{4} - \frac{\lambda}{4}\right)A_{n+1} = \bar{z} \sum_{k=0}^{\infty} F_{nk} A_k,$$

$$F_{nk} = \frac{1}{2n!} \left[\frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \right] \left[\frac{1}{k - n + \frac{1}{2}} \right].$$
(15)

В частности, при $\bar{z} = 0$ формула (15) точно воспроизводит спектр обычного сферически-симметричного гармонического осциллятора $\lambda_n = (4n + 2l + 3)a = 2a(N_m + 3/2)$, где N_m — главное квантовое число. Нулевое приближение для произвольных z соответственно дает

$$\lambda_{0,l}^{(N=0)} = a(2l + 3) - \sqrt{\frac{8a}{\pi}} z.$$
(16)

Отметим, что хотя нулевое приближение в данном случае является точным при $z = 0$, однако с ростом z точность уменьшается. Для достижения большей точности в заданном интервале значений заряда необходимо использовать более высокие приближения.

4. СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КУЛОНОВСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

Проиллюстрируем в данном разделе возможность получения предложенным методом спектров для потенциалов, допускающих точное решение уравнения Шредингера. Рассмотрим в качестве примера задачу о движении в поле точечного заряда (поле Кулона), являющуюся предельным случаем потенциала (1) при $a \rightarrow 0$. Отметим, что кулоновский потенциал в уравнении с потенциалом (1) не дает главного асимптотического вклада при $r \rightarrow \infty$ (определяемого потенциалом запираания), вследствие чего нельзя найти решение кулоновской задачи, просто положив $a = 0$ в уравнении (11). Поэтому необходим дополнительный анализ. Эффективный потенциал, входящий в уравнение для радиальной части волновой функции (2), содержит в данном случае два слагаемых разного знака:

$$U_{\text{eff}} = \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{Z}{r}. \quad (17)$$

Связанные состояния в потенциале (17) имеют отрицательные собственные значения. С учетом этого факта сделаем в уравнении (5) безразмеривающую замену переменных $r \rightarrow r/\sqrt{|\bar{\lambda}|}$ и введем новый спектральный параметр $\bar{\lambda} = Z/\sqrt{|\lambda|}$. После указанных преобразований уравнение примет вид

$$F'' + \frac{2}{r}(l+1)F' + \left(-1 + \frac{\bar{\lambda}}{r}\right)F = 0. \quad (18)$$

Решение (18) в соответствии с общей теорией будем искать в виде ряда по степеням переменной r , т. е.

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{(n+2l+1)!} r^n.$$

Подставляя данное разложение в уравнение (18), приходим к следующему рекуррентному соотношению:

$$(n+1)A_{n+1} - (n+2l+1)A_{n-1} = -\bar{\lambda}A_n. \quad (19)$$

В выражении (19) уже была проведена асимптотическая симметризация матрицы Якоби. Вводя производящую функцию в виде $\Phi(w) = \sum_n A_n w^n$, из (19) получим уравнение для данной функции

$$(1-w^2)\Phi' + [\bar{\lambda} - 2(l+1)w]\Phi = 0. \quad (20)$$

Точное решение уравнения (20) имеет следующий вид:

$$\Phi(w) = (1-w)^{\frac{\bar{\lambda}}{2}-l-1}(1+w)^{-\frac{\bar{\lambda}}{2}-l-1}.$$

Как следует из общей теории, поведение производящей функции в точке $w = 1$ при данном значении $\bar{\lambda}$ определяет асимптотическое поведение волновой функции исходной задачи. В частности, только при наложении требования регулярности функции $\Phi(w)$ в данной точке волновые функции будут убывающими с ростом r и, следовательно, нормируемыми в полубесконечной области. Поэтому значения показателя степени должны быть выбраны равными целому числу n , что и определяет спектр собственных значений

$\bar{\lambda} = 2(n + l + 1)$. Вспоминая явное выражение для спектрального параметра $\bar{\lambda}$ и учитывая отрицательный знак энергии связанных состояний, легко получить, что уровни для частицы в поле Кулона описываются известной формулой Бора

$$\lambda_N = -\left(\frac{Z}{2N}\right)^2, \quad N = n + l + 1, \quad (21)$$

здесь N – главное квантовое число.

