Общероссийский математический портал

Э. А. Аринштейн, Прямой вариационный метод в теории жидкости, *ТМФ*, 2004, том 141, номер 1, 152–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf109>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 11:39:14

ПРЯМОЙ ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД В ТЕОРИИ ЖИДКОСТИ

Рассмотрена вариационная задача, эквивалентная гиперцепному приближению для бинарной (радиальной) функции классической теории жидкости. Показано, что дополнительное условие, включающее в функционал вариационной задачи наряду с полной также прямую корреляционную функцию, можно учесть, рассматривая обе эти функции как независимые при соответствующей модификации варьируемого функционала.

Ключевые слова: распределение, полная корреляция, прямая корреляция, вариационный принцип, прямой метод.

1. ВВЕДЕНИЕ

Современная статистическая теория жидкости базируется на аппарате частичных функций распределения (частичных плотностей) [1], [2]. Для простых жидкостей с центральным бинарным потенциалом взаимодействия унарная плотность является константой, что существенно упрощает задачу. Достаточно найти бинарную корреляционную функцию $h(r)$, называемую так же радиальной либо полной; через нее выражаются давление, сжимаемость и внутренняя энергия жидкости. Для определения теплоемкости требуется найти тройную и четверную корреляции, через которые выражается производная от бинарной корреляции по температуре; но считается, что знания бинарной функции достаточно для построения термодинамики жидкости. Для этой функции предложен ряд приближенных уравнений: Перкуса–Йевики, гиперцепное и ряд других. Для обоснования этих уравнений используется ряд качественных соображений, при этом наряду с полной корреляционной функцией в рассмотрение вводится прямая корреляционная функция Орнштейна–Цернике (ОЦ) $C(r)$, связанная с полной корреляцией $h(r)$ соотношением ОЦ [1]

$$h(1, 2) = C(1, 2) + \int h(1, 3)C(2, 3)\rho(3) d(3).$$

*Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия. E-mail: earin@utmn.ru

Первоначальный смысл прямой корреляционной функции, отраженный в названии, не согласуется с ее поведением на малых расстояниях, полученным при решении названных выше приближенных уравнений. Тем не менее существует подход, при котором соотношение ОЦ рассматривается как фундаментальное уравнение теории [2], хотя очевидно, что одного соотношения для определения двух функций недостаточно. Для получения замкнутой теории вводятся дополнительные связи между прямой и полной корреляциями, точность которых установить бывает трудно или даже невозможно.

Ясно, что погрешности, вносимые при использовании решений этих уравнений, оценить также довольно трудно. Тем не менее эти решения, а также решения уравнений с некоторыми поправками находятся в качественном согласии с результатами расчетов методами молекулярной динамики для состояний, далеких от критического. Но и для этих состояний многие приближенные уравнения теории жидкости остаются термодинамически несогласованными, т.е. значения различных термодинамических величин, вычисленные при использовании полученных из этих уравнений радиальных функций, не удовлетворяют термодинамическим тождествам Максвелла.

Альтернативный подход к выводу приближенных уравнений для бинарной корреляционной функции основан на использовании метода производящего функционала, введенного Боголюбовым [3] и эквивалентного методу Гиббса. При этом прямая корреляция возникает как вспомогательная функция, определяемая соотношением ОЦ, а характер приближения определяется гипотезами о свойствах старших корреляций, основанными на соображениях, допускающих хотя бы качественные оценки. Существенно, что получаемые таким образом приближенные уравнения эквивалентны вариационной задаче для соответствующего выражения (приближенного) удельного термодинамического потенциала большого ансамбля (или удельной свободной энергии) как функционала от радиальной функции. Таким образом, одновременно решается задача определения радиальной функции и термодинамики жидкости, причем найденный потенциал дает полную термодинамическую информацию, что обеспечивает термодинамическую согласованность значений термодинамических величин, получаемых его дифференцированием.

