Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Вугальтер, Г. М. Жислин, Спектральные свойства гамильтонианов с магнитным полем при фиксации псевдомомента. I, *ТМФ*, 1997, том 113, номер 3, 413–431

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1089>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 12:06:04

С. А. Вугальтер*, Г. М. Жислин†

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ГАМИЛЬТониАнов с МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ ПРИ ФИКСАЦИИ ПСЕВДОМОМЕНТА. I

Установлено, что оператор энергии, находящейся в однородном магнитном поле n -частичной нейтральной системы с фиксированным псевдомоментом, может быть записан как некоторый оператор в пространстве относительного движения. Для этого оператора с учетом перестановочной симметрии при всех $n \geq 2$ доказана теорема Хунцикера–Ван-Винтера–Жислина о локализации существенного спектра. Впервые для $n = 2$ найдены условия конечности и бесконечности дискретного спектра и спектральные асимптотические формулы с оценкой остаточного члена. Полученные результаты, в частности, могут быть применены к гамильтониану атома водорода, находящегося в однородном магнитном поле.

ВВЕДЕНИЕ

Основная трудность при исследовании спектра многочастичных систем в магнитных полях заключается в невозможности в общем случае отделения движения центра масс [1]. В результате теорема Хунцикера–Ван-Винтера–Жислина (ХВЖ) о локализации существенного спектра оказывается неверной для рассматриваемой ситуации, а невозможность найти существенный спектр не позволяет, в свою очередь, исследовать структуру и дискретного спектра. Это относится к системам в однородном магнитном поле, когда не все частицы тождественны, и к произвольным системам в слабо убывающих магнитных полях (для возрастающих на бесконечности в x, y -плоскости полей все обстоит благополучно [2, 3]).

Существуют два способа преодоления указанной трудности. Первый – для однородного магнитного поля был предложен в [1]. Он заключается в сужении рассматриваемых операторов на подпространство функций с фиксированным псевдомоментом. Этот подход позволяет рассматривать системы с любыми зарядами (включая нейтральные), однако он приводит к таким трудностям в изучении дискретного спектра, что практически никаких результатов в отношении дискретного спектра n -частичных систем при фиксации псевдомомента до сих пор получено не было даже при $n = 2$.

* Научно-исследовательский радиофизический институт, Нижний Новгород, Россия

† Научно-исследовательский радиофизический институт, Нижний Новгород, Россия. E-mail: greg@nirfi.nnov.su

Второй подход, предложенный нами в [2–4], использует $SO(2)$ -симметрию системы. Он состоит в изучении спектра многочастичных гамильтонианов на подпространствах функций, преобразующихся по представлениям фиксированного веса группы $SO(2)$. Этот подход позволяет найти существенный спектр не только в случае однородного поля, но и для медленно убывающих полей. Для нейтральных систем (атомы, молекулы) он не срабатывает.

Именно этот факт побудил нас обратиться к предложенному в [1] методу фиксации псевдомомента как к более универсальному для систем в однородном магнитном поле. Однако в то время как в [1] применялись методы интегральных уравнений и чисто функциональный подход, мы систематически используем геометрические методы. Фактически из [1] заимствована лишь общая идея сужения изучаемых операторов на пространство функций с фиксированным псевдомоментом.

Мы рассматриваем только случай нейтральных систем, поскольку он особенно важен для приложений и не был изучен в наших работах [2–4].

В данной работе в первую очередь показывается, что пространство функций, отвечающих фиксированному псевдомоменту, может быть рассмотрено как пространство функций, описывающих относительное движение системы (относительно центра масс). Этот факт является неожиданным и парадоксальным, ибо отделение движения центра масс в плоскости x, y для рассматриваемых систем не только не проводится, но оно и невозможно в принципе (если не все частицы тождественны).

Одновременно устанавливается, что изучаемый оператор H можно преобразовать к такому виду H_0 , в котором он не только зависит лишь от относительных координат, но более того его “дифференциальная часть” зависит лишь от проекций градиента на гиперплоскость относительного движения.

Указанные факты позволили применить к изучению оператора H_0 геометрические методы, развитые в [2–4], и получить следующие результаты.

I. Найдена граница существенного спектра оператора H_0 в обычной формулировке ХВЖ-теоремы (по сути, эквивалентная, но более сложная формулировка ХВЖ-теоремы другим методом доказана в [1]).

II. Впервые доказаны теоремы о структуре дискретного спектра двухчастичных нейтральных систем с фиксированным псевдомоментом. А именно, найдены условия конечности и бесконечности дискретного спектра и получены спектральные асимптотические формулы с оценкой остаточного члена, в частности и для гамильтониана атома водорода. Заметим, что единственный результат в отношении дискретного спектра оператора H_0 , известный ранее, говорил только о существовании хотя бы одного собственного значения в случае отрицательного потенциала взаимодействия [1].

Дискретный спектр систем трех и более частиц будет рассмотрен в отдельной работе, т.к. при изучении таких систем возникают серьезные дополнительные трудности. Эти трудности связаны с исследованием свойств операторов тех разбиений исходной системы, которые определяют границу существенного спектра оператора H_0 .

1. ФИКСАЦИЯ ПСЕВДОМОМЕНТА. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1. Рассмотрим произвольную квантовую систему n частиц в однородном магнитном поле, за направление которого принято направление оси z .

Пусть $r_i = (x_i, y_i, z_i)$, m_i , e_i – радиус-вектор, масса и заряд i -й частицы, $r = (r_1, \dots, r_n)$,

$$M = \sum_{i=1}^n m_i, \quad Q = \sum_{i=1}^n e_i,$$

$\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$, $\rho_i = (x_i, y_i)$. После отделения движения центра масс в направлении оси z , т.е. после сужения гамильтониана системы на подпространство функций, определенных на множестве

$$R_{03} = \left\{ r \left| \sum_{i=1}^n m_i z_i = 0 \right. \right\},$$

мы можем записать оператор энергии системы в виде

$$H = T_{\perp} + T_3^0 + V(r), \quad (1.1)$$

где

$$\begin{aligned} T_{\perp} &= \sum_{j=1}^n T_j, \quad T_j = \left(\frac{1}{i} \nabla_{j\perp} - e_j \mathcal{B}_{j\perp} \right)^2 \frac{1}{m_j}, \\ \nabla_{j\perp} &= \nabla_{j\perp}(\rho) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \\ \mathcal{B}_{j\perp} &= B(-y_j, x_j), \quad B > 0, \quad T_3^0 = \sum_{t=1}^n T_{t3}^0, \\ T_{j3}^0 &= -m_j \nabla_{j3}^0{}^2, \quad \nabla_{tp}^0 = m_t^{-1} \frac{\partial}{\partial q_{tp}} - \frac{1}{M} \sum_{s=1}^n \frac{\partial}{\partial q_{sp}}, \quad p = 3, \\ V(r) &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i \neq j)}}^n V_{ij}(r_{ij}), \quad q_{t3} = z_t - M^{-1} \sum_{i=1}^n m_i z_i. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь T_3^0 – оператор кинетической энергии относительного движения системы в направлении оси z . Относительно потенциалов $V_{\text{st}}(r_{\text{st}})$ мы предполагаем, что они вещественны, $V_{\text{st}}(r_1) \in \mathcal{L}_{2,\text{loc}}(R^3)$ и $V_{\text{st}}(r_1) \rightarrow 0$ при $|r_1| \rightarrow \infty$.

Будем предполагать, что рассматриваемая система нейтральна, т.е. $Q = 0$.

