Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Шаповалов, И. В. Широков, Метод некоммутативного интегрирования линейных дифференциальных уравнений. Функциональные алгебры и некоммутативная размерная редукция, *ТМФ*, 1996, том 106, номер 1, 3–15

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1093>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 18:02:08

А.В. Шаповалов, И.В. Широков

МЕТОД НЕКОММУТАТИВНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ И НЕКОММУТАТИВНАЯ РАЗМЕРНАЯ РЕДУКЦИЯ

Метод некоммутативного интегрирования линейных дифференциальных уравнений в частных производных [1] обобщен на случай так называемых функциональных алгебр, для которых коммутатор образующих элементов является нелинейной функцией этих образующих. Линейная функция соответствует алгебре Ли, квадратичная – так называемым квадратичным алгебрам, нашедшим широкие применения в квантовой теории поля. Рассмотрен нетривиальный пример интегрирования уравнения Клейна–Гордона в искривленном пространстве, не допускающем разделение переменных. Проведена классификация четырех- и пятимерных квадратичных алгебр специальной структуры.

Предложен метод размерной редукции многомерного некоммутативно интегрируемого уравнения в частных производных. Редуцированное уравнение обладает в общем случае сложной функциональной алгеброй симметрии. Метод позволяет проинтегрировать редуцированное уравнение без использования функциональной алгебры этого уравнения в явном виде.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] развит метод некоммутативного интегрирования (МНИ) линейных дифференциальных уравнений (ЛДУ) в частных производных. Метод основан на теории некоммутативного интегрирования конечномерных гамильтоновых систем (см. [2, 3] и цитированную там литературу) и введенном в [1] понятии λ -представления алгебр Ли.

Интегрирование данного уравнения

$$H(x, \partial_x)\psi(x) = 0, \quad x \in R^m, \quad (1.1)$$

осуществляется с помощью некоммутативного множества L операторов, удовлетворяющих специальным условиям.

Мы используем основные понятия и обозначения работы [1]. Напомним, что под интегрируемостью уравнения (1.1) понимается построение параметрического семейства решений $\psi(x, \lambda)$, $\lambda \in \Lambda \subset C^{m-1}$, где Λ – некоторая область в пространстве параметров C^{m-1} , $x \in Q^m \subset R^m$, Q^m – область пространства R^m , $\psi \in C^\infty(Q^m \times \Lambda)$.

Вследствие локальности наших построений все рассматриваемые функции предполагаются гладкими, $\psi \in C^\infty(Q \times \Lambda)$. Наличие в решении $\psi(x, \lambda)$ $(m - 1)$ существенных параметров представляет собой требование локальной полноты решений $\psi(x, \lambda)$. В [1] рассмотрен случай, когда L является алгеброй Ли операторов симметрии уравнения, удовлетворяющей условию

$$\dim L + \text{ind } L = 2(m - 1). \quad (1.2)$$

Здесь $\dim L$, $\text{ind } L$ – размерность и индекс алгебры L , соответственно, m – число независимых переменных в уравнении (1.1). В случае алгебры L общего вида согласно [1] уравнение (1.1) может быть приведено к редуцированному уравнению

$$\tilde{H}(u, \partial_u, \lambda) \tilde{\psi}(u, \lambda) = 0 \quad (1.3)$$

с меньшим числом независимых переменных u_α , $\alpha = 1, \dots, m'$,

$$m' = m - \frac{1}{2}(\dim L + \text{ind } L).$$

На примере уравнения Клейна–Гордона в искривленном пространстве-времени в [1] показана принципиальная возможность построить базис в пространстве решений, когда уравнение не интегрируется методом разделения переменных.

Настоящая работа – прямое продолжение работы [1]. Ее целью является применение МНИ для обобщенных алгебраических конструкций, так называемых функциональных алгебр (или сокращенно F -алгебр), для которых коммутатор образующих элементов является в общем случае нелинейной функцией образующих (линейная функция соответствует алгебре Ли). Это оказывается возможным, т.к. необходимые для интегрируемости уравнения понятия, введенные для алгебр Ли, наследуются F -алгебрами. Частным случаем F -алгебр являются квадратичные алгебры [4, 5], нашедшие применение в квантовой теории поля. В задачах интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений квадратичные алгебры использовались в работах [6–9]. В п.2 данной работы они применены для интегрирования уравнений в частных производных.

МНИ позволяет строить отображение базиса уравнения в многомерном пространстве в базис уравнения с меньшим числом независимых переменных. Первое обладает симметрией простого вида и интегрируется с помощью МНИ. Второе уравнение может иметь симметрию сложного вида, использовать которую для построения решений затруднительно. Такое отображение названо нами некоммутативной размерной редукцией и рассмотрено в п.3.

2. F -АЛГЕБРЫ СИММЕТРИИ В МЕТОДЕ НЕКОММУТАТИВНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Рассмотрим пространство F линейных дифференциальных операторов, действующих в пространстве $C^\infty(Q^m)$. Функционально независимые операторы Y_i , $i, j, l, r =$

$1, \dots, k = \dim F$, образуют базис пространства F и удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[Y_i, Y_j] = c_{ij}(Y), \quad (2.1)$$

где c_{ij} — симметрические функции от Y_i . По определению функции c_{ij} удовлетворяют тождеству Якоби

$$[Y_i, c_{ij}(Y)] + [Y_i, c_{jl}(Y)] + [Y_j, c_{li}(Y)] = 0. \quad (2.2)$$

Такое линейное пространство F с заданной на нем операцией (2.1) назовем F -алгеброй. Введенное понятие является аналогом пуассоновых алгебр, используемых в теории конечномерных гамильтоновых систем [10]. Линейным функциям $c_{ij}(Y) = c_{ij}^l Y_l$, $c_{ij}^l = \text{const}$ соответствует алгебра Ли; если $c_{ij}(Y)$ квадратичны по Y_i , то F -алгебра называется квадратичной алгеброй [4–9, 11]. Некоммутативное интегрирование уравнения (1.1) с применением F -алгебр сопряжено с дополнительными трудностями по сравнению со случаем алгебр Ли, связанными с необходимостью решать некоторые вспомогательные уравнения высоких порядков. Для квадратичных алгебр эта задача оказывается проще, поэтому квадратичные алгебры представляют особый интерес в МНИ.