Первоначальная формулировка вариационного принципа для термодинамического потенциала как функционала от бинарной функции содержит вспомогательную прямую функцию ОЦ, которую необходимо выразить через полную бинарную функцию. Это затрудняет использование эффективных прямых вариационных методов для решения вариационной задачи. Метод преодоления этого затруднения и рассматривается в настоящей работе.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛЕЖАНДРА ПРОИЗВОДЯЩЕГО ФУНКЦИОНАЛА

Совокупность частичных функций распределения F_n (либо частичных плотностей $\rho_n = \rho_0^n F_n$, ρ_0 – средняя плотность) определяется в термодинамическом пределе про-

изводящим функционалом Боголюбова [3]

$$L(u) = \frac{Z(u)}{Z(0)} = \sum \frac{1}{n!} \int \rho_n(\{n\}) \prod u(i) d\{n\}, \quad (1)$$

где $Z(u)$ – статистическая сумма системы в произвольном дополнительном внешнем поле $-\beta\varphi(i) = \ln(1 + u(i))$. Функционал Боголюбова удовлетворяет уравнению

$$\frac{\delta^n L(u)}{\prod \delta u(i)} = z^n e^{-\beta U_n} L(\tilde{u}^n), \quad (2)$$

где $\tilde{u}^n(k) = (1 + u(k)) \prod_i (1 + f(i, k))$, $1 + f(i, k) = e^{-\beta\varphi(i, k)}$, $\varphi(i, k)$ – потенциал парного взаимодействия и z – активность. Функционал

$$W(u) = \ln L(u) = \beta(\Omega(0) - \Omega(u)) \quad (3)$$

имеет смысл изменения термодинамического потенциала в этом поле и является производящим для корреляционных функций, осуществляющих разложение Урседа–Майера функций ρ_n . Частичные плотности во внешнем поле имеют вид

$$\rho_n^u(\{s\}) = \frac{\prod (1 + u(i))}{L(u)} \frac{\delta^n L(u)}{\prod \delta u(i)}.$$

В частности, унарная плотность равна

$$\rho_1(q) = (1 + u(q)) \frac{\delta W(u)}{\delta u(q)}. \quad (4)$$

Если внешнее поле имеет вид поля группы дополнительных частиц, то частичные плотности в этом случае равны $\rho_s^u(\tilde{u}^n) = \rho_{s+n}^u / \rho_n^u$.

Частичное суммирование разложения производящего функционала достигается переходом к новой функциональной переменной – унарной плотности, который осуществляется функциональным преобразованием Лежандра

$$W_\rho(\rho_1) = W(u) - \int \rho_1(q) \ln(1 + u(q)) dq + \Psi[\rho_1],$$

определяющим функционал от неоднородной унарной плотности [4] в соответствующем внешнем поле. Произвольный функционал $\Psi[\rho_1]$ выбирается в виде

$$\Psi[\rho_1] = \int \left(\rho_1(q) \ln \frac{\rho_1(q)}{e \rho_{1,0}(q)} + \rho_{1,0}(q) \right) dq,$$

что обеспечивает выполнение условий $W_\rho(\rho_{1,0}) = W(0) = 0$, $W_1(1 | \rho_{1,0}) = 0$, где

$$W_1(q | \rho_1) = \frac{\delta W_\rho(\rho_1)}{\delta \rho_1(q)} = \ln \frac{\rho_1(q)}{(1 + u(q)) \rho_{1,0}(q)}, \quad (5)$$

$\rho_{1,0}$ — исходная унарная плотность. Таким образом,

$$W_\rho(\rho_1) = W(u) + \int \left(\rho_1(q) \ln \frac{\rho_1(q)}{e\rho_{1,0}(q)(1+u(q))} + \rho_{1,0}(q) \right) dq, \quad (6)$$

$$\delta W_\rho = \int \ln \frac{\rho_1(q)}{\rho_{1,0}(q)(1+u(q))} dq.$$

Введем обозначения $W_n(\{n\} | \rho) = \delta^n W_\rho / \prod \delta \rho(i)$, $\rho_2(1, 2) = \rho_1(1)\rho_1(2)(1+h(1, 2))$. В этих обозначениях связи унарной и бинарной плотностей с производными от нового производящего функционала имеют вид

$$W_1(1) = \ln \frac{\rho_1(1)}{\rho_{1,0}(1)(1+u(1))} = \ln \frac{\delta W}{\rho_{1,0}(1)\delta u(1)}, \quad (7)$$

$$\ln \frac{1+h(1, 2)}{1+f(1, 2)} = W_1(2 | (1+h(1, i))\rho_1(i)) - W_1(2 | \rho_1). \quad (8)$$