1.2. Фиксируем значения компонент псевдомомента $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ и, следуя [1], рассмотрим оператор H на подпространстве функций ψ с фиксированным $\nu = (\nu_1, \nu_2)$, т.е. на совокупности функций ψ , удовлетворяющих векторному уравнению

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{i} \nabla_{j\perp} + e_j \mathcal{B}_{j\perp} \right) \psi = \nu \psi. \quad (1.3)$$

Обе компоненты псевдомомента коммутируют с оператором H и между собой [1], и, следовательно, пространство решений системы (1.3) инвариантно для оператора H . Общее решение системы (1.3) можно записывать в разных формах. Мы запишем его в виде

$$\psi(r) = f(r, \nu) \varphi(q),$$

где

$$f(r, \nu) = \exp \left\{ i n^{-1} \left[\left(\nu_1 + B \sum_{j=1}^n e_j y_j \right) \sum_{s=1}^n x_s + \left(\nu_2 - B \sum_{j=1}^n e_j x_j \right) \sum_{s=1}^n y_s \right] \right\},$$

$$q = (q_1, \dots, q_n), \quad q_t = r_t - r_c, \quad r_c = M^{-1} \sum_{p=1}^n m_p r_p.$$

Отметим, что система (1.3) не определяет характер зависимости функции φ от $z_1, \dots, z_n$. Мы выбрали эту зависимость исходя из требования $r \in R_{03}$ (см. п. 1.1), т.е. мы считаем, что φ зависит от $z_1, \dots, z_n$ через

$$q_{j3} = z_j - M^{-1} \sum_{k=1}^n m_k z_k, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Такая форма общего решения системы (1.3), во-первых, максимально учитывает возможную перестановочную симметрию системы и, во-вторых, позволяет в дальнейшем использовать некоторые подходы из [3].

Применяя к функции ψ оператор H , мы получаем

$$H\psi = f(r, \nu) H_0 \varphi(q),$$

где

$$H_0 = - \sum_{j=1}^n m_j^{-1} \nabla_{j\perp}^2 (q_\perp) + M^{-1} \sum_{j,s=1}^n (\nabla_{j\perp} (q_\perp), \nabla_{s\perp} (q_\perp)) + T_3^0 +$$

$$+ 2i \sum_{s=1}^n (\nabla_{s\perp}, D_{s\perp}) + \sum_{t=1}^n m_t^{-1} |A_{t\perp}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{s \neq t}^n V_{st} (q_s - q_t), \quad (1.4)$$

$$D_{s\perp} = (D_{s1}, D_{s2}), \quad A_{s\perp} = (A_{s1}, A_{s2}), \quad q_\perp = (q_{1\perp}, \dots, q_{n\perp}),$$

$$q_{s\perp} = (q_{s1}, q_{s2}),$$

$$D_{s1} = \nu_1 \left(\frac{1}{M} - \frac{1}{nm_s} \right) + B \sum_{j=1}^n (q_{j2} - q_{s2}) \left(\frac{e_s - e_j}{nm_s} + \frac{2e_j}{M} \right),$$

$$D_{s2} = \nu_2 \left(\frac{1}{M} - \frac{1}{nm_s} \right) + B \sum_{j=1}^n (q_{j1} - q_{s1}) \left(\frac{e_j - e_s}{nm_s} - \frac{2e_j}{M} \right), \quad (1.5)$$

$$A_{p1} = \frac{\nu_1 + B \sum_{j=1}^n (q_{j2} - q_{p2}) (e_j - e_p)}{n},$$

$$A_{p2} = \frac{\nu_2 + B \sum_{j=1}^n (q_{j1} - q_{p1}) (e_p - e_j)}{n}. \quad (1.6)$$

Оператор H_0 зависит только от относительных координат, и, следовательно, пространство функций $\varphi(q)$ инвариантно для него. Заметим также, что поскольку оператор H и функция $f(r, \nu)$ инвариантны относительно перестановок координат тождественных частиц системы, то тем же свойством обладает и оператор H_0 (это можно проверить и непосредственно).

1.3. Работать с оператором H_0 вида (1.4) не всегда удобно, поэтому постараемся переписать H_0 в другой форме. Введем скалярное произведение

$$(\rho, \tilde{\rho})_2 = \sum_{s=1}^n m_s (\rho_s, \rho_s)_{R^2},$$

пространство относительного движения в направлении осей x и y

$$R_{0\perp} = \left\{ \rho \mid \rho = (\rho_1, \dots, \rho_n), \sum_{j=1}^n m_j \rho_j = 0 \right\}$$

и проектор (в смысле введенного скалярного произведения $(\cdot, \cdot)_2$) $P_{0\perp}$ на пространство $R_{0\perp}$. Обозначим через $\tilde{\nabla}_\perp(q_\perp)$ вектор-оператор

$$\left(\frac{\nabla_{1\perp}(q)}{m_1}, \dots, \frac{\nabla_{n\perp}(q)}{m_n} \right)$$

и положим $\nabla_\perp^0(q) = P_{0\perp} \tilde{\nabla}_\perp(q)$.

Согласно [3] $\nabla_\perp^0 = (\nabla_{1\perp}^0, \nabla_{2\perp}^0, \dots, \nabla_{n\perp}^0)$, где $\nabla_{s\perp}^0 = (\nabla_{s1}^0, \nabla_{s2}^0)$ и ∇_{sp}^0 дается формулой (1.2) с $p = 1, 2$. Векторный оператор $\nabla_\perp^0$ можно рассматривать как оператор градиента для относительного движения системы в плоскости x, y , который при отсутствии магнитного поля получается после обычного отделения движения центра масс в этой плоскости. Можно предположить, что если операторы $\nabla_{j\perp}(q_\perp)$ выразить через операторы $\nabla_{s\perp}^0$, то мы получим оператор H_0 в форме, в некотором смысле близкой к той, которая соответствовала бы отделению движения центра масс (хотя такое отделение и невозможно, если не все частицы тождественны). Несложные вычисления показывают, что

$$H_0 = \left(\frac{1}{i} \nabla_\perp^0 - A_\perp, \frac{1}{i} \nabla_\perp^0 - A_\perp \right)_2 + T_3^0 + V(q), \quad (1.7)$$

где

$$A_\perp = \left(\frac{A_{1\perp}}{m_1}, \frac{A_{2\perp}}{m_2}, \dots, \frac{A_{n\perp}}{m_n} \right),$$

$A_{t\perp}$ то же, что в (1.4), (1.6).

Положим $D_\perp = P_{0\perp} A_\perp$, $F = A_\perp - D_\perp$. Поскольку $(\nabla_\perp^0, F)_2 = 0$, то

$$H_0 = \left(\frac{1}{i} \nabla_\perp^0 - D_\perp, \frac{1}{i} \nabla_\perp^0 - D_\perp \right)_2 + (F, F)_2 + T_3^0 + V(q), \quad (1.8)$$

где

$$\begin{aligned} F &= (F_1, \dots, F_n), \quad F_i = (F_{i1}, F_{i2}), \quad F_{i1} = \left(\nu_1 + 2B \sum_{s=1}^n q_{s2} e_s \right) M^{-1}, \\ F_{i2} &= \left(\nu_2 - 2B \sum_{s=1}^n q_{s1} e_s \right) M^{-1}, \quad D_\perp = (D_1, \dots, D_n), \quad D_s = (D_{s1}, D_{s2}), \end{aligned}$$

$D_{sp}, p = 1, 2$, те же, что в (1.5).

Оператор H_0 будем рассматривать на функциях $\varphi(q_1, \dots, q_n)$. Так как координаты q_i удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{s=1}^n m_s q_s = 0,$$

то мы можем рассматривать оператор H_0 в $\mathcal{L}_2(R_0)$, где

$$R_0 = \left\{ q \mid q = (q_1, \dots, q_n), \sum_{s=1}^n m_s q_s = 0 \right\}.$$

Определим оператор H_0 на $C_0^2(R_0)$ и расширим его до самосопряженного, сохраняя прежнее обозначение. Область определения H_0 обозначим через $D(H_0)$.