Таким образом, в случае точно решаемых задач о движении частицы в поле Кулона (17) и в поле осцилляторного типа описанная в работе процедура приводит к хорошо известным спектрам.

5. СПЕКТР МАСС ТЯЖЕЛЫХ КВАРКОНИЕВ

Применим разработанный метод решения уравнения Шредингера к расчету спектра масс тяжелых кваркониев – мезонов, состоящих из тяжелого кварка и антикварка одного аромата ($\Upsilon(b\bar{b})$ и $\Psi(c\bar{c})$). Основным предположением нерелятивистской кварковой модели [2, 3], широко используемой для описания свойств тяжелых адронов, является использование нерелятивистского приближения. Это приближение работает тем лучше, чем больше масса кварков, составляющих адрон. Расчеты в рамках релятивистских кварковых моделей показывают, что нерелятивистское приближение дает хорошее описание статических свойств тяжелых кваркониев (спектр масс, радиус и т.д.), в то время как на динамические свойства (такие как распады) релятивистские эффекты оказывают более существенное влияние. В нерелятивистской кварковой модели кварконии описывают уравнением Шредингера с локальным сферически-симметричным потенциалом, который обеспечивает конфайнмент кварков:

$$-\frac{1}{2\mu}\Delta\Psi(\mathbf{r}) + [V(\mathbf{r}) - E]\Psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (22)$$

где $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ – приведенная масса системы, составленной из кварка и антикварка с массами m_1 и m_2 .

Рис. 1. Зависимость энергии связи от массы кварка и константы сильного взаимодействия α_s для S - и P -состояний (параметры потенциала $A = 0.18 \text{ ГэВ}^2$, $B = -0.29 \text{ ГэВ}$).

Рис. 2. Зависимость энергии связи от константы сильного взаимодействия α_s при фиксированной массе кварка ($m_Q = 4.9 \text{ ГэВ}$) (сплошные линии соответствуют S -состояниям, крестики – P -состояниям, ромбы – D -состояниям).

Корнельский потенциал учитывает асимптотическую свободу в КХД на малых расстояниях и линейный рост потенциала с увеличением расстояния между кварком и антикварком

$$V(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + Ar + B, \quad (23)$$

где α_s – константа сильного взаимодействия. Иногда используют квадратичное записание

$$V(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + Ar^2 + B. \quad (24)$$

Уравнение (22) с потенциалами (23), (24) приводит к радиальному уравнению (2) с потенциалом (4), если произвести замены

$$\lambda = 2\mu(E - B), \quad a^2 = 2\mu A, \quad Z = \frac{8}{3} \alpha_s \mu.$$

Согласно изложенному выше методу решение (22) сводится к решению системы уравнений (11) для корнельского потенциала (23) и системы (15) для потенциала (24). Спектры масс боттомония ($\Upsilon(b\bar{b})$) и чармония ($\Psi(c\bar{c})$), полученные конечным обрезанием матриц, входящих в (11) и (15), на размере 9×9 ($N = 8$) приведены в сравнении с экспериментальными данными [13] в табл. 2 и 3. Используются стандартные обозначения для центров тяжести уровней $(n + 1)L$, где n – радиальное квантовое число.

Рис. 3. Зависимость энергии связи от массы кварка при фиксированной константе сильного взаимодействия ($\alpha_s = 0.39$) (сплошные линии соответствуют S -состояниям, крестики – P -состояниям, ромбы – D -состояниям).