Дифференцируя соотношение (7), получим связь старых и новых переменных:

$$W_2(1, 2) = \frac{\delta(1, 2)}{\rho_1(1)} + \frac{1}{1+u(1)} \frac{\delta u(1)}{\delta \rho_1(2)},$$

или

$$\frac{\delta W}{\delta u(1)} \frac{\delta u(1)}{\delta \rho_1(2)} = \rho_1(1)W_2(1, 2) - \delta(1, 2).$$

С другой стороны,

$$W_2(1, 2) = \frac{\delta}{\delta \rho_1(2)} \ln \frac{\delta W}{\delta u(1)} = \int \left(\frac{\delta W}{\delta u(1)} \frac{\delta W}{\delta u(q)} \right)^{-1} \frac{\delta^2 W}{\delta u(1)\delta u(q)} \frac{\delta W}{\delta u(q)} \frac{\delta u(q)}{\delta \rho_1(2)} dq.$$

Окончательно, используя предыдущее выражение, получим

$$W_2(1, 2) = h(1, 2) + \int W_2(1, 3)h(2, 3)\rho_1(3) d(3). \quad (9)$$

Сравнивая это соотношение между производными старого и нового производящих функционалов с соотношением ОП, видим, что $W_2(1, 2) = C(1, 2)$, т.е. является прямой корреляционной функцией.

Соотношение (6), так же как и явное выражение (3) для унарной плотности ρ_1 , может быть использовано для определения связи унарной плотности и дополнительного поля, если найден явный вид функционалов $W_\rho(\rho_1)$ и $W(u)$, что можно сделать, только используя некоторое приближение. Тем не менее из обратного преобразования Лежандра, которое определяется условием $\delta\Omega(\rho_1)/\delta\rho_1(q)|_{u(q)=\text{const}} = 0$, следует, что справедлив вариационный принцип для термодинамического потенциала как функционала от унарной плотности. Так как старшие частичные плотности можно рассматривать как унарную плотность в поле дополнительной группы частиц, то можно установить вариационный принцип, определяющий и эти функции. Однако для того чтобы найти явный вид функционала вариационной задачи, требуется более детальный анализ функционального уравнения Боголюбова или эквивалентного ему.

3. ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП

Уравнение для производящего функционала W_ρ , эквивалентное уравнению Боголюбова (2), следует из этого уравнения при любом n , в частности при $n = 1$. Используя выражение (4), получим

$$F(1) = \ln \frac{\rho_1(1)}{z(1+u(1))} - W((1+u(k))(1+f(1,k)) - 1) + W(u) = 0.$$

Выражая функционал W через W_ρ в соответствии с уравнением (6), получим

$$F(1) = \ln \frac{\rho_1(1)}{z(1+u(1))} + \int \left((1+h(1,q)) \ln \frac{1+h(1,q)}{1+f(1,q)} - h(1,q) \right) dq - \\ - W_\rho((1+h(1,k))\rho_1(k)) + W_\rho(\rho_1) + \int h(1,q)W_1(q|\rho_1)\rho_1(q) dq = 0. \quad (10)$$

Чтобы построить функционал вариационной задачи, эквивалентной уравнению (10), необходимо проверить, что функция $F(1)$ является градиентом. Для этого необходимо выполнение условия симметрии производной от градиента [5], которое на основании уравнения (8) и соотношения ОЦ (9) имеет вид

$$\frac{\delta F(1|\rho_1)}{\delta \rho_1(2)} = W_2(1,2) = \frac{\delta F(2|\rho_1)}{\delta \rho_1(1)}.$$