1.4. Учтем перестановочную симметрию системы. Пусть $P^{(\alpha)}$ – проектор на подпространство функций, преобразующихся по неприводимому представлению типа α группы S перестановок тождественных частиц системы,

$$\mathcal{L}_2^{(\alpha)}(R_0) = P^{(\alpha)} \mathcal{L}_2(R_0), \quad D^{(\alpha)} = P^{(\alpha)} D(H_0), \quad H_0^{(\alpha)} = P^{(\alpha)} H_0.$$

$H_0^{(\alpha)}$ – ограничение оператора H_0 на подпространство функций симметрии α .

Наша цель – исследование спектра оператора $H_0^{(\alpha)}$.

2. О СУЩЕСТВЕННОМ СПЕКТРЕ ОПЕРАТОРА $H_0^{(\alpha)}$

2.1. Для описания существенного спектра нам нужно определить операторы энергии подсистем. Пусть $Z_s = (C_1, \dots, C_s)$ – произвольное разбиение исходной системы Z_1 на непересекающиеся кластеры. Определим конфигурационное пространство $R_0[Z_s]$ для введенного разбиения Z_s

$$R_0[Z_s] = \left\{ q \mid q = (q_1, \dots, q_n), \sum_{j \in C_t} m_j q_{j3} = 0, t = 1, 2, \dots, s \right\}$$

и положим

$$H_0(Z_s) = \left(\frac{1}{i} \nabla_{\perp}^0 - A_{\perp}, \frac{1}{i} \nabla_{\perp}^0 - A_{\perp} \right)_2 + T_3^0(Z_s) + V_{Z_s}, \quad (2.1)$$

где

$$V_{Z_s}(q) = \frac{1}{2} \sum_{C_j \in Z_s} \sum_{p, t \in C_j} V_{pt}(q_{pt}), \quad T_3^0(Z_s) = \sum_{j=1}^s T_3^0[C_j], \quad (2.2)$$

$$T_3^0[C] = - \sum_{t \in C} m_t \nabla_{t3}^0{}^2[C],$$

$$\nabla_{t3}^0[C] = m_t^{-1} \frac{\partial}{\partial q_{t3}[C]} - M[C]^{-1} \sum_{p \in C} \frac{\partial}{\partial q_{p3}[C]}, \quad (2.3)$$

$$M[C] = \sum_{t \in C} m_t, \quad q_{t3}[C] = z_t - M[C]^{-1} \sum_{k \in C} m_k z_k = q_t - M[C]^{-1} \sum_{k \in C} m_k q_{k3},$$

$$t \in C, \quad C = C_1, \dots, C_s.$$

$H_0(Z_s)$ является оператором энергии системы s не взаимодействующих между собой кластеров $C_1, \dots, C_s$ в однородном магнитном поле при фиксированном значении псевдомомента всей системы. Мы рассматриваем оператор $H_0(Z_s)$ в пространстве $\mathcal{L}_2(R_0[Z_s])$.

2.2. Пусть $S(Z_s)$ – группа перестановочной симметрии Z_s , порождаемая перестановками тождественных частиц внутри кластеров C_t и перестановками тождественных кластеров из Z_s между собой (если таковые в Z_s имеются). Положим $R_c[Z_s] = R_0 \setminus R_0[Z_s]$ и обозначим возможные типы неприводимых представлений группы $S(Z_s)$ в $\mathcal{L}_2(R_0[Z_s])$ и $\mathcal{L}_2(R_c[Z_s])$ соответственно через β и γ . Будем писать $\beta \prec \alpha$, если найдется такой тип γ , что хотя бы одна неприводимая компонента тензорного произведения представлений типов β и γ группы $S(Z_s)$ типа β содержится в неприводимом представлении группы S типа α после сужения последнего с S на $S(Z_s)$. Пусть $P^{(\beta)}(Z_s)$ – проектор в $\mathcal{L}_2(R_0[Z])$ на подпространство функций симметрии β и $H_0^{(\beta)}(Z_s) = P^{(\beta)}(Z_s)H_0(Z_s)$. Положим

$$\mu^{(\beta)}(Z_s) = \inf H_0^{(\beta)}(Z_s), \quad \mu^{(\alpha)} = \min_{\beta, \beta \prec \alpha} \min_{Z_s, s \geq 2} \mu^{(\beta)}(Z_s). \quad (2.4)$$

2.3. ТЕОРЕМА 2.1. *Существенный спектр оператора $H_0^{(\alpha)}$ состоит из всех точек полуоси $[\mu^{(\alpha)}, +\infty)$:*

$$\sigma_{\text{ess}}(H_0^{(\alpha)}) = [\mu^{(\alpha)}, +\infty). \quad (2.5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Эквивалентный результат без учета симметрии совершенно другим методом получен ранее в [1].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку нам удалось записать оператор H_0 в относительных координатах, можно применить для доказательства методику работ [3, 4], разработанную для случая, когда возможно полное отделение движения центра масс. А именно, мы разбиваем конфигурационное пространство R_0 на области, отвечающие всевозможным разбиениям системы, и далее оцениваем квадратичную форму оператора $H_0^{(\alpha)}$ на последовательностях Вейля по каждой из этих областей. Так, получается оценка

$$\inf \sigma_{\text{ess}}(H_0^{(\alpha)}) \geq \mu^{(\alpha)}. \quad (2.6)$$

Затем для любого $\lambda > \mu^{(\alpha)}$ мы строим последовательность нормированных функций $\omega_p(q)$ так, что

$$\|(H_0^{(\alpha)} - \lambda)\omega_p(q)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } p \rightarrow \infty. \quad (2.7)$$

Так как в доказательстве (2.7) отсутствуют какие-либо новые моменты по сравнению с доказательством из [3, п. 2.7, 2.8], то мы его не повторяем и будем доказывать только (2.6).

2.4. Пусть $Z_s = (C_1, \dots, C_s)$,

$$R_0(Z_s) = \left\{ q \mid q = (q_1, \dots, q_n), \sum_{j \in C_i} m_j q_j = 0, i = 1, \dots, s \right\}, \quad (2.8)$$

$P_0(Z_s)$ и $P_c(Z_s)$ – проекторы на $R_0(Z_s)$ и $R_c(Z_s) = R_0 \oplus R_0(Z_s)$ в смысле скалярного произведения

$$(r, \tilde{r})_3 = \sum_{p=1}^n m_p (r_p, \tilde{r}_p)_{R^3}, \quad (2.9)$$

где $r = (r_1, \dots, r_n)$, $\tilde{r} = (\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_n)$.

Положим

$$|q|_3^2 = \sum_{i=1}^n (q_i, q_i) m_i, \quad \tau_1 = |q|_3, \quad \tau_{Z_s} = |P_0(Z_s)q|_3 |P_c(Z_s)q|_3^{-1}.$$

Заметим, что согласно работе [5, с. 125]

$$\begin{aligned} |P_0(Z_s)q|_3^2 &= \sum_{C_i \in Z_s} \frac{1}{2M[C_i]} \sum_{p, k \in C_i} m_p m_k |q_p - q_k|^2, \\ |P_c(Z_s)q|_3^2 &= \frac{1}{M} \sum_{C', C'' \in Z} M[C'] M[C''] |q_c[C'] - q_c[C'']|^2, \end{aligned}$$

где

$$M[C] = \sum_{i \in C} m_i, \quad q_c[C] = \sum_{j \in C} \frac{m_j q_j}{M[C]},$$

и очевидно, что

$$q_p - q_k = r_p - r_k, \quad q_c[C'] - q_c[C''] = r_c[C'] - r_c[C''] = \sum_{j \in C'} \frac{m_j r_j}{M[C']} - \sum_{j \in C''} \frac{m_j r_j}{M[C'']}.$$

Пусть $a(1) < b(1)$ – большие, $a(s) < b(s)$, $s \geq 2$, – малые числа, выбранные так же, как в [3, п. 2.4]. Определяем вещественные дважды кусочно-непрерывно дифференцируемые функции $u_s(\tau)$, $v_s(\tau)$ так, что $0 \leq u_s(\tau)$, $v_s(\tau) \leq 1$, $u_s(\tau) = 1$ при $\tau \in [0, a(s)]$, $u_s(\tau) = 0$ при $\tau \geq b(s)$ и $u_s^2(\tau) + v_s^2(\tau) = 1$.