Таблица 2

Состояние	Кулон+линейный	Кулон+осциллятор	Эксперимент
1S	9.447	9.447	9.4604 ¹⁾
2S	10.012	10.007	10.023 ¹⁾
3S	10.353	10.389	10.355 ¹⁾
4S	10.629	10.742	10.580 ¹⁾
1P	9.900	9.898	9.900
2P	10.260	10.259	10.260
3P	10.544	10.593	
1D	10.155	10.147	
2D	10.448	10.486	

В табл. 2 дан спектр масс боттомония ($\Upsilon(b\bar{b})$), рассчитанный для суммы линейного запирающего потенциала с кулоновским потенциалом и осциляторного запирающего потенциала с кулоновским потенциалом (параметры потенциала “кулон+линейный”: $A = 0.18 \text{ ГэВ}^2$, $B = -0.29 \text{ ГэВ}$, $\alpha_s = 0.39$, $m_b = 4.93 \text{ ГэВ}$; параметры потенциала “кулон+осциллятор”: $A = 0.174 \text{ ГэВ}^3$, $B = -0.05 \text{ ГэВ}$, $\alpha_s = 0.345$, $m_b = 4.95 \text{ ГэВ}$).

¹⁾ $^3S_1$ -состояние.

Рис. 4. Зависимость энергии связи от массы кварка и константы сильного взаимодействия α_s для S - и P -состояний (параметры потенциала $A = 0.174 \text{ ГэВ}^3$, $B = -0.05 \text{ ГэВ}$).

Рис. 5. Зависимость энергии связи от константы сильного взаимодействия α_s при фиксированной массе кварка ($m_Q = 4.95 \text{ ГэВ}$) (сплошные линии соответствуют S -состояниям, крестики – P -состояниям, ромбы – D -состояниям).

Таблица 3

Состояние	Кулон+линейный	Кулон+осциллятор	Эксперимент
$1S$	3.068	3.070	3.0675
$2S$	3.697	3.730	3.663
$3S$	4.144	4.331	4.159 ²⁾
$1P$	3.526	3.508	3.525
$2P$	3.993	4.095	
$3P$	4.383	4.670	
$1D$	3.829	3.841	3.770 ³⁾
$2D$	4.234	4.415	

В табл. 3 приведен спектр масс чармония ($\Psi(c\bar{c})$), рассчитанный для суммы линейного запирающего потенциала с кулоновским потенциалом и осцилляторного запирающего потенциала с кулоновским потенциалом (параметры потенциала “кулон+линейный”: $A = 0.18 \text{ ГэВ}^2$, $B = -0.29 \text{ ГэВ}$, $\alpha_s = 0.47$, $m_c = 1.56 \text{ ГэВ}$; параметры потенциала “кулон+осциллятор”: $A = 0.174 \text{ ГэВ}^3$, $B = -0.05 \text{ ГэВ}$, $\alpha_s = 0.345$, $m_c = 1.55 \text{ ГэВ}$).

Рис. 6. Зависимость энергии связи от массы кварка при фиксированной константе сильного взаимодействия ($\alpha_s = 0.345$) (сплошные линии соответствуют S -состояниям, крестики – P -состояниям, ромбы – D -состояниям).

Из табл. 2 и 3 видно, что выбором параметров потенциалов (23) и (24) можно добиться хорошего согласия с экспериментом для масс нижних уровней чармония и боттомония для обоих потенциалов. Однако для более высоких радиальных возбуждений расхождения становятся значительными. К сожалению, эти возбужденные уровни лежат

2) $^3S_1$ -состояние.

3) $^3D_1$ -состояние.

над или близко к поргу рождения открытого чарма и красоты, что затрудняет сравнение с экспериментальными данными.

Большим достоинством используемого подхода является возможность определение явной зависимости спектра от параметров потенциала межкваркового взаимодействия.

На рис. 1–3 показана зависимость энергии связи e (в ГэВ) от массы кварка m_Q (в ГэВ) и параметра кулоновского потенциала α_s для корнельского потенциала (23).

На рис. 4–6 показаны аналогичные зависимости для суммы кулоновского и осцилляторного потенциалов (24).