Обозначим $U(F)$ линейное пространство с базисом

$$X_{\alpha_1 \dots \alpha_r} = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} Y_{\alpha_{\sigma(1)}} \dots Y_{\alpha_{\sigma(r)}}, \quad X_{\alpha_1 \dots \alpha_r} |_{r=0} = 1.$$

Здесь $r = 0, 1, \dots$; $\alpha_r = 1, \dots, k$. Суммирование ведется по всем перестановкам σ группы S_r перестановок множества $(1, \dots, r)$. Очевидно, что $U(F)$ есть ассоциативная алгебра относительно обычного умножения дифференциальных операторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Назовем $U(F)$ обертывающей алгеброй F -алгебры.

Введем также дуальное пространство $U^*(F)$. Его элементами являются линейные функционалы $\xi: U(F) \rightarrow C^1$,

$$\xi(X_{\alpha_1 \dots \alpha_r}) = \xi\left(\frac{1}{r!} \sum_{\sigma} Y_{\alpha_{\sigma(1)}} \dots Y_{\alpha_{\sigma(r)}}\right) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma} \xi(Y_{\alpha_{\sigma(1)}}) \dots \xi(Y_{\alpha_{\sigma(r)}}) = \xi_{\alpha_1} \dots \xi_{\alpha_r},$$

где $\xi_{\alpha_l} = \xi(Y_{\alpha_l})$.

Основные понятия общей теории алгебр Ли нетрудно переформулировать для F -алгебр.

Отображение $\text{ad}: F \rightarrow F$ имеет вид

$$\text{ad } X(Y) = [X, Y], \quad X, Y \in F.$$

Коприсоединенное представление ad^* задается выражением

$$\text{ad}_X^* \xi(Y) = \xi([X, Y]), \quad \forall \xi \in F^*, \quad X, Y \in F.$$

Аннулятор ковектора ξ определяется следующим образом:

$$\text{Ann } \xi = \{X \in F \mid \text{ad}_X^* \xi = 0\}.$$

Ковектор ξ находится в общем положении, если размерность его аннулятора минимальна. Индекс F -алгебры ($\text{ind } F$) определим как размерность аннулятора ковектора общего положения:

$$\text{ind } F = \inf_{\xi \in F^*} (\dim \text{Ann } \xi).$$

Так как $\dim \text{Ann } \xi = \dim F - \text{rank}(\xi(c_{ij}(Y)))$, то

$$\text{ind } F = \dim F - \sup_{\xi \in F^*} \text{rank}(\xi(c_{ij}(Y))).$$

Построим точное неприводимое представление F -алгебры в пространстве $C^\infty(Q^m \times \Lambda)$. Для этого найдем набор дифференциальных операторов в пространстве параметров λ : $l(\lambda, \partial_\lambda, J)$ такой, что $[l_i, l_j] = -c_{ij}(l)$ с теми же функциями $c_{ij}(l)$, что и в (2.1). Здесь $\lambda \in C^s$, $s = \frac{1}{2}(\dim F - \text{ind } F)$, $J \in C^r$, $r = \text{ind } F$. Все операторы Казимира, т. е. элементы составляющие центр $Z(U(F))$ алгебры $U(F)$ в этом представлении являются функциями от переменных $J_1, \dots, J_r$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Представление F -алгебры операторами l_i назовем λ -представлением этой алгебры.

Базис пространства представления V_J F -алгебры определяется системой

$$Y_i(x, \partial_x) \psi_J(x, \lambda) = l_i(\lambda, \partial_\lambda; J) \psi_J(x, \lambda). \quad (2.3)$$

Параметры J нумеруют само представление, а параметры λ – базисные векторы пространства представления V_J . Совместность системы (2.3), а также точность и неприводимость представления обусловлены конструкцией представления алгебры F . В частности, функция $\psi_J(x, \lambda)$ является собственной функцией операторов Казимира:

$$K_p(Y) \psi_J(x, \lambda) \equiv \omega_p(J) \psi_J(x, \lambda), \quad p = 1, \dots, r.$$

Здесь $\omega_p(J)$ – независимые функции от параметров $J_1, \dots, J_r$.

Для того чтобы эффективно строить λ -представления, естественно расклассифицировать F -алгебры на полупростые, разрешимые, нильпотентные и др. Это можно сделать следующим образом. Определим идеал N F -алгебры:

$$[N, F] \subset U(N) \leftrightarrow [U(N), F] \subset U(N).$$

По аналогии с алгебрами Ли можно ввести последовательность идеалов $F^{(n)}$ таких, что $F^{(0)} = F$, $F^{(n)}$ – минимальное подпространство пространства $F^{(n-1)}$ такое, что $[F^{(n-1)}, F^{(n-1)}] \subset U(F^{(n)})$. Если $F^{(n)} = 0$ для некоторого n , то такую F -алгебру назовем разрешимой. Очевидно, что всякая разрешимая алгебра содержит коммутативный

идеал (если $F^{(n)} = 0$, то $F^{(n-1)}$ – коммутативный идеал). F -алгебру, не содержащую коммутативных идеалов, будем называть полупростой.