Положим

$$u_{Z_s} = u_s(\tau_{Z_s}), \quad v_{Z_s} = v_s(\tau_{Z_s}).$$

Пусть $g_k(q)$ – последовательность Вейля, отвечающая точке λ существенного спектра оператора H_0 , $\psi \equiv g_k$,

$$\hat{\psi}_0 \equiv \psi, \quad \hat{\psi}_i = \hat{\psi}_{i-1} \left(1 - \sum_{Z_i} u_{Z_i}^2 \right)^{1/2}, \quad \psi_{i-1, Z_i} = \hat{\psi}_{i-1} u_{Z_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.10)$$

Каждая из функций $\psi_{i, Z_{i+1}}$ обладает тем свойством, что $\text{supp } \psi_{i, Z_{i+1}}$ лежит в области конфигурационного пространства, которая отвечает разбиению системы Z_{i+1} на $i + 1$ кластер, т.е. области, в которой взаимодействия между частицами разных кластеров из Z_{i+1} малы и стремятся к нулю при $a(1) \rightarrow \infty$.

В силу соотношений (2.5) и (2.6) из [3] мы получаем, что для больших $a(1) = a(1, \epsilon)$ и $\forall \epsilon > 0$ выполняются неравенства

$$(H_0 g_k, g_k) \geq \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{Z_{j+1}} (H_0(Z_{j+1}) \psi_{j, Z_{j+1}}, \psi_{j, Z_{j+1}}) - 2\epsilon \|g_k\|^2, \quad (2.11)$$

$$(H_0(Z_{j+1}) \psi_{j, Z_{j+1}}, \psi_{j, Z_{j+1}}) \geq \mu^{(\alpha)} \|\psi_{j, Z_{j+1}}\|^2, \quad j \neq 0. \quad (2.12)$$

Остается оценить величину

$$(H_0(Z_1) \psi_{0, Z_1}, \psi_{0, Z_1}).$$

Очевидно, что $H_0(Z_1) = H_0$. Далее, в ограниченной области $|q|_3 \leq b$ оператор H_0 с граничным условием Дирихле при $|q|_3 = b$ имеет чисто дискретный спектр, накапливающийся только к $+\infty$. Поэтому и в силу того, что $\|g_k\|_{|q|_3 \leq b(1)} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, мы получаем для больших k оценку

$$(H_0 \psi_{0, Z_1}, \psi_{0, Z_1}) \equiv (H_0 g_k u_{Z_1}, g_{u_k} u_{Z_1}) \geq \mu^{(\alpha)} \|\psi_{0, Z_1}\|^2. \quad (2.13)$$

Из неравенств (2.11) – (2.13), а также учитывая лемму 3.5 работы [6], по которой

$$\text{supp } \psi_{j, Z_{j+1}} \cap \text{supp } \psi_{j, Z'_{j+1}} = \emptyset,$$

если $Z_{j+1} \neq Z'_{j+1}$, мы получаем для больших k

$$(H_0 g_k, g_k) \geq \mu^{(\alpha)} \|g_k\|^2 - 2\epsilon \|g_k\|^2.$$

Отсюда следует, что

$$\lambda \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} (H_0 g_k, g_k) \geq \mu^{(\alpha)}.$$

Таким образом, $\sigma_{\text{ess}}(H_0) \subset [\mu^{(\alpha)}, +\infty)$, т.е. оценка (2.6) доказана.

Доказательство обратного включения $[\mu^{(\alpha)}, +\infty) \subset \sigma_{\text{ess}}(H_0)$ следует из (2.7). Теорема 2.1 доказана.

3. О ДИСКРЕТНОМ СПЕКТРЕ ОПЕРАТОРА H_0

3.1. В этом разделе мы изучаем дискретный спектр оператора $H_0^{(\alpha)}$ при $n = 2$. Частицы 1, 2 не могут быть тождественными, т.к. имеют заряды разных знаков. Поэтому для двухчастичных систем при $Q = 0$ мы можем отойти от общего подхода (где координаты q_1 и q_2 были равноправны) и учесть, что

$$q_1 = \frac{m_2}{m_1}(r_1 - r_2), \quad q_2 = -\frac{m_1}{m_2}(r_1 - r_2),$$

так что фактически мы рассматриваем оператор на функциях $\varphi(q_1, q_2) = \omega(r_1 - r_2)$. Полагая $u = (u_1, u_2, u_3) = r_1 - r_2 = q_1 - q_2$, получаем, что на функциях $\omega(u)$ оператор (1.4) запишется в виде

$$\begin{aligned} H_0 = & -\frac{1}{M_R} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_j^2} - \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \left(\frac{\nu_1 + 2Beu_2}{2} \right) M_{12} - \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \left(\frac{\nu_2 - 2Beu_1}{2} \right) M_{12} + \\ & + \frac{1}{M_R} \left(\frac{\nu_1 + 2Beu_2}{2} \right)^2 + \frac{1}{M_R} \left(\frac{\nu_2 - 2Beu_1}{2} \right)^2 + V(u), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где

$$\frac{1}{M_R} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \quad M_{12} = \frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1},$$

e – заряд 1-й частицы. Делая замену переменных $t_2 = u_2 + \nu_1/2Be$, $t_1 = u_1 - \nu_2/2Be$, $t_3 = u_3$ и группируя соответствующим образом члены в (3.1), имеем

$$\begin{aligned} H_0 = & -\delta \left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} \right) - \frac{1}{M_R} \frac{\partial^2}{\partial t_3^2} + M_{12} \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t_1} - Bet_2 \right)^2 + \\ & + M_{12} \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t_2} + Bet_1 \right)^2 + \delta B^2 e^2 (t_1^2 + t_2^2) + V(\tilde{t}), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$\delta = \frac{2}{m_1} > 0, \quad \tilde{t} = (\tilde{t}_{perp}, t_3) = \left(t_1 + \frac{\nu_2}{2Be}, t_2 - \frac{\nu_1}{2Be}, t_3 \right).$$

Согласно теореме 2.1 граница существенного спектра оператора H_0 равна $\mu = \inf H_0(Z_2)$, где

$$\begin{aligned} H_0(Z_2) = & -\delta \left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} \right) + M_{12} \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t_1} - Bet_2 \right)^2 + \\ & + M_{12} \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t_2} + Bet_1 \right)^2 + \delta B^2 e^2 (t_1^2 + t_2^2) \end{aligned} \quad (3.3)$$

и $Z_2 = \{(1), (2)\}$ есть единственно возможное разбиение исходной системы на не взаимодействующие между собой частицы.

3.2. Пусть $\sigma_d(h)$ и $\sigma_{\text{ess}}(h)$ – дискретный и существенный спектры произвольного оператора h .

ЛЕММА 3.1. *Оператор $H_0(Z_2)$ имеет чисто дискретный спектр¹⁾.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\sigma_{\text{ess}}(H_0(Z_2)) \neq \emptyset$ и $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(H_0)$. Положим $t_\perp = (t_1, t_2)$. Тогда существует последовательность функций $\{g_s(t_\perp)\}$ такая, что $\|H_0(Z_2)g_s - \lambda g_s\| \rightarrow 0$, $\|g_s\| = 1$, $g_s \rightarrow 0$ в $\mathcal{L}_2(R^2)$.