При этом весьма существенно, что $\delta F(1)/\delta h(1,2) = 0$ на основании уравнения (8), поэтому зависимость $F(1)$ от $h(1,q)$ не входит ни в условие симметрии производной от $F(1)$, ни в функционал вариационной задачи, что формально выражается условием $h(1,q) = \text{const}$. Таким образом, $F(1|\rho)$ является градиентом, и функционал вариационной задачи имеет вид $\int_0^1 dt \int \rho_1(1)F(1|t\rho_1) d(1)$ [5]. Входящий сюда интеграл по объему имеет смысл произведения макроскопического объема системы на среднее значение подинтегрального выражения. Используя явный вид (10) функции $F(1|\rho_1)$, получим функционал вариационной задачи

$$A(\rho_1, h(i,k)) = \int \rho_1(q) \ln \frac{\rho_1(q)}{ez(1+u(q))} dq + \\ + \frac{1}{2} \int \left((1+h(1,2)) \ln \frac{1+h(1,2)}{1+f(1,2)} - h(1,2) \right) \rho_1(1)\rho_1(2) d(1,2) - \\ - \int_0^1 dt \int_0^t (t-s) ds \frac{\partial^2}{\partial s^2} \int \rho_1(1)W_\rho(t\rho_1(k) + s\rho_1(k)h(1,k)) d(1). \quad (11)$$

Функционал вариационной задачи линеен по макроскопическому объему, значения его производных по активности и обратной температуре совпадают с числом частиц и внутренней энергией, следовательно, он является на экстремали термодинамическим потенциалом большого ансамбля, умноженным на β . Таким образом, принимая за исходный

пункт построения теории жидкости вариационную задачу для термодинамического потенциала, мы автоматически обеспечиваем термодинамическую согласованность теории в любом приближении при условии, что это приближение закладывается в выражение функционала вариационной задачи.

Метод построения приближенных выражений для термодинамического потенциала основан на использовании разложения выражения

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dt \int_0^t (t-s) ds \frac{\partial^2}{\partial s^2} \int \rho_1(1) W_\rho(t\rho_1(k) + s\rho_1(k)h(1, k)) d(1) = \\ & = \int_0^1 dt \int_0^t (t-s) ds \int \rho_1(1) h(1, 2) \rho_1(2) h(1, 3) \rho_1(3) \times \\ & \quad \times W_2(2, 3 | t\rho_1(k) + s\rho_1(k)h(1, k)) d(1, 2, 3) = \\ & = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n!} \int_0^1 t^n dt \int \rho_1(1) \prod_{\{n\}} h(1, i) \rho_1(i) W_n(\{n\} | t\rho_1) d(1, \{n\}). \end{aligned} \quad (12)$$

Простейшее приближение $W_2(2, 3 | t\rho_1(k) + s\rho_1(k)h(1, k)) \simeq W_2(2, 3 | t\rho_1)$ сохраняет в этом разложении один член и приводит к гиперцепному уравнению, которое может быть также получено при сохранении одного члена в разложении правой части уравнения (8). Гиперцепное приближение содержит только бинарную корреляционную функцию и связанную с ней соотношением ОЦ прямую корреляционную функцию и поэтому является замкнутым. Следующие члены разложения (12) и разложения правой части уравнения (8) содержат старшие прямые корреляции W_n , $n > 2$, которые могут быть найдены из уравнений для старших частичных плотностей в некотором приближении, например, в виде интегростепенного ряда. Таким путем могут быть получены поправки к гиперцепному приближению.

Удельный термодинамический потенциал однородной ($\rho_1(q) = \rho_0$) жидкости в отсутствие внешнего поля в гиперцепном приближении имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{A(\rho_1, h(i, k))}{V} &= \frac{\rho_0^2}{2} \int \left((1 + h(1, 2)) \ln \frac{1 + h(1, 2)}{1 + f(1, 2)} - h(1, 2) \right) d(2) + \\ &+ \rho_0^2 \ln \frac{\rho_0}{\epsilon z} dq - \frac{\rho_0^3}{2} \int_0^1 t^2 dt \int h(1, 2) h(1, 3) W_2(2, 3 | t\rho_0) d(2, 3). \end{aligned} \quad (13)$$