Так же как и в теории алгебр Ли, можно сформулировать аналог теоремы Леви–Мальцева: F -алгебра представляется в виде полупрямой суммы разрешимой и полупростой алгебр

$$F = R \triangleleft S : [S, S] \subset U(S), \quad [R, R] \subset U(R), \quad [R, S] \subset U(R).$$

Здесь R – разрешимая алгебра, S – полупростая алгебра, $\triangleleft$ – обозначает полупрямую сумму R и S .

Введем еще одну последовательность идеалов $F_{(n)}$: $F_{(0)} = F$, $F_{(n+1)}$ – минимальное подпространство пространства $F_{(n)}$ такое, что $[F, F_{(n)}] \subset U(F_{(n+1)})$. Если $F_{(n)} = 0$ для некоторого n , то такую алгебру будем называть нильпотентной. Так как $F^{(n)} \subset F_{(n)}$, то всякая нильпотентная F -алгебра разрешима. Обратное неверно. Из определения следует, что каждая нильпотентная F -алгебра обладает нетривиальным центром (если $F_{(n)} = 0$, то $F_{(n-1)} = Z(F)$ – центр).

Операторы Казимира полупростых F -алгебр полиномиальны по операторам Y_i . Для разрешимых F -алгебр операторы Казимира, как правило, имеют бесконечный порядок, и их поиск является самостоятельной задачей.

Перейдем к проблеме интегрирования скалярного уравнения. Аналог теоремы о некоммутативном интегрировании сформулируем следующим образом: пусть уравнение (1.1) допускает F -алгебру симметрии такую, что

$$\dim F + \text{ind } F = 2(m - 1), \quad (2.4)$$

тогда это уравнение интегрируемо в некоммутативном смысле.

Алгоритм интегрирования уравнения (1.1) с использованием F -алгебры симметрии операторов Y_i аналогичен рассмотренному в [1] случаю, когда операторы Y_i образовывали алгебру Ли.

В данной работе рассматриваются F -алгебры, состоящие из трех операторов первого порядка Y_i и одного оператора X второго порядка. Коммутационные соотношения для таких алгебр имеют вид

$$[Y_p, Y_q] = c_{ij}^l Y_l, \quad [Y_p, X] = A_p X + c_p^{ij} Y_i Y_j + c_p^i Y_i + c_p.$$

Здесь c_{pq}^i , A_p , c_p^{ij} , c_p^i , c_p – структурные константы квадратичной F -алгебры, которые удовлетворяют тождеству Якоби. Все индексы пробегают значения от 1 до 3. Все структурные константы являются тензорами относительно замены базиса в алгебре Ли, порожденной операторами $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$. Кроме замены базиса допустимым является преобразование

$$X \rightarrow aX + b^{pq} Y_p Y_q + c^p Y_p + c, \quad a \neq 0.$$

В приложении приведена классификация четырех- и пятимерных F -алгебр описанной выше структуры, которые позволяют проинтегрировать дифференциальные уравнения

с четырьмя независимыми переменными. В силу (2.4) эти F -алгебры подчиняются условию

$$\dim F + \operatorname{ind} F = 6. \quad (2.5)$$

Кроме того, в приложении не приведены F -алгебры, содержащие коммутативные тройки операторов не выше второго порядка, поскольку уравнения, допускающие эти трехмерные абелевы алгебры симметрии, интегрируются методом разделения переменных.

В качестве нетривиального примера рассмотрим случай четырехмерной алгебры 2“е” (см. приложение). Нетрудно проверить, что эта алгебра разрешима ($\{X, Y_2\}$ – коммутативный идеал). Реализуем операторы Y_i дифференциальными операторами первого порядка, а оператор X – оператором второго порядка с четырьмя независимыми переменными. Найдем метрический тензор нештеккелева типа такой, что

$$[\Delta, X] = [\Delta, Y_i] = 0. \quad (2.6)$$

Здесь $\Delta = \sqrt{g} \partial / \partial x^\alpha (g^{\alpha\beta} / \sqrt{g} \partial / \partial x^\beta)$, $g \equiv \det(g^{\alpha\beta})$. Выполнение условий (2.5) и (2.6) позволяет проинтегрировать уравнение Клейна–Гордона в римановом пространстве с метрическим тензором $g^{\alpha\beta}$:

$$H\varphi(x) = (\Delta - \varepsilon)\varphi(x) = 0. \quad (2.7)$$

Не для каждой F -алгебры существует метрика нештеккелева типа. В частности, в нашем случае F -алгебры 2“е” мы должны положить $b = 0$. Операторы Y_i , X и ненулевые компоненты метрического тензора $g^{\alpha\beta}$ имеют вид

$$\begin{aligned} Y_1 &= \partial / \partial x^2, \quad Y_2 = \partial / \partial x^3, \quad Y_3 = -\partial / \partial x^1 + x^2 \partial / \partial x^2; \\ X &= \exp(-x^1) \left\{ \left(4/(x^4)^2 \right) \partial^2 / \partial (x^1)^2 + 2(\alpha + \beta/(x^4)^2) \partial^2 / \partial x^1 \partial x^3 + \right. \\ &\quad + (4/x^4) \partial^2 / \partial x^1 \partial x^4 + \left[\frac{1}{4} (2\alpha\beta + \beta^2/(x^4)^2) + x^2 \exp(x^1) \right] \partial^2 / \partial (x^3)^2 + \\ &\quad + (\alpha x^4 + \beta/x^4) \partial^2 / \partial x^3 \partial x^4 + \partial^2 / \partial (x^4)^2 - 4/(x^4)^2 \partial / \partial x^1 - \\ &\quad \left. - \beta/(x^4)^2 \partial / \partial x^3 - 1/x^4 \partial / \partial x^4 \right\}; \\ g^{11} &= -4/(x^4)^2, \quad g^{13} = \alpha - \beta/(x^4)^2, \quad g^{23} = -\alpha^3 (x^4)^2 \exp(-x^1)/2, \\ g^{33} &= \gamma - \alpha^2 (x^4)^2 / 2 - \beta^2 / (4x^4)^2, \quad g^{44} = 1. \end{aligned}$$