Легко видеть, что

$$\sup_s (H_0(Z_2)g_s, g_s) < +\infty,$$

следовательно,

$$\sup_s \|\nabla_{t_\perp} g_s\| < +\infty,$$

и в соответствии с теоремой вложения последовательность $\{g_s(t_\perp)\}$ компактна в $\mathcal{L}_2(\Omega)$ для любой ограниченной области $\Omega \subset R^2$. Диагональным процессом выберем из $\{g_s(t_\perp)\}$ подпоследовательность, сходящуюся в $\mathcal{L}_2(\Omega)$ для любой ограниченной области Ω , и сохраним за ней прежнее обозначение. Пусть $g_0(t_\perp)$ – предельная функция для $\{g_s(t_\perp)\}$. Так как $\{g_s(t_\perp)\}$ сходится к $g_0(t_\perp)$ также слабо, то в силу единственности

¹⁾Этот результат ранее другим методом получен в [7].

слабого предела $g_0(t_\perp) \equiv 0$. Следовательно, в любом шаре $S_N = \{t_\perp, |t_\perp| \leq N\}$ выполняется $g_s(t_\perp) \rightarrow 0$ в $\mathcal{L}_2(S_N)$ и, значит, $(|t_\perp|^2 g_s, g_s) \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$. Поэтому

$$(H_0(Z_2)g_s, g_s) \rightarrow \infty,$$

что невозможно. Следовательно, предположение $\sigma_{\text{ess}}(H_0(Z_2)) \neq \emptyset$ неверно; существенный спектр оператора $H_0(Z_2)$ пуст, т.е. $\sigma(H_0(Z_2)) = \sigma_d(H_0(Z_2))$, и лемма доказана.

Таким образом, число μ есть изолированное конечнократное собственное значение оператора $H_0(Z_2)$. Согласно [7] кратность $\mu = 1$. Пусть $\varphi(t_\perp)$ – нормированная собственная функция оператора $H_0(Z_2)$, отвечающая числу μ .

ЛЕММА 3.2. *Функция $\varphi(t_\perp)|t_\perp|^2$ лежит в $\mathcal{L}_2(R^2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично приведенному для леммы 3.3 работы [8].

3.3. ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть найдутся $N > 0$, $q_0 < 0$, $0 < \gamma < 2$ такие, что*

$$V(t) \leq q_0 |t|^{-\gamma} \quad \text{при} \quad |t| > N.$$

Тогда спектр $\sigma_d(H_0)$ бесконечен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(t_3) \in C_0^\infty$, $\text{supp } f(t_3) \subset [N, +\infty)$, $\|f\| = 1$, $f_k(t_3) = \sqrt{k}f(kt_3)$, $k > 0$, $\psi_k(t) = \varphi(t_\perp)f_k(t_3)$. Имеем $\|\psi_k\| = 1$ и

$$(H_0\psi_k, \psi_k) = \mu + M_R^{-1} \int_0^\infty \left| \frac{df_k}{dt_3} \right|^2 dt_3 + \iiint |\varphi(t_\perp)|^2 |f_k(t_3)|^2 V(|\tilde{t}|) dt_\perp dt_3.$$

Полагая в интегралах $t_3 = sk^{-1}$, получим

$$\begin{aligned} (H_0\psi_k, \psi_k) &= \mu + \frac{k^2}{M_R} \int_0^\infty \left| \frac{df(s)}{ds} \right|^2 ds + \iiint_{|s| \geq N} |\varphi(t_\perp)f(s)|^2 V(\tilde{t}_\perp, sk^{-1}) dt_\perp ds \leq \\ &\leq \mu + k^2 c_1 + k^\gamma c_2(k), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $c_1 > 0$ и

$$c_2(k) = q_0 \iiint_{|s| \geq N} \frac{|\varphi(t_\perp)f(s)|^2 dt_\perp ds}{(|\tilde{t}_\perp|k|^2 + s^2)^{\gamma/2}}.$$

Так как $c_2(k) < 0$ и $c_2(k) \not\rightarrow 0$ при $k \rightarrow 0$, то из неравенства (3.4) вытекает, что при малых k

$$(H_0\psi_k, \psi_k) < \mu.$$

Поэтому $\sigma_d(H_0) \neq \emptyset$. Пусть l – любое целое положительное число. Построим такое подпространство $\mathcal{M}$ размерности l , что при $\psi \in \mathcal{M}$

$$(H_0\psi, \psi) < \mu \|\psi\|^2.$$

Отсюда следует, что размерность линейной оболочки собственных функций дискретного спектра оператора H_0 больше или равна l . Так как число l произвольно, то дискретный спектр H_0 бесконечен.

Для построения $\mathcal{M}$ определим функции $\omega_i(t_3) \in C_0^\infty$, $\|\omega_i\|_{R^1} = 1$, $\text{supp } \omega_i \subset [N + i, N + i + 1)$, $i = 1, 2, \dots, l$. Положим $\omega_{ik}(t_3) = \sqrt{k}\omega_i(kt_3)$ и $\psi_{ik}(t) = \varphi(t_\perp)\omega_{ik}(t_3)$. Аналогично предыдущему можно показать, что при малом k

$$(H_0\psi_{ik}, \psi_{ik}) < \mu, \quad i = 1, 2, \dots, l.$$

Поскольку $\text{supp } \psi_{i,k} \cap \text{supp } \psi_{j,k} = \emptyset$ при $i \neq j$, то для любой функции

$$\Psi_k(t) = \sum_{j=1}^l d_j \psi_{j,k}$$

выполняются соотношения

$$\|\Psi_k\|^2 = \sum_{j=1}^l \|\psi_{j,k}\|^2 |d_j|^2 = \sum_{j=1}^l |d_j|^2$$

и

$$(H_0\Psi_k, \Psi_k) = \sum_{j=1}^l |d_j|^2 (H_0\psi_{j,k}, \psi_{j,k}) < \mu \|\Psi_k\|^2. \quad (3.5)$$

В силу (3.5) подпространство

$$\mathcal{M} = \left\{ \sum_{j=1}^l d_j \psi_{j,k} \mid d_j - \text{любые, } k - \text{малое} \right\}$$

обладает требуемыми свойствами.

3.4. Для получения дальнейших результатов в отношении дискретного спектра оператора H_0 наложим более жесткие ограничения на потенциал $V(t)$. Будем считать, что можно указать такие $N > 0$, $\gamma > 0$, $q_0 \in R^1$, что

$$V(t) = q_0|t|^{-\gamma} \quad \text{при } |t| > N. \quad (3.6)$$

Пусть $c_0 > 0$, $b > 0$ — некоторые константы, которые будут определены в следующем разделе. Введем эффективные потенциалы

$$V^{1(2)}(\zeta) = \begin{cases} q_0|\zeta|^{-\gamma} \pm c_0|\zeta|^{-\gamma+2} & \text{при } |\zeta| > b, \\ 0 & \text{при } |\zeta| \leq b \end{cases} \quad (3.7)$$

и операторы

$$h(V^{1(2)}) = -\frac{1}{M_R} \frac{d^2}{d\zeta^2} + V^{1(2)}(\zeta), \quad \zeta \in R^1. \quad (3.8)$$

Обозначим через $N(\lambda, V^{1(2)})$ и $N(\mu + \lambda)$ размерности линейных оболочек собственных функций операторов $h(V^{1(2)})$ и H_0 , отвечающих собственным значениям этих операторов, не превосходящим соответственно λ и $\mu + \lambda$ ($\lambda < 0$).

ТЕОРЕМА 3.2. Для некоторого $c > 0$ и $\forall \lambda < 0$ имеют место оценки

$$-c + N(\lambda, V^{(1)}) \leq N(\mu + \lambda) \leq c + N(\lambda, V^{(2)}). \quad (3.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 3.2 дано в разделе 4.