6. СПЕКТР МАСС РЕЛЯТИВИСТСКОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРОВСКОГО ТИПА

Сложность перехода к релятивистскому описанию обусловлена тем, что существует много различных уравнений для релятивистских двухчастичных связанных состояний [14–19]. Отметим, что эти уравнения существенно отличаются друг от друга. Большинство релятивистских уравнений представляет собой нелокальные интегродифференциальные уравнения. Однако часть из них может быть “рационализована” и приведена к локальному уравнению шредингеровского типа [20, 21], имеющему в системе центра масс следующий вид:

$$\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2\mu_R(M)} + V(M, r) \right) \Psi(\mathbf{r}) = E(M) \Psi(\mathbf{r}), \quad (25)$$

где $\mathbf{p}^2 = -\nabla^2 = -\Delta$; $E(M)$ и $\mu_R(M)$ — некоторые функции массы связанного состояния M , потенциал $V(M, r)$ может также зависеть от M .

Уравнение (25) отличается от обычного уравнения Шредингера (22) тем, что в нем приведенная масса μ_R , потенциал и собственное значение энергии зависят от массы связанного состояния. В случае тяжелых кваркониев задача может быть упрощена, если в качестве исходного приближения взять нерелятивистский предел потенциала в уравнении (25). В результате решения полученного уравнения релятивистская кинематика будет учтена точно. Релятивистские динамические эффекты могут быть учтены с помощью вычисления поправок к потенциалу по теории возмущений.

Явная зависимость спектра уравнения Шредингера (22) от параметров, полученная в данной работе, позволяет проводить вычисления и в случае, когда приведенная масса μ и собственное значение E сложным образом зависят от массы связанного состояния. Это дает возможность найти решения релятивистского уравнения типа (25) с корнельским потенциалом (23). Подставляя полученные собственные значения в исходное уравнение, можно восстановить волновую функцию и учесть по теории возмущений динамические поправки.

К уравнению типа (25) приводит “рационализация” [21] двухчастичного квазипотенциального уравнения [15], широко используемого для описания связанных состояний в квантовой теории поля. Это уравнение имеет вид

$$\left(\frac{b^2(M)}{2\mu_R} - \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu_R} \right) \Psi_M(\mathbf{p}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p}, \mathbf{q}; M) \Psi_M(\mathbf{q}), \quad (26)$$

где релятивистская приведенная масса

$$\mu_R = \frac{M^4 - (m_1^2 - m_2^2)^2}{4M^3}, \quad (27)$$

квадрат относительного импульса на массовой поверхности

$$b^2(M) = \frac{[M^2 - (m_1 + m_2)^2][M^2 - (m_1 - m_2)^2]}{4M^2}, \quad (28)$$

$V(\mathbf{p}, \mathbf{q}; M)$ – оператор квазипотенциала. Переходя в координатное представление, нетрудно убедиться, что квазипотенциальное уравнение имеет вид (25) с

$$E(M) = \frac{b^2(M)}{2\mu_R} = \frac{M[M^2 - (m_1 + m_2)^2][M^2 - (m_1 - m_2)^2]}{2M[M^4 - (m_1^2 - m_2^2)^2]}. \quad (29)$$

Решение квазипотенциального уравнения (26) с корнелским потенциалом может быть найдено подстановкой релятивистской приведенной массы (27) и E из (29) в уравнение (11). Отметим, что (для фиксированного l) число нулей детерминанта, соответствующих массам связанных состояний, совпадает с порядком матрицы. Соответствующие значения масс приведены в табл. 4 и 5 вместе с результатами численного решения квазипотенциального уравнения с учетом не зависящих от спина релятивистских поправок [22] и в сравнении с экспериментальными данными [13].

В табл. 4 дан спектр масс боттомония ($\Upsilon(b\bar{b})$), рассчитанный на основе квазипотенциального уравнения для суммы линейного запирающего потенциала с кулоновским потенциалом (для $N = 8$) (NR – без учета релятивистских поправок к квазипотенциалу, SI – с учетом не зависящих от спина релятивистских поправок порядка v^2/c^2 к квазипотенциалу; параметры потенциала: $A = 0.18 \text{ ГэВ}^2$, $B = -0.30 \text{ ГэВ}$, $\alpha_s = 0.26$, $m_b = 4.88 \text{ ГэВ}$).