Здесь α, β, γ – произвольные константы.

Поскольку операторы Y_1, Y_2 составляют коммутативный идеал, то в λ -представлении им соответствуют функции от переменной λ и двух параметров J_1, J_2 . Остальные операторы легко находятся из коммутационных соотношений. Окончательно имеем

$$l_1 = e^\lambda (\partial_\lambda + J), \quad l_2 = \omega, \quad l_3 = \partial_\lambda, \quad L = \omega^2 e^{-\lambda}.$$

Здесь для удобства мы ввели переобозначения: $\lambda_1 = \lambda$, $J_1 = J$, $J_2 = \omega$; оператор L соответствует оператору X . Первые три уравнения системы (2.3) дают

$$\varphi_{J\omega}(x, \lambda) = \exp[J(x^1 - \lambda) + \omega x^3] \psi_{J\omega}(u, x^4),$$

где $u \equiv e^{x^1}(x^2 - e^{-\lambda})$. Подставляя функцию $\varphi_{J\omega}(x, \lambda)$ в оставшееся уравнение системы (2.3) и в уравнение (2.7), получим на функцию $\psi_{J\omega}(u, x^4)$ два уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными

$$\tilde{X}(u, x^4, \partial_u, \partial_{x^4}) \psi_{J\omega}(u, x^4) = 0, \quad (2.8)$$

$$\tilde{\Delta}(u, x^4, \partial_u, \partial_{x^4}) \psi_{J\omega}(u, x^4) = \varepsilon \psi_{J\omega}(u, x^4). \quad (2.9)$$

Система уравнений (2.8), (2.9) совместна, т.к. оператор $\tilde{\Delta}$ является оператором симметрии для оператора $\tilde{X}$: $[\tilde{\Delta}, \tilde{X}] = R\tilde{X}$, R – некоторый оператор.

Уравнения (2.8), (2.9) невозможно решить методом разделения переменных вследствие невыполнения условий теоремы о разделении переменных [12], в частности, не существует функции f такой, что $[\tilde{\Delta}, f\tilde{X}] = 0$. В нашем примере система (2.3) имеет инвариант, т.е. такую функцию ξ , что $[Y_i - l_i, \xi] = [X - L, \xi] = 0$. Так как $\xi = x^4/u$, то $[\tilde{X}, \xi] = 0$. Введем оператор первого порядка $Y = [\tilde{\Delta}, \xi]$. Из тождества Якоби следует $[Y, \tilde{X}] = [R, \xi]\tilde{X}$, т.е. Y – оператор симметрии первого порядка уравнения (2.8). Делая замену независимых переменных и функции, приведем оператор Y к диагональному виду $Y = \partial/\partial\eta$. Оператор $\tilde{X}$ при этом будет зависеть от одной переменной. Решая (2.8), а затем (2.9), окончательно получим базис решений уравнения Клейна–Гордона в следующем виде:

$$\varphi_{J\omega}(x, \lambda) = \exp[J(x^1 - \lambda) + \omega x^3 + S] \cdot \{h_+(\xi) \exp(\sigma_+(\xi)h) + h_-(\xi) \exp(\sigma_-(\xi)h)\},$$

$$\xi = x^4(e^{x^1}(x^2 - e^{-\lambda}))^{-\frac{1}{2}}, \quad \eta = (x^4)^2/\xi,$$

$$\sigma_{\pm}(\xi) = \omega \left[-\alpha^3 \xi^3 - 4\alpha\xi \mp (\alpha^2 \xi^2 - 4)^{\frac{1}{2}} \right] / 8,$$

$$h_{\pm}(\xi) = h_{\pm}^0 \exp \left[\int \frac{C(xi) \pm D(xi)}{B(\xi) \pm A(\xi)} d\xi \right], \quad h_{\pm}^0 = \text{const};$$

$$A(\xi) = \alpha\xi(\alpha^2 \xi^2 - 4)^{\frac{5}{2}}, \quad B(\xi) = 2(\alpha^2 \xi^2 - 4)^2,$$

$$S(\xi, \eta) = -(J + \omega\beta/4) \ln \eta + \omega\alpha\eta\xi(1 + \alpha^2 \xi^2/2)/4,$$

$$C(\xi) = (\alpha^2 \xi^2 - 4)^{\frac{1}{2}} [\alpha^5 \beta \xi^4/4 + \alpha^5 \xi^4 J - \alpha^3 \beta \omega \xi^2 + 2\alpha^3 \xi^2 + \\ + 2\alpha^2 \gamma \omega \xi^2 - 16\alpha J - 8J - 8\gamma\omega - 2\varepsilon(\alpha^2 \xi^2 - 4)/\omega],$$

$$D(\xi) = \alpha^4 \beta \omega \xi^3/2 + 2\alpha^4 J \xi^3 - 4\alpha^2 \beta \omega \xi - 16\alpha^2 J \xi - 8\alpha^2 \xi + 8\beta\omega/\xi + 32(J + 1)/\xi.$$