Вариационная задача для функционала (11) приводит не только к уравнению для унарной плотности, но также к уравнению для бинарной корреляции при варьировании по ней. При этом необходимо на основании соотношения ОЦ (9), в котором произведена замена $\rho_0 \rightarrow t\rho_0$, найти связь между вариациями функций h и W_2 и зависимость функции W_2 от параметра t . Из выражений

$$\begin{aligned} \delta W_2(1, 2) + t \int \delta W_2(1, 3) h(2, 3) \rho_1(3) d(3) &= \\ &= \delta h(1, 2) - t \int W_2(1, 3) \delta h(2, 3) \rho_1(3) d(3), \\ \frac{dW_2(1, 2)}{dt} &= \int W_2(1, 3) h(2, 3) \rho_1(3) d(3) + t \int \frac{dW_2(1, 3)}{dt} h(2, 3) \rho_1(3) d(3), \end{aligned}$$

справедливых не только при однородной, но и при произвольной плотности, и соотношения ОЦ получим

$$\begin{aligned}\delta W_2(1, 2) &= \int \delta h(3, 4) (\delta(1, 3) - t W_2(1, 3) \rho(3)) (\delta(2, 4) - t W_2(2, 4) \rho(4)) d(3, 4), \\ \frac{dW_2(1, 2)}{dt} &= - \int W_2(1, 3) W_2(2, 3) \rho_1(3) d(3).\end{aligned}$$

В итоге

$$\begin{aligned}\delta \frac{\rho_0^3}{2} \int_0^1 t^2 dt \int h(1, 2) h(1, 3) W_2(2, 3 | t \rho_0) d(2, 3) &= \\ &= \frac{\rho_0^3}{2} \int_0^1 \frac{d}{dt} (t^3 \delta h(1, 2) h(1, 3) W_2(2, 3 | t \rho_0) d(2, 3)) = \\ &= \frac{\rho_0^3}{2} \int \delta h(1, 2) h(1, 3) W_2(2, 3 | \rho_0) d(2, 3),\end{aligned}$$

что приводит к уравнению гиперцепного приближения как следствию вариационного принципа для функционала (13). Приведенные выкладки показывают тем не менее, что непосредственное применение эффективных прямых методов для реализации этого вариационного принципа затруднительно. Поэтому необходим другой подход для учета связи (9) между полной и прямой корреляционными функциями.

4. ПРЯМОЙ ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД

При реализации вариационного принципа для функционала (11) необходимо решить две проблемы: учет связи между полной и прямой корреляционными функциями и аппроксимацию старших прямых корреляций W_n , $n > 2$. Для решения первой из этих проблем используем функциональный аналог метода неопределенных множителей.

Произведем в уравнении (9) замену $\rho \rightarrow t\rho$, перенесем все члены в одну сторону, умножим полученное выражение на $\rho_1(1)\rho_1(2)\Lambda(1, 2 | t)/2$, содержащее неопределенный множитель $\Lambda(1, 2)$, проинтегрируем по координатам (1) и (2) и по t и вычтем из выражения (11) для функционала вариационной задачи. В дальнейшем будем считать, что все старшие функции W_n , $n > 2$, выражены только через полные корреляции h . Получим функционал, зависящий (кроме унарной плотности) от трех функций: $h(i, k)$, $W_2(i, k | t)$, $\Lambda(i, k | t)$ (функция h от параметра t не зависит). Теперь при решении вариационной задачи можно формально рассматривать эти функции как независимые. Вариация по функции $\Lambda(i, k | t)$ приводит к соотношению ОЦ (9), вариация по функции $W_2(i, k | t)$ дает уравнение

$$\Lambda(1, 2 | t) + t \int \Lambda(1, 3 | t) h(2, 3) \rho_1(3) d(3) - t \int h(1, 3) h(2, 3) \rho_1(3) d(3) = 0. \quad (14)$$

Из этого уравнения можно определить вспомогательную функцию (неопределенный множитель) $\Lambda(1, 2 | t)$ сверткой с выражением $\delta(1, 2) - tW_2(1, 2)\rho_1(2)$. Это дает на основании соотношения ОЦ выражение

$$\Lambda(1, 2 | t) = t \int h(1, 3)W_2(2, 3 | t)\rho_1(3) d(3) = h(1, 2) - W_2(1, 2 | t).$$