Теорема 3.2 сводит вопрос о структуре дискретного спектра оператора H_0 с фиксированным псевдомоментом к вопросу о структуре дискретного спектра некоторых эффективных одномерных операторов, и это позволяет получить дальнейшие результаты в отношении спектра H_0 .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Эффективный оператор не зависит от фиксированного значения псевдомомента $\nu = (\nu_1, \nu_2)$. Однако от него может зависеть величина c .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорема 3.2 и последующие теоремы 3.3, 3.4 по формулировкам и методике доказательства похожи на аналогичные теоремы из [8], где для операторов вида (1.1) вместо ограничения на подпространство функций с фиксированным псевдомоментом рассматривались ограничения на подпространство функций фиксированной $SO(2)$ -симметрии. И хотя, с одной стороны, подход [3] не работает для нейтральных систем, а, с другой, — изучаемый здесь оператор H_0 не обладает $SO(2)$ -симметрией, тем не менее техника [8] оказывается полезной в рассматриваемой ситуации.

3.5. Следующие результаты вытекают из теоремы 3.2 и найденных в [9, 10] спектральных асимптотических оценок для операторов вида (3.8).

ТЕОРЕМА 3.3. Дискретный спектр оператора H_0 конечен, если $\gamma > 2$ или если $\gamma \leq 2$, но выполняется хотя бы одно из условий:

- 1) $\gamma = 2$, $q_0 \geq -(1/4)M_R^{-1}$,
- 2) $\gamma > 0$, $q_0 > 0$.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть $\lambda \rightarrow -0$. Тогда:

- 1) если $\gamma < 2$, $q_0 < 0$, то

$$N(\mu + \lambda) = |\lambda|^{(\gamma-2)/2\gamma} m M_R^{1/\gamma} |q_0|^{1/\gamma} J + O(\ln |\lambda|), \quad (3.10)$$

где

$$J = \gamma^{-1} \int_1^\infty (u-1)^{1/2} u^{-(\gamma+1)/\gamma} du,$$

- 2) если $\gamma = 2$, $q_0 < -0.25M_R^{-1}$, то

$$N(\mu + \lambda) = \frac{1}{2\pi} |\ln |\lambda|| m(4|q_0|M_R - 1)^{1/2} + o(|\ln |\lambda||). \quad (3.11)$$

Отметим, что соотношение (3.10) при $\gamma = 1$ дает асимптотическую оценку дискретного спектра гамильтониана атома водорода (с ядром конечной массы) при фиксации псевдомомента.

Естественно, что из теорем 3.3 и 3.4 следует соответственно конечность $\sigma_d(H_0)$ в случае, если $V(t) \geq q|t|^{-\gamma}$ при $|t| > N$, где q и γ подчиняются условиям теоремы 3.3, и бесконечность $\sigma_d(H_0)$ (с оценкой числа $N(\mu + \lambda)$ снизу), если $V(t) \leq q_0|t|^{-\gamma}$ при $|t| > N$, где q_0 и γ удовлетворяют требованиям теоремы 3.4. В частности, теорема 3.1 тоже следует из теоремы 3.4, но мы привели независимое доказательство теоремы 3.1, т.к. оно очень простое в отличие от доказательства теоремы 3.2 (из которой и следует утверждение теоремы 3.4).

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2

4.1. При доказательстве теоремы 3.2 используются геометрические методы. Это доказательство основано на построении таких подпространств $\mathcal{M}_i(\lambda) \subset \mathcal{D}(H_0)$, $i = 1, 2$, что для всех $\lambda < 0$

$$(H_0\psi, \psi) < (\mu^\sigma + \lambda)\|\psi\|^2, \quad \psi \in \mathcal{M}_1(\lambda), \quad (4.1)$$

$$(H_0\psi, \psi) > (\mu^\sigma + \lambda)\|\psi\|^2, \quad \psi \perp \mathcal{M}_2(\lambda), \quad (4.2)$$

и на оценке размерности этих пространств с помощью величин $N(\lambda, V^{(i)})$. В качестве подпространства $\mathcal{M}_1(\lambda)$ мы возьмем подпространство всех функций ψ вида

$$\psi = \sum_j c_j \varphi(t_\perp) f_j(t_3),$$

где $f_j(t_3)$ – собственные функции оператора

$$h_1(b) = -\frac{1}{M_R} \frac{d^2}{dt_3^2} + V^{(1)}(t_3) \quad (4.3)$$

в области $|t_3| \geq b$ с нулевыми граничными условиями при $|t_3| = b$, отвечающие собственным значениям $\lambda_j < \lambda$; c_j – любые вещественные числа, $b > 0$ – некоторая константа. Так же как и в [11], проверяется, что

$$\dim \mathcal{M}_1(\lambda) \geq N(\lambda, V^{(1)}) - \text{const}. \quad (4.4)$$

Если (4.1) выполняется, то $N(\mu + \lambda) \geq \dim \mathcal{M}_1(\lambda)$ и в силу (4.4) имеем

$$N(\mu + \lambda) \geq N(\lambda, V^{(1)}) - \text{const}.$$

Таким образом, для оценки величины $N(\mu + \lambda)$ снизу надо доказать (4.1).

4.2. Пусть $\psi \in \mathcal{M}_1(\lambda)$. Очевидно, что

$$(H_0\psi, \psi) = (H_0(Z_2)\psi, \psi) + (V(\tilde{t})\psi, \psi) - \frac{1}{M_R} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t_3^2}, \psi \right).$$

Так как оператор $H_0(Z_2)$ не зависит от переменной t_3 , то

$$(H_0(Z_2)\psi, \psi) = \mu \|\psi\|^2. \quad (4.5)$$

Далее очевидно, что

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial t_3^2} \psi, \psi \right) = -\left(\frac{\partial^2}{\partial t_3^2} \Phi, \Phi \right), \quad (4.6)$$

где

$$\Phi(t_3) = \sum_j c_j f_j(t_3).$$

Оценим член $(V(\tilde{t})\psi, \psi)$. Поскольку при $t_3 \in \text{supp } f_j(t_3)$ выполняется условие $|t_3| \geq b$, то при $b > N$ и $t_3 \in \text{supp } \psi$ имеем $V(\tilde{t}) = q_0|\tilde{t}|^{-\gamma}$.

Пусть $\beta > 0$, $\Omega_\beta = \{t | |\tilde{t}_\perp| < \beta|t_3|\}$, где $\tilde{t}_\perp = (\tilde{t}_1, \tilde{t}_2)$, $\tilde{t}_1 = t_1 + \nu_2/2Be$, $\tilde{t}_2 = t_2 - \nu_1/2Be$, $\chi(t)$ – характеристическая функция области Ω_β .

Учитывая, что вследствие леммы 2.2

$$\varphi(t_\perp)|t_\perp|^2 \in \mathcal{L}_2(R^2), \quad (4.7)$$

имеем

$$|((1 - \chi(t))V(\tilde{t})\psi, \psi)| \leq C\|\Phi|t_3|^{-(1+\gamma/2)}\|^2. \quad (4.8)$$

Здесь и далее через C обозначаем константы, величины которых несущественны.