Отметим в заключение этого пункта, что полученное решение $\varphi_{J\omega}(x, \lambda)$ является собственной функцией четверки коммутирующих операторов

$$Y_2 \varphi = \omega \varphi, \quad (Y_3 Y_2^2 - Y_1 X) \varphi = -J \omega^2 \varphi,$$

$$X \varphi = \omega^2 e^{-\lambda} \varphi, \quad \Delta \varphi = \varepsilon \varphi,$$

но, поскольку оператор Казимира рассматриваемой F -алгебры, $Y_3 Y_2^2 - Y_1 X$, имеет третий порядок, провести разделение переменных в этой системе невозможно.

3. ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ НЕКОММУТАТИВНОЙ РАЗМЕРНОЙ РЕДУКЦИИ

В этом пункте мы предложим метод построения точно интегрируемых уравнений, основанный на МНИ.

Основная идея заключается в следующем. Пусть имеется уравнение, интегрируемое с помощью некоммутативной алгебры Ли L операторов симметрии первого порядка. С помощью некоторой подалгебры $A \subset L$ исходное уравнение (1.1) редуцируется к уравнению (1.3) с меньшим числом переменных $m' = m - \frac{1}{2}(\dim A + \text{ind } A)$. Редуцированное уравнение (1.3) в общем случае не обладает алгеброй Ли операторов симметрии, позволяющих его проинтегрировать. Оно допускает F -алгебру, аналогом которой в конечномерном случае является алгебра интегралов движения с нелинейной скобкой Пуассона [10]. Непосредственное интегрирование такого уравнения в общем случае не представляется возможным, т.к., в частности, операторы симметрии из F -алгебры имеют высокий порядок. Тем не менее все его решения можно построить, выделяя их из пространства решений исходного уравнения.

Рассмотрим сначала случай конечномерной гамильтоновой системы следуя работам [3, 10]. Пусть функция Гамильтона h задана на гладком симплектическом многообразии (M^{2m}, ω) ($\omega_{ij} = -\omega_{ji}$, $\det \omega_{ij} \neq 0$, $\omega^{il} \omega_{lj} \equiv \delta_j^i$) и соответствующая гамильтонова система, $\dot{x} = \text{sgrad } h$ ($\text{sgrad } h = \omega^{ij} h_{,j}$), интегрируема в некоммутативном смысле с помощью алгебры Ли L интегралов движения f_i . Мы не включаем сам гамильтониан h в алгебру L , поэтому алгебра L удовлетворяет условию (1.2).

Выберем в алгебре L подалгебру A и редуцируем с ее помощью гамильтонову систему на симплектическом многообразии (M^{2m}, ω) в гамильтонову систему $\dot{x} = \text{sgrad } \tilde{h}$ на многообразии $(Q_\xi^{2m'}, \pi_* \omega)$. Здесь $\xi \in A^*$, π_* – каноническая проекция ω на многообразии $Q_\xi^{2m'}$. Если подалгебра A совпадает с алгеброй L , то многообразие Q_ξ двумерно. Ограничение этого двумерного многообразия на поверхность постоянной энергии $\tilde{h} = \text{const}$ дает одномерные кривые, являющиеся траекториями исходной гамильтоновой системы. Ниже мы будем рассматривать случай, когда подалгебра A не совпадает с алгеброй L . Выясним, какой остаточной группой симметрии будет обладать редуцированный гамильтониан $\tilde{h}$. Обозначим соответствующую алгебру Ли симметрии через $\text{Ann}_\xi A$. Поскольку все элементы алгебры A коммутируют с h , то очевидно, что в $\text{Ann}_\xi A$ будут входить элементы, чьи векторные поля касаются многообразия $M_\xi = \{x \in M \mid f_i(x) = \xi_i, f_i \in A\}$. Пусть $A_1 \subset L$, $\{A_1, A\} \subset A$ и $\langle \xi, \{A_1, A\} \rangle = 0$. Из определения алгебры $\text{Ann}_\xi A$ следует, что она определена с точностью до аннулятора $\text{Ann } \xi \subset A$. Таким образом, имеем: $\text{Ann}_\xi A = A_1 / \text{Ann } \xi$. В общем случае алгебра $\text{Ann}_\xi A$ не позволяет проинтегрировать гамильтонову систему с гамильтонианом $\tilde{h}$. Так, например, если L – полупростая алгебра, а A – ее подалгебра Картана, то $\text{Ann}_\xi A = 0$, т.е. гамильтониан $\tilde{h}$ не имеет группы симметрии. Поскольку исходная гамильтонова система была интегрируемой, то и редуцированная система тоже должна быть интегрируемой. Действительно, гамильтониан $\tilde{h}$ помимо алгебры Ли $\text{Ann}_\xi A$

допускает еще алгебру интегралов, которые не образуют алгебру Ли.