Таким образом, функцию $\Lambda(1, 2 | t)$ можно исключить из выражения для термодинамического потенциала, но функция $W_2(1, 2 | t)$ в отличие от первоначальной формулировки вариационной задачи остается независимой. Вариационный функционал (термодинамический потенциал) теперь приобретает вид

$$\begin{aligned} A(\rho_1, h(i, k)) = & \int \rho_1(q) \ln \frac{\rho_1(q)}{ez(1+u(q))} dq + \\ & + \frac{1}{2} \int \left((1 + h(1, 2)) \ln \frac{1 + h(1, 2)}{1 + f(1, 2)} - h(1, 2) \right) \rho_1(1)\rho_1(2) d(1, 2) - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^1 t^2 dt \int \rho_1(1)\rho_1(2)\rho_1(3)h(1, 2)W_2(1, 3 | t)W_2(2, 3 | t) d(1, 2, 3) - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^1 dt \int (h(1, 2) - W_2(1, 2))^2 \rho_1(1)\rho_1(2) d(1, 2) - \\ & - \sum_{n \geq 3} \frac{1}{n!} \int_0^1 t^n dt \int \rho_1(1) \prod_{\{n\}} h(1, i)\rho_1(i)W_n(\{n\} | t\rho_1) d(1, \{n\}). \end{aligned} \quad (15)$$

При этом все старшие корреляции W_n , $n > 2$, выражены через $h(i, k)$, функции $h(i, k)$ и $W_2(i, k | t)$ являются независимыми аргументами вариационной задачи. Легко видеть, что соотношение ОЦ является при таком подходе результатом варьирования полученного выражения по функции $W_2(i, k | t)$. В гиперцепном приближении все W_n , $n > 2$, полагаются равными нулю.

Полученный модифицированный функционал термодинамического потенциала позволяет использовать для реализации вариационной задачи эффективные прямые методы, что было в достаточной мере затруднительно для функционала (11). В частности, в качестве пробной бинарной функции может быть использована модель ближнего порядка [6], описываемая системой гауссовых вейвлетов, усредненных по направлениям смещений.

При вычислении поправок к гиперцепному приближению можно либо использовать разложение функций W_n , $n > 2$, в интегростепенные ряды по функции $h(1, 2)$, либо воспользоваться уравнениями для старших корреляций. В первом случае никаких изменений в схему реализации вариационной задачи вносить не придется, возрастет только объем вычислений [7]. Во втором случае изменится число подлежащих определению функций, изменятся связи между ними. Представляется, что более перспективным в этом случае будет переход к вариационному принципу для всех корреляционных функций, предложенный в работах [8]. Найденный в этих работах функционал термодинамического потенциала также содержит обобщенные прямые корреляции, связанные с

полными корреляциями соотношением, обобщающим соотношение ОЦ. Однако анализ этой проблемы выходит за рамки настоящей работы.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Минобразования РФ, грант № 01.01.002.

Список литературы

- [1] *К. Крокстон.* Физика жидкого состояния. М.: Мир, 1978; Физика простых жидкостей. Т. 1. Ред. Г. Темперли, Дж. Роулинсон, Дж. Рашбрук. М.: Мир, 1971; *Р. Балеску.* Равновесная и неравновесная статистическая механика. Т. 1. М.: Мир, 1971.
- [2] *Г. Н. Саркисов.* УФН. 2002. Т. 172. № 6. С. 647–669.
- [3] *Н. Н. Боголюбов.* Проблемы динамической теории в статистической физике. М.–Л.: Гостехиздат, 1946.
- [4] *Э. А. Аринштейн.* Функциональные преобразования в теории частичных функций распределения. В сб.: Проблемы статистической физики. Труды Тюменского государственного университета. Ред. Э. А. Аринштейн. Тюмень: Изд-во Тюменского ГУ, 1976. С. 25–50.
- [5] *М. М. Вайнберг.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М.: ГИТТЛ, 1956.
- [6] *Я. И. Френкель.* Кинетическая теория жидкостей. Л.: Наука, 1975.
- [7] *Э. А. Аринштейн, Е. С. Бриков, И. А. Гусев.* Вестник Тюменского госуниверситета. 2000. № 3. С. 35–39.
- [8] *Э. А. Аринштейн.* ТМФ. 2000. Т. 124. № 1. С. 136–147; *Э. А. Аринштейн, Р. М. Ганопольский.* ТМФ. 2002. Т. 131. № 2. С. 278–287.

Поступила в редакцию 29.XII.2003 г.