В табл. 5 указан спектр масс чармония ($\Psi(c\bar{c})$), рассчитанный на основе квазипотенциального уравнения для суммы линейного запирающего потенциала с кулоновским потенциалом (для $N = 8$) (NR – без учета релятивистских поправок к квазипотенциалу, SI – с учетом не зависящих от спина релятивистских поправок порядка v^2/c^2 к квазипотенциалу; параметры потенциала: $A = 0.18 \text{ ГэВ}^2$, $B = -0.30 \text{ ГэВ}$, $\alpha_s = 0.32$, $m_b = 1.55 \text{ ГэВ}$).

Из этих таблиц видно, что результаты расчетов центров тяжести уровней квазипотенциального уравнения отличаются от экспериментальных данных для боттомония не более чем на 1%, а для чармония – на 3%. Учет не зависящих от спина поправок порядка v^2/c^2 [22] еще более улучшает согласие с экспериментом.

Таблица 4

Состояние	NR	SI	Эксперимент
$1S$	9.520	9.447	9.4604 ⁴⁾
$2S$	9.990	10.018	10.023 ⁴⁾
$3S$	10.308	10.349	10.355 ⁴⁾
$4S$	10.575	10.590	10.580 ⁴⁾
$1P$	9.881	9.894	9.900
$2P$	10.211	10.259	10.260
$1D$	10.102	10.157	
$2D$	10.386	10.448	

⁴⁾ $^3S_1$ -состояние.

Таблица 5

Состояние	NR	SI	Эксперимент
$1S$	3.155	3.065	3.0675
$2S$	3.718	3.669	3.663
$1P$	3.546	3.517	3.525
$1D$	3.833	3.808	3.770 ⁵⁾

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе предложен подход, сводящий решение уравнения Шредингера для потенциалов, широко использующихся для расчета спектров тяжелых кваркониев, к решению задачи на собственные значения для бесконечной системы алгебраических уравнений. Конечное обрезание (даже для небольших N) обеспечивает высокую точность для низколежащих уровней. Построенный алгоритм удобен как для аналитических вычислений, так и для численного расчета. Явная зависимость детерминанта полученной системы от параметров потенциала дает возможность легко определить зависимость спектра решений от этих параметров. Необходимо отметить, что подстановка найденных собственных значений в исходное уравнение позволяет восстановить волновую функцию, которая при проверке имеет число нулей, соответствующее номеру возбуждения (это отвечает известной теореме о числе узлов волновой функции).

Исследованы предельные случаи используемых потенциалов, когда уравнение Шредингера имеет точные решения. Показано, что в случаях кулоновского и осцилляторного потенциалов предложенный подход воспроизводит точный спектр. Для линейно растущего потенциала в случае $l = 0$ (S -состояния) решение быстро сходится к нулям функции Эйри.

На основе разработанного метода вычислены спектры масс чармония и боттомония для корнельского потенциала (23) и суммы кулоновского и осцилляторного потенциалов (24). Исследована зависимость спектра от массы кварка и константы сильного взаимодействия α_s . Показано, что используемый подход позволяет находить спектр масс релятивистских уравнений, которые могут быть представлены в шредингеровском виде. Вычислены спектры масс чармония и боттомония на основе релятивистского квази-потенциального уравнения с корнельским потенциалом. Получено хорошее согласие с экспериментом.

В заключение авторы выражают благодарность А.И. Аптекареву, А.М. Бадалян, А.В. Борисову, В.Ч. Жуковскому, Н.Н. Нехорошеву, Ю.А. Симонову, В.Н. Сорокину и Е.Т. Шавгулидзе за полезные обсуждения и замечания. В.О. Галкин и Р.Н. Фаустов благодарят Российский фонд фундаментальных исследований (грант 96-02-17171) за частичную финансовую поддержку.