Пусть $f_i \in L$, но $f_i \notin \text{Ann}_\xi A$. Можно выбрать функции $F_k(f)$ такие, что $\{F_k, F_l\} = c_{kl}(F)$, $\{h, F\} = 0$. Структурные функции $c_{kl}(f)$ удовлетворяют тождеству Якоби и тем самым образуют нелинейную скобку Пуассона. Многообразие с заданной скобкой Пуассона называется пуассоновым, а пространство гладких функций на нем – пуассоновой алгеброй. Очевидно, что в нашем случае для пуассоновой алгебры F имеет место равенство

$$\dim F + \text{ind } F = \dim L + \text{ind } L - \dim A - \text{ind } A. \quad (3.1)$$

С помощью пуассоновой алгебры F можно редуцировать гамильтонову систему $\dot{x} = \text{sgrad } \tilde{h}$ на двумерное симплектическое многообразие и, используя оставшийся интеграл энергии, в конечном счете проинтегрировать ее. Важным является то обстоятельство, что мы можем, “поднявшись” до многообразия M^{2m} и используя некоммутативную алгебру Ли интегралов L , легко проинтегрировать гамильтонову систему $\dot{x} = \text{sgrad } h$ и тем самым найти решение гамильтоновой системы $\dot{x} = \text{sgrad } \tilde{h}$. В то же время применение пуассоновой алгебры интегралов для гамильтониана $\tilde{h}$ является более трудной задачей. Для ЛДУ поиск и использование F -алгебры (аналог пуассоновой алгебры) в общем случае – неразрешимая проблема.

Таким образом, метод редукции для построения интегрируемых ЛДУ заключается в следующем: исходный оператор H уравнения (1.1), допускающий некоммутативную алгебру Ли L , редуцируется с помощью его подалгебры A . Получаем редуцированный интегрируемый оператор $\tilde{H}$, допускающий некоторую F -алгебру симметрии. Построим базис решений редуцированного уравнения, составляя его из решений исходного уравнения. Алгоритм отбора решений редуцированного уравнения нетривиален и поэтому в настоящей статье мы ограничимся случаем, когда подалгебра A одномерна. Более общему случаю авторы намерены посвятить отдельную работу.

Рассмотрим интегрируемое с помощью алгебры Ли L ЛДУ

$$H\psi(x) = 0, \quad [H, Y_i] = 0, \quad [Y_i, Y_j] = c_{ij}^k Y_k. \quad (3.2)$$

Пусть одномерная подалгебра A порождена оператором Y . Выберем систему координат, в которой оператор Y диагонален, т.е. $Y = \partial/\partial y$. Остальные координаты обозначим через $z = (z_1, \dots, z_{m-1})$. Так как оператор H коммутирует с оператором Y , то он не зависит от переменной y и имеет вид $H = H(z, \partial_z, \partial_y)$.

Определим редуцированное уравнение следующим образом:

$$\tilde{H}(z, \partial_z)f(z) \equiv H(z, \partial_z, i\xi)f(z) = 0. \quad (3.3)$$

Редукция тривиальна, когда алгебра L абелева, в частности, когда уравнение (3.2) интегрируется методом разделения переменных. Редуцированный оператор $\tilde{H}$ допускает “остаточную” абелеву алгебру симметрии $\text{Ann } A$, которая позволяет разделить переменные и в редуцированном уравнении (3.3). Поэтому ниже мы будем рассматривать случай, когда исходное уравнение (3.2) интегрируется лишь в некоммутативном смысле.

Перейдем к построению базиса решений уравнения (3.3). Для этого выберем λ -представление алгебры симметрии L уравнения (3.2) так, чтобы соответствующий оператору Y оператор l имел вид $l = \partial/\partial\lambda_s$. Обозначим: $\sigma = \lambda_s$, $\mu_i = \lambda_i$, $i = 1, \dots, s-1$. Пусть $\psi_J(\sigma, \mu, z, y)$ – решение системы (2.3) и (3.3). Из уравнения $\partial_y \psi = \partial_\sigma \psi$ системы (2.3) следует $\psi = \psi(y + \sigma, \mu, z)$. Введем функцию

$$f_J(z, \mu) = \exp(-i\xi y) \int \exp(-i\sigma\xi) \psi_J(y + \sigma, z, \mu) d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\xi v) \psi_J(v, z, \mu) dv.$$

Легко видеть, что $f_J(z, \mu)$ – искомое параметрическое семейство решений уравнения (3.4). Описанный выше алгоритм очевидным образом обобщается на случай произвольной абелевой подалгебры A .

Рассмотрим подробно нетривиальный пример уравнения Клейна–Гордона в 4-мерном римановом пространстве нештеккелева типа с метрикой вида (см. [1, (5.12)])

$$ds^2 = r \exp(4x^4)(dx^1)^2 + 2kq \exp(x^4) dx^1 dx^3 + q \exp(2x^4)(dx^2 + x^1 dx^3)^2 - k^2 q (dx^4)^2,$$

которая допускает 5-мерную группу движений с генераторами

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial/\partial x^2, & X_2 &= \partial/\partial x^3, & X_3 &= -\partial/\partial x^1 + x^3 \partial/\partial x^2, \\ X_4 &= -2x^1 \partial/\partial x^1 - x^2 \partial/\partial x^2 + x^3 \partial/\partial x^3 + \partial/\partial x^4, \\ X_5 &= (x^1)^2 \partial/\partial x^1 - kx^1 \exp(-x^4) \partial/\partial x^2 + (x^2 + k \exp(-x^4)) \partial/\partial x^3 - x^1 \partial/\partial x^4, \end{aligned}$$

здесь $q, r, k = \text{const}$. Уравнение Клейна–Гордона имеет вид

$$\begin{aligned} &\left\{ -2x^1 \exp(-x^4) \partial_{12} + 2 \exp(-x^4) \partial_{13} + (k \exp(-2x^4) - r(x^1)^2 \exp(2x^4)/kq) \partial_{22} + \right. \\ &\quad + 2rx^1 \exp(2x^4)/kq \partial_{23} - r \exp(2x^4)/kq \partial_{33} - \\ &\quad \left. - (\partial_{44} + 2\partial_4)/k - \exp(-x^4) \partial_2 \right\} \varphi = \varepsilon k q \varphi, \end{aligned} \quad (3.4)$$

здесь $\partial_{ij} = \partial_{x^i} \partial_{x^j}$.

