Общероссийский математический портал

А. А. Арсеньев, Резонансы матрицы рассеяния и квазиуровни, *ТМФ*, 1996, том 106, номер 1, 16–23

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1094>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 16:01:36

А.А. Арсеньев
**РЕЗОНАНСЫ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ
И КВАЗИУРОВНИ**

Проанализирована связь между резонансами матрицы рассеяния и квазиуровнями в абстрактной теории рассеяния.

1. В этой работе на примере одной задачи мы анализируем, как может сказываться на матрице рассеяния возмущение погруженного в непрерывный спектр дискретного собственного значения. Рассматриваемая нами конструкция имеет довольно специальный характер, но тем не менее она описывает задачу о резонаторе Гельмгольца с малым отверстием и задачу о резонансе на квазиуровне “ловушечного” потенциала. План работы таков: в пункте 2 мы опишем все сделанные предположения, в пункте 3 мы докажем вспомогательные утверждения и в пункте 4 сформулируем окончательный результат. Чтобы упростить изложение и избежать громоздких формулировок, мы не будем стремиться к максимальной общности и не будем следить за тем, чтобы все наши предположения были полностью независимы. Без специальных ссылок мы используем факты теории возмущений, которые можно извлечь из [1]. Мы используем стандартные обозначения, поясним лишь, что символом $L(A \rightarrow B)$ мы обозначаем банахово пространство линейных непрерывных операторов из банахова пространства A в банахово пространство B .

2. Пусть $\mathcal{H}_0$ – гильбертово пространство, в котором задана инволюция $f \rightarrow f^*$, $(\lambda f)^* = \lambda^* f^*$, билинейная форма $\langle \cdot | \cdot \rangle$ и скалярное произведение $\langle f, g \rangle_0 = \langle f^* | g \rangle$. Пусть $\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_+$ – гильбертовы пространства, $\mathcal{H}_- \subset \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_+$, причем $\mathcal{H}_-$ плотно в $\mathcal{H}_0$, а $\mathcal{H}_0$ плотно в $\mathcal{H}_+$. Мы предположим, что при любом $f \in \mathcal{H}_-$ функционал

$$\mathcal{H}_0 \ni g \rightarrow \langle f | g \rangle \quad (1)$$

продолжается до линейного и непрерывного на $\mathcal{H}_+$ функционала и при любом $g \in \mathcal{H}_+$ продолжение формы (1) задает линейный функционал на $\mathcal{H}_-$.

Пусть Ω – компактное топологическое пространство, $d\omega$ – вероятностная борелевская мера на Ω и $L^2(\Omega, d\omega)$ – гильбертово пространство квадратично интегрируемых на Ω функций. Скалярное произведение в $L^2(\Omega, d\omega)$ мы обозначим символом $(\cdot, \cdot)$, оно линейно по второму аргументу.

Пусть h – гильбертово пространство интегрируемых на $(a; b)$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, функций со значениями в $L^2(\Omega, d\omega)$,

$$\langle f, g \rangle_h = \int_a^b (f(\lambda), g(\lambda)) d\lambda, \quad f(\lambda), g(\lambda) \in L^2(\Omega, d\omega).$$

Пусть H_0 – самосопряженный в $\mathcal{H}_0$ оператор, который коммутирует с инволюцией:

$$(H_0 \psi)^* = H_0 \psi^*$$

и унитарно эквивалентен оператору умножения на λ в h , т.е. существует такой оператор $U \in L(\mathcal{H}_0 \rightarrow h)$, что

$$\langle f, g \rangle_0 = \langle Uf, Ug \rangle_h$$

и $\forall g \in \mathcal{D}(H_0)$

$$\langle f, H_0 g \rangle = \int_a^b \lambda (U(f)(\lambda), U(g)(\lambda)) d\lambda.$$