⁵⁾ $^3D_1$ -состояние.

Список литературы

- [1] А. М. Бадалян, Д. И. Киторозэ. ЯФ. 1988. Т. 47. С. 807.
- [2] C. Quigg, J. L. Rosner. Phys. Rep. 1979. V. 56. P. 16; A. Martin. Comments Nucl. and Part. Phys. 1986. V. 167. P. 249.
- [3] А. А. Быков, И. М. Дремин, А. В. Леонидов. УФН. 1984. Т. 143. С. 3.
- [4] А. М. Бадалян, Д. И. Киторозэ, Д. С. Парийский. ЯФ. 1987. Т. 46. С. 226.
- [5] V. D. Muz, V. S. Popov, Yu. A. Simonov, V. P. Yurov. ЖЭТФ. 1994. V. 105. P. 3.
- [6] В. Д. Мур, В. С. Попов. ЖЭТФ. 1993. Т. 104. С. 2293.
- [7] Б. Н. Захарьев. Уроки квантовой интуиции. Дубна: ОИЯИ, 1996.
- [8] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Пятаевский. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980; С. П. Меркурьев, Л. Д. Фаддеев. Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. М.: Наука, 1985.
- [9] А. С. Вшивцев, Н. В. Норин, В. Н. Сорокин. ТМФ. 1996. Т. 109. С. 107; Изв. вузов. Физика. 1996. Т. 5. С. 55.
- [10] А. С. Вшивцев, В. Н. Сорокин. Изв. вузов. Физика. 1994. Т. 1. С. 95.
- [11] А. С. Вшивцев, А. Ф. Королев, К. Г. Круглов, А. В. Татаринцев. Изв. вузов. Физика. 1997 (в печати).
- [12] М. Абрамовиц, И. Стиган. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
- [13] R. M. Barnett et. al (Particle Data Group). Phys. Rev. D. 1996. V. 54. P. 1.
- [14] Г. Бете, Э. Солпитер. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. М.: Физматгиз, 1960.
- [15] A. A. Logunov, A. N. Tavkhelidze. Nuovo Cim. 1963. V. 29. P. 380.
- [16] Р. Н. Фаустов. ЭЧАЯ. 1972. Т. 3. С. 238; Ann. Phys. 1973. V. 78. P. 176.
- [17] I. T. Todorov. Phys. Rev. D. 1971. V. 12. P. 841.
- [18] В. Г. Кадышевский, Р. М. Мур-Касимов, Н. Б. Скачков. ЭЧАЯ. 1972. Т. 2. С. 637.
- [19] J. S. Kang, H. J. Schnitzer. Phys. Rev. D. 1975. V. 12. P. 841.
- [20] G. T. Bodwin, D. R. Yennie. Phys. Rep. 1975. V. 43. P. 267.
- [21] А. П. Мартыненко, Р. Н. Фаустов. ТМФ. 1985. Т. 64. С. 179; 1986. Т. 66. С. 399.
- [22] В. О. Галкин, А. Ю. Мишуров, Р. Н. Фаустов. ЯФ. 1992. Т. 55. С. 2175; В. О. Галкин, Р. Н. Фаустов. ТМФ. 1990. Т. 85. С. 155.

Поступила в редакцию 7.V.1997 г.

A. S. Vshivtsev, V. O. Galkin, A. V. Tatarintsev, R. N. Faustov
SPECTRAL PROBLEM FOR THE RADIAL SCHRÖDINGER
EQUATION WITH POWER CONFINING POTENTIALS

An approach reducing the solution of the Schrödinger equation for some widely used power potentials to the solution of the eigenvalue problem for an infinite system of algebraic equations is proposed. The developed algorithm is appropriate both for analytic calculations and for numerical computations. On the basis of this method, the charmonium and bottomonium mass spectra are calculated for the Cornell potential and for the sum of the Coulomb and oscillator potentials. The proposed approach allows one to determine the mass spectrum of the relativistic Schrödinger-like equations. Good agreement with experimental data is achieved.