Проведем редукцию по оператору X_4 . В системе координат $z_1 = x^2 \exp x^4 + x^1 \exp(2x^4)$, $z_2 = x^3 \exp(-x^4) - 1$, $z_3 = -x^1 \exp(2x^4)$, $z_4 = x^4$, в которой $X_4 = \partial/\partial z_4$, редуцированное уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} &\left\{ [2z_3 kq - rz_3^2 - q(z_1 - z_3)^2] \partial_{11} + 2[-rz_3 + kq - (z_2 + 1)(z_3 - 1)q] \partial_{12} + \right. \\ &\quad + 2[-kqz_3 + 2qz_3(z_3 - z_1)] \partial_{13} - [r + q(z_2 + 1)^2] \partial_{22} + \\ &\quad + 2q[-k + 2z_3(z_2 + 1)] \partial_{23} - 4z_3^2 q \partial_{33} + q(-k + 5z_3 - 3z_1) \partial_1 + \\ &\quad + q(z_2 + 1) \partial_2 + 8qz_3 \partial_3 - i\xi [2(z_1 - z_3) \partial_1 - 2(z_2 + 1) \partial_2 + \\ &\quad \left. + 4qz_3 \partial_3 + i\xi q + 2q] \right\} \varphi = \varepsilon k^2 q^2 \varphi, \end{aligned} \quad (3.5)$$

здесь $\partial_i \equiv \partial_{z_i}$. В данной алгебре $\text{Ann}_\xi X_4 = 0$, и, следовательно, редуцированное уравнение (3.5) не допускает группу движений.

В качестве операторов λ -представления выберем операторы

$$\begin{aligned} l_1 &= \exp(-\sigma), \quad l_2 = \mu \exp \sigma, \quad l_3 = \exp(-2\sigma) \partial_\mu, \quad l_4 = \partial_\sigma, \\ l_5 &= \exp(2\sigma)(-\mu \partial_\sigma + \mu^2 \partial_\mu + J). \end{aligned}$$

Интегрируя систему (2.3), находим базис решений уравнения Клейна–Гордона (3.4)

$$\varphi_J(z, v) = \exp[(z_1 + k) \exp(-v) + \mu z_2 \exp v + u - Ju^{-1} \exp v] \Phi_J(u).$$

Здесь $v = \sigma + z_4$, $u = \mu \exp v + z_3 \exp(-v)$, функция $\Phi_J(u)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$[u^2 \partial_u^2 + 3u \partial_u + 2Jku^{-1} + ru^2 q^{-1} + \varepsilon k^2 q] \Phi_J(u) = 0.$$

Интегрируя функцию $\varphi_J(z, v) \exp i\xi v$ по переменной v в бесконечных пределах, получим полное параметрическое семейство решений редуцированного уравнения (3.5):

$$\psi(z_1, z_2, z_3; J, \mu, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z_1, z_2, z_3; v, J, \mu, \varepsilon) \exp(i\xi v) dv.$$

Можно найти F -алгебру симметрии редуцированного уравнения (3.5). Операторы $X_1 X_2$, $X_5 X_3$, $X_5 X_1^2$, $X_3 X_2^2$ коммутируют с оператором X_4 . Ограничивая их на пространство функций $\mathcal{L}_\xi = \{\varphi \in C^\infty \mid X_4 \varphi = i\xi \varphi\}$ и учитывая, что не все из вышеперечисленных операторов независимы, получаем квадратичную алгебру функционально независимых операторов симметрии уравнения (3.5):

$$\begin{aligned} Z_1 &= (X_1 X_2)|_{\mathcal{L}_\xi} = \partial_{12}, \\ Z_2 &= (2X_5 X_1^2 + X_1 X_2(2 + i\xi))|_{\mathcal{L}_\xi} = \\ &= 2[z_3(k + z_1) + (z_1 + k - z_2 z_3) \partial_2 + z_3(2 + i\xi)] \partial_{11} + (2 + i\xi) \partial_{12}, \\ Z_3 &= (X_3 X_2^2 + X_5 X_1^2 + 2X_1 X_2)|_{\mathcal{L}_\xi} = 2\partial_{12} + (z_2 \partial_1 + \partial_3) \partial_{22} + \\ &+ [z_3(k + z_1) \partial_1 + (z_1 + k - z_2 z_3) \partial_2 + z_3^2 \partial_3 + z_3(2 + i\xi)] \partial_{11}; \\ [Z_1, Z_2] &= [Z_1, Z_3] = 2Z_1^2, \quad [Z_2, Z_3] = 0. \end{aligned}$$

Эта трехмерная квадратичная алгебра имеет $\text{ind } F = 1$, что согласуется с формулой (3.1).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Ниже приведены ненулевые коммутационные соотношения; $a, b, c, d, e, f, \alpha = \text{const.}$