Для оценки формы $(\chi V(\tilde{t})\psi, \psi)$ воспользуемся разложением функции $V(\tilde{t}) = q_0|\tilde{t}|^{-\gamma}$ в области $\Omega_\beta \cap \text{supp } \psi$ по формуле Тейлора. Получим

$$\left| \frac{1}{(|\tilde{t}_\perp|^2 + t_3^2)^{\gamma/2}} - \frac{1}{|t_3|^\gamma} \right| \leq C \frac{|\tilde{t}_\perp|^2}{|t_3|^{2+\gamma}}. \quad (4.9)$$

В силу (4.7), (4.9) выполнено соотношение

$$|(\chi V(\tilde{t})\varphi\Phi, \varphi\Phi) - q_0(\chi|t_3|^{-\gamma}\varphi\Phi, \varphi\Phi)| \leq C\|\Phi|t_3|^{-(1+\gamma/2)}\|^2. \quad (4.10)$$

Далее, аналогично (4.8) имеем, что

$$|((1 - \chi)|t_3|^{-\gamma}\varphi\Phi, \varphi\Phi)| \leq C\|\Phi(t_3)|t_3|^{-1-\gamma/2}\|^2. \quad (4.11)$$

В соответствии с (4.8), (4.10), (4.11) получаем

$$(V(|\tilde{t}|)\psi, \psi) \leq (q_0|t_3|^{-\gamma}\Phi, \Phi) + C\|\Phi(t_3)|t_3|^{-(1+\gamma/2)}\|^2. \quad (4.12)$$

Из соотношений (4.5), (4.6), (4.12) следует, что для некоторой константы c_0 , не зависящей от функций $f_j(t_3)$, выполняется неравенство

$$(H_0\psi, \psi) \leq \left\{ -\frac{1}{M_R} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t_3^2}, \Phi \right) + (\Phi, q_0|t_3|^{-\gamma}\Phi) + c_0(\Phi, |t_3|^{-2-\gamma}\Phi) \right\} + \mu\|\psi\|^2. \quad (4.13)$$

По построению функции Φ являются линейными комбинациями ортонормированных собственных функций оператора $h(V^{(1)})$ (см. (3.7), (3.8)), отвечающими собственным значениям, меньшим λ . Поэтому каждое слагаемое в фигурных скобках в (4.13) не превосходит $\lambda\|\Phi\|^2$, и мы окончательно получаем, что

$$(H_0\psi, \psi) \leq (\mu + \lambda)\|\psi\|^2.$$

Таким образом неравенство (4.1) доказано.

4.3. Переходим к доказательству неравенства (4.2), а если точнее, к построению такого подпространства $\mathcal{M}_2(\lambda)$, что (4.2) верно при $\psi \perp \mathcal{M}_2(\lambda)$. Пусть $u_1(t_3), v_1(t_3) \in C^2(R_+^1)$, $u_1^2(t_3) + v_1^2(t_3) = 1$, $u_1(t_3) = 1$ при $|t_3| \leq b$, $u_1(t_3) = 0$ при $|t_3| \geq b_1 > b > 0$, $u_1(t_3) \geq u_1(t'_3)$ при $t_3 \geq t'_3$, $\lim_{t \rightarrow b} v_1^2(t)(1 - v_1^2(t))^{-1} = 0$.

Тогда в силу леммы 3.2 [12] $\forall \epsilon > 0$ при большом $b > 0$ и $\forall \psi \in \mathcal{D}(H_0)$ имеем

$$(H_0 \psi, \psi) \geq L_1[\psi u_1(|t_3|)] + L_2[\psi v_1(|t_3|)], \quad (4.14)$$

где

$$\begin{aligned} L_1[\varphi] &= (H\varphi, \varphi) - \epsilon \|\varphi\|^2, \\ L_2[\varphi] &= (H\varphi, \varphi) - \epsilon \|\varphi|t|^{-(1+\gamma/2)}\|^2. \end{aligned}$$

Оператор H_0 в области $|t_3| \leq b_1$ имеет чисто дискретный спектр, накапливающийся к $+\infty$. Действительно, обычное разделение переменных и лемма 3.1 показывают, что оператор

$$T = \frac{1}{2} \left(H_0(Z_2) - \frac{1}{M_R} \frac{\partial^2}{\partial t_3^2} \right)$$

с граничным условием Дирихле при $|t_3| = b_1$ имеет в области $\Omega = \{t ||t_3| \leq b_1\}$ чисто дискретный спектр; оператор $T + V(\tilde{t})$ ограничен снизу, и, значит, оператор $H_0 = 2T + V(\tilde{t})$ имеет в Ω чисто дискретный спектр.

Поэтому по заданным b_1 и b можно найти такое конечномерное подпространство $\mathcal{M}'_2$, что при $\psi u_1 \perp \mathcal{M}'_2$ выполняется неравенство

$$L_1[\psi u_1] \geq \mu \|\psi u_1\|^2.$$

Отсюда и из (4.14) следует, что при $\psi u_1 \perp \mathcal{M}'_2$ имеет место оценка

$$(H_0 \psi, \psi) \geq \mu \|\psi u_1\|^2 + L_2[\psi v_1]. \quad (4.15)$$

Определим пространство $\mathcal{M}_2''(\lambda)$ как множество функций

$$\psi = \sum_j C_j \varphi(t_\perp) f_j(t_3),$$

где C_j – любые вещественные числа, функция $\varphi(t_\perp)$ – нормированная собственная функция оператора $H_0(Z_2)$, отвечающая числу μ (см. п. 3.2), $f_j(t_3)$ – собственные функции оператора $h_2(b)$ вида (4.3) (с $V^{(2)}(t_3)$ вместо $V^{(1)}(t_3)$) в области $|t_3| \geq b$ с нулевым граничным условием при $|t_3| = b$, отвечающие его собственным значениям, меньшим λ , $\lambda < 0$. Положим

$$\mathcal{M}_2(\lambda) = \mathcal{M}'_2(\lambda) \cup \mathcal{M}_2''(\lambda)$$

и докажем, что пространство $\mathcal{M}_2(\lambda)$ обладает требуемыми свойствами.

Так же как и в работе [11], убеждаемся, что

$$\dim \mathcal{M}_2(\lambda) \leq N(\lambda, V^{(2)}) + \text{const}.$$

Если (4.2) выполняется, то

$$\dim \mathcal{M}_2(\lambda) \geq N(\mu + \lambda),$$

и мы получаем требуемую оценку величины $N(\mu + \lambda)$ сверху. Таким образом, нам остается доказать (4.2).

4.4. Положим $\psi_{Z_2} = \psi v_1$ и запишем функции $\psi_{Z_2}(t)$ в виде

$$\psi_{Z_2} = \varphi(t_\perp)\Phi(t_3) + g(t), \quad (4.16)$$

где $\Phi(t_3) = (\psi_{Z_2}, \varphi)_{R^2}$, $(g(t), \varphi)_{R^2} = 0 \quad \forall t_3$.

Очевидно, что

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial t_3^2} \psi_{Z_2}, \psi_{Z_2}\right) = -\left(\frac{\partial^2}{\partial t_3^2} \Phi, \Phi\right) - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial t_3^2}, g\right) \quad (4.17)$$

и

$$(H_0(Z_2)\psi_{Z_2}, \psi_{Z_2}) \geq \mu \|\psi_{Z_2}\|^2 + \eta \|g\|^2, \quad (4.18)$$

где η – расстояние от μ до ближайшей точки спектра оператора $H(Z_2)$.

Вследствие (4.17), (4.18) для оценки квадратичной формы оператора H_0 нам не хватает только оценки величины $(V\psi_{Z_2}, \psi_{Z_2})$, которая и будет проведена далее.