Четырехмерные квадратичные алгебры

1. $[Y_2, Y_3] = Y_1, \quad \{Y_p, Y_q\} \equiv \frac{1}{2}(Y_p Y_q + Y_q Y_p),$
 - а) $[Y_2, X] = aY_3^2 + Y_2 + b, \quad [Y_3, X] = cY_2^2 - Y_3 + d, \quad a, c \neq 0;$
 - б) $[Y_2, X] = 2\{Y_2, Y_3\} + aY_3^2 + b, \quad [Y_3, X] = cY_2^2 - Y_3^2 + dY_2 + e;$
 - в) $[Y_2, X] = aY_3^2 + bY_3, \quad [Y_3, X] = cY_2^2 + dY_2.$
2. $[Y_1, Y_3] = Y_1, \quad [Y_3, X] = X,$
 - а) $[Y_1, X] = Y_2^2 + aY_3^2 + b, \quad a \neq 0;$
 - б) $[Y_1, X] = \{Y_2, Y_3\} + b;$
 - в) $[Y_1, X] = Y_2^2 + aY_3, \quad a \neq 0;$
 - г) $[Y_1, X] = Y_3^2 + aY_2;$
 - д) $[Y_1, X] = Y_3^2 + b;$
 - е) $[Y_1, X] = Y_2^2 + b;$
 - ж) $[Y_1, X] = Y_2;$
 - з) $[Y_1, X] = Y_3;$
 - и) $[Y_1, X] = 1.$

Пятимерные квадратичные алгебры

1. $[Y_2, Y_3] = Y_1, \quad [Y_1, Y_4] = \alpha Y_1, \quad [Y_2, Y_4] = Y_2, \quad [Y_3, Y_4] = (\alpha - 1)Y_3, \quad \alpha \neq 0, 1,$
 - а) $[Y_2, X] = aY_3^2 + Y_2, \quad [Y_3, X] = bY_2^2 - Y_3, \quad [Y_4, X] = c,$
если $\alpha = \frac{3}{2},$ то $b = 0,$ если $\alpha = 3,$ то $a = 0;$
 - б) $[Y_4, X] = -X, \quad [Y_2, X] = aY_2^2 + b\{Y_2, Y_3\} + cY_3^2 + dY_1,$
 $[Y_3, X] = eY_2^2 - 2a\{Y_2, Y_3\} - \frac{1}{2}bY_3^2 + fY_1, \quad \alpha = 2;$
 - в) $[Y_4, X] = -\frac{1}{2}X, \quad [Y_2, X] = 2a\{Y_2, Y_3\} + bY_1 + cY_3,$
 $[Y_3, X] = -aY_3^2 + dY_2, \quad \alpha = \frac{3}{2};$
 - г) $[Y_4, X] = -X, \quad [Y_2, X] = Y_2^2, \quad [Y_3, X] = -2\{Y_2, Y_3\} + aY_1, \quad \alpha \neq 2, 3;$
 - д) $[Y_4, X] = -\frac{1}{3}X, \quad [Y_2, X] = Y_3^2, \quad [Y_3, X] = aY_2, \quad a \neq 0, \quad \alpha = \frac{5}{2};$
 - е) $[Y_4, X] = X, \quad [Y_1, X] = Y_3, \quad [Y_2, X] = +2Y_4, \quad \alpha = \frac{1}{2};$
2. $[Y_1, Y_4] = Y_1, \quad [Y_2, Y_3] = Y_2,$
 - а) $[Y_2, X] = Y_1, \quad [Y_3, X] = X, \quad [Y_4, X] = -X;$
 - б) $[Y_2, X] = Y_1^2, \quad [Y_3, X] = X, \quad [Y_4, X] = -2X;$
 - в) $[Y_1, X] = \{Y_2, Y_4\}, \quad [Y_3, X] = -X, \quad [Y_4, X] = X.$

Список литературы

- [1] Шаповалов А.В., Широков И.В. // ТМФ. 1995. Т. 104. №2. С. 195–213.
- [2] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. // Функц. анализ и его прилож. 1978.. Т. 12. №2. С. 46–56.
- [3] Фоменко А.Т. Симплектическая геометрия. Методы и приложения. М.: Изд-во МГУ, 1988.
- [4] Склянин Е.К. // Функц. анализ и его прилож. 1982. Т. 16. №4. С. 27–34; 1983. Т. 17. №4. С. 34–48.
- [5] Склянин Е.К. // УМН. 1992. Т. 40. №40. С. 214.
- [6] Грановский Я.И., Жеданов А.С., Луценко И.М. // ЖЭТФ. 1989. Т. 99. №2. С. 369–377.
- [7] Грановский Я.И., Жеданов А.С., Луценко И.М. // ТМФ. 1992. Т. 91. №2. С. 207–216.
- [8] Грановский Я.И., Жеданов А.С., Луценко И.М. // ТМФ. 1992. Т. 91. №3. С. 396–410.
- [9] Луценко И.М. // ТМФ. 1992. Т. 93. №1. С. 3–16.
- [10] Карасев М.В., Маслов В.П. Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. М.: Наука, 1991.
- [11] Браилов А.В. // ДАН СССР. 1983. Т. 271. №2. С. 273–276.
- [12] Шаповалов В.Н. // Дифф. уравнения. 1980. Т. 16. №10. С. 1864–1874.

Томский государственный университет
Омский государственный университет

Поступила в редакцию
24.III.1995 г.

A.V. Shapovalov, I.V. Shirokov

**NONCOMMUTATIVE INTEGRATION METHOD
FOR LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS.
FUNCTIONAL ALGEBRAS AND DIMENSIONAL REDUCTION**

The noncommutative integration method for linear partial differential equations [1] is applied for the generalized algebraic constructions, so called functional algebras (F -algebras), for which commutator of basis elements is nonlinear function of these elements. A nontrivial example is considered for the integration of Klein–Gordon equation in curved space which does not allow a separation of variables. Classification of quadratic algebras of special structure is performed. The dimensional reduction method is presented for noncommutative integrable equation. The reduced equation has the number of independent variables less than the primary one, and more complicated symmetry.