Пусть, как и в п. 4.2, $\beta > 0$ – малое число,

$$\Omega_\beta = \{t | t \in R^3, |\tilde{t}_\perp| < \beta |t_3|\}$$

и $\chi(t)$ – характеристическая функция области Ω_β . Имеем

$$((1 - \chi)V\psi_{Z_2}, \psi_{Z_2}) \geq -2(|(1 - \chi)V\varphi\Phi, \varphi\Phi| - 2(|(1 - \chi)Vg, g|). \quad (4.19)$$

Поскольку $|V(\tilde{t})| \leq c|t_3|^{-\gamma}$ при $|t_3| > b$ и $\varphi(t_\perp)|t_\perp| \in \mathcal{L}_2(R^2)$, то при достаточно большом b из (4.19) вытекает неравенство

$$((1 - \chi)V\psi_{Z_2}, \psi_{Z_2}) \geq -\epsilon \|g\|^2 - C \|\Phi |t_3|^{-(1+\gamma/2)}\|^2. \quad (4.20)$$

Так как $V = \chi V + (1 - \chi)V$, то далее естественно оценить величину

$$(\chi V\psi_{Z_2}, \psi_{Z_2}) = (\chi Vg, g) + (\chi V\varphi\Phi, \varphi\Phi) + 2 \operatorname{Re}(\chi V\varphi\Phi, g). \quad (4.21)$$

При большом $b > 0$ имеем

$$|(V\chi g, g)| \leq \epsilon \|g\|^2. \quad (4.22)$$

Аналогично выводу соотношений (4.9), (4.10) получим

$$|(\chi V\varphi\Phi, \varphi\Phi) - q_0 \|\Phi |t_3|^{-\gamma/2}\|^2| \leq C \|\Phi |t_3|^{-(1+\gamma/2)}\|^2, \quad (4.23)$$

$$|\chi V(\tilde{t}) - q_0 |t_3|^{-\gamma}| \leq C |\tilde{t}_\perp|^2 |t_3|^{-2-\gamma} \quad \text{при } |t_3| > b. \quad (4.24)$$

4.5. Для оценки “перекрестного члена” в (4.21) заметим, что

$$\begin{aligned} |(\chi V \varphi \Phi, g)| &\leq |(\chi(V - q_0 |t_3|^{-\gamma}) \varphi_i \Phi, g)| + |(q_0 |t_3|^{-\gamma} \varphi \Phi, g)| + \\ &+ |((1 - \chi) q_0 |t_3|^{-\gamma} \varphi \Phi, g)|. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Оценим каждое из слагаемых в правой части (4.25). Аналогично (4.8) получаем неравенство

$$|((1 - \chi) q_0 |t_3|^{-\gamma} \varphi \Phi, g)| \leq \epsilon \|g\|^2 + C \|\Phi |t_3|^{-(2+\gamma)}\|^2. \quad (4.26)$$

В силу (4.7) и (4.24) находим, что

$$|(\chi(V - g |t_3|^{-\gamma}) \varphi \Phi, g)| \leq \epsilon \|g\|^2 + C \|\Phi |t_3|^{-(2+\gamma)}\|^2. \quad (4.27)$$

Наконец, по построению

$$(|t_3|^{-\gamma} \varphi \Phi, g) = 0. \quad (4.28)$$

Применяя соотношения (4.26)–(4.28) для оценки правой части неравенства (4.25), получим

$$|(\chi V \varphi \Phi, g)| \leq \epsilon \|g\|^2 + C \|\Phi |t_3|^{-(2+\gamma)}\|^2. \quad (4.29)$$

Используя (4.22), (4.23) и (4.29), мы выводим из (4.21), что

$$(\chi V \psi_{Z_2}, \psi_{Z_2}) \geq -\epsilon \|g\|^2 + q_0(\Phi, |t_3|^{-\gamma} \Phi) - C \|\Phi |t_3|^{-(1+\gamma/2)}\|^2. \quad (4.30)$$

Складывая (4.20) и (4.30), имеем

$$(V \psi_{Z_2}, \psi_{Z_2}) \geq -2\epsilon \|g\|^2 + (\Phi, q_0 |t_3|^{-\gamma} \Phi) - \epsilon \|\Phi |t_3|^{-(1+\gamma/2)}\|^2. \quad (4.31)$$

Наконец, очевидно, что

$$\|\psi_{Z_2} |t_3|^{-(1+\gamma/2)}\|^2 \leq \epsilon \|g\|^2 + C \|\Phi |t_3|^{-(1+\gamma/2)}\|^2. \quad (4.32)$$

Используя для оценки функционала $L_2[\psi v_1] \equiv L_2[\psi_{Z_2}]$ в неравенстве (4.15) соотношения (4.17), (4.18), (4.31) и (4.32), мы получаем окончательно, что при $\psi \perp \mathcal{M}'_2$ выполняется неравенство

$$(H_0 \psi, \psi) \geq \mu \|\psi\|^2 + \left[-\frac{1}{M_R} \left(\frac{\partial^2}{\partial t_3^2} \Phi, \Phi \right) + q_0(|t_3|^{-\gamma} \Phi, \Phi) - C \|\Phi |t_3|^{-(1+\gamma/2)}\|^2 \right]. \quad (4.33)$$

Пусть $c_0 = C$ (см. п. 3.4). Так как $\psi \perp \mathcal{M}_2$, то функция $\Phi(t_3)$ не может содержать проекции на собственные функции оператора $h_2(b)$, отвечающие собственным значениям $\lambda' \leq \lambda$; поэтому выражение в квадратных скобках в (4.33) будет больше, чем $\lambda \|\Phi\|^2$. Учитывая это, а также соотношение $\|\Phi\|^2 = \|\psi_{Z_2}\|^2 - \|g\|^2 \leq \|\psi\|^2$, из (4.33) получаем, что при $\psi \perp \mathcal{M}_2(\lambda)$ выполняется неравенство $(H\psi, \psi) \geq (\mu + \lambda) \|\psi\|^2$.

Теорема доказана.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 96-01-00478) и ИНТАС (грант 95-0414).

Список литературы

- [1] *J. E. Avron, J. W. Herbst, B. Simon.* Ann. Phys. 1978. V. 114. P. 431.
- [2] *Г. М. Жислин.* Алгебра и анализ. 1996. Т. 8. № 1. С. 190–199.
- [3] *С. А. Вугальтер, Г. М. Жислин.* ТМФ. 1993. Т. 97. № 1. С. 94–112.
- [4] *G. Zhislin.* Preprint ESI № 166. Wienn, 1994.
- [5] *М. А. Анто́нец, Г. М. Жислин, И. А. Шерешевский.* Приложение к кн.: К. Йоргенс, И. Вайдман “Спектральные свойства гамильтоновых операторов”. М.: Мир, 1976.
- [6] *S. A. Vugalter, G. M. Zhislin.* Rep. Math. Phys. 1984. V. 19. P. 39–90.
- [7] *A. Jensen, S. Nakamura.* The 2D Schrödinger equation for a neutral pair in a constant magnetic field. Preprint R-96-2017. Aalborg University, 1996.
- [8] *С. А. Вугальтер, Г. М. Жислин.* Алгебра и анализ. 1993. Т. 5. № 2. С. 108–125.
- [9] *W. Kirsch, B. Simon.* Ann. of Phys. 1988. V. 183. № 1. P. 122–130.
- [10] *В. Я. Иеруй.* ДАН СССР. 1984. Т. 276. № 2. С. 268–270.
- [11] *С. А. Вугальтер, Г. М. Жислин.* Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. № 6. С. 119–155.
- [12] *С. А. Вугальтер, Г. М. Жислин.* ТМФ. 1983. Т. 55. № 1. С. 66–77.

Поступила в редакцию 28.IV.1997 г.

S. A. Vugalter, G. M. Zhislin

**SPECTRAL PROPERTIES OF HAMILTONIANS WITH MAGNETIC
FIELD UNDER FIXATION OF PSEUDOMOMENTUM. I**

It is established that the energy operator of an n -particle neutral system in a homogeneous magnetic field with a fixed pseudomomentum can be written as some operator in the space of relative motion. For this operator, the HVZ-theorem for the localization of the essential spectrum is proved, accounting for the permutational symmetry for any $n \geq 2$. For $n = 2$, the conditions of finiteness and infinity of the discrete spectrum and spectral asymptotic behavior are found. The result can be applied, in particular, to the Hamiltonian of the hydrogen atom in the homogeneous magnetic field.