Мы предположим, что $U\mathcal{H}_0 = h$, $\text{Ker } U = 0$, поэтому оператор U имеет ограниченный обратный U^{-1} , и мы предположим, что в h оператор U^{-1} действует как интегральный оператор с ядром $U^{-1}(\lambda, \omega)$, причем функция

$$(a; b) \otimes \Omega \ni (\lambda; \omega) \rightarrow U^{-1}(\lambda, \omega) \in \mathcal{H}_+$$

в некоторой окрестности (a, b) аналитична по λ и непрерывна по ω на Ω как функция со значениями в $\mathcal{H}_+$. Далее, мы предположим, что для любого $\psi \in \mathcal{H}_-$ функция $(\lambda; \omega) \rightarrow (U\psi)(\lambda, \omega)$ непрерывна по ω и аналитична по λ в окрестности $(a; b)$.

Оператор $V \in L(\mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0)$ мы будем называть допустимым, если он удовлетворяет следующим требованиям: V – самосопряженный ядерный в $\mathcal{H}_0$ оператор, который коммутирует с инволюцией: $(V\psi)^* = V\psi^*$; продолжается по непрерывности на $\mathcal{H}_+$ и удовлетворяет условию $V\mathcal{H}_+ \subset \mathcal{H}_-$.

Оператор

$$\Gamma(\lambda) = R(\lambda, H_0)V, \quad R(\lambda, H_0) = (\lambda E - H_0)^{-1},$$

аналитичен по λ при $\text{Im } \lambda > 0$ как оператор из $L(\mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0)$ и как оператор из $L(\mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_+)$. Мы предположим, что операторная функция $\Gamma(\lambda)$ имеет аналитическое продолжение в некоторую окрестность $(a; b)$ как функция со значениями в $L(\mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_+)$ и ее значения в этой окрестности – вполне непрерывные в $\mathcal{H}_+$ операторы.

Приведем пример, когда реализуется предложенная выше конструкция. Пусть $\mathcal{H}_0 = L^2(\mathbb{R}^n, dx)$, $\mathcal{H}_+ = L^2(\mathbb{R}^n, \exp(-|x|)dx)$, H_0 – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$, V – интегральный оператор с гладким вырожденным финитным ядром. Отображение U строится с помощью преобразования Фурье, Ω – единичная сфера в $\mathbb{R}^n$.

Далее мы предположим, что нам задана последовательность допустимых операторов $\{V_n\}$, которая в ядерной топологии пространства $L(\mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0)$ сходится к допустимому оператору V_∞ , причем операторы $\Gamma_n(\lambda) = R(\lambda, H_0)V_n$ в области аналитичности $\Gamma_n(\lambda)$ сходятся к оператору $\Gamma_\infty(\lambda)$ в $L(\mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_+)$ равномерно по λ на компактах.

В дальнейшем величины, относящиеся к оператору V_n , $n \leq \infty$, мы будем обозначать индексом n . В тех формулах, где индекс n может принимать любое достаточно большое значение, включая $n = \infty$, мы будем его опускать.

Пусть ψ_0 – собственная функция оператора H_∞ :

$$H_\infty = H_0 + V_\infty, \quad H_\infty \psi_0 = \lambda_0 \psi_0, \quad \lambda_0 \in (a; b), \quad \|\psi_0\|_0 = 1. \quad (2)$$

Из (2) следует, что

$$\psi_0 - i\varepsilon R(\lambda_0 + i\varepsilon, H_0)\psi_0 = R(\lambda_0 + i\varepsilon, H_0)V_\infty \psi_0. \quad (3)$$

Если

$$\varepsilon \|R(\lambda_0 + i\varepsilon, H_0)\psi\|_+ \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad (4)$$

то из (3) следует, что

$$\psi_0 = \Gamma_\infty(\lambda_0)\psi_0. \quad (5)$$

Так как оператор $\Gamma(\lambda)$ вполне непрерывен в $\mathcal{H}_+$ и аналитичен по λ в окрестности точки λ_0 , точка λ_0 есть изолированная особая точка аналитической функции $\lambda \rightarrow R(1, \Gamma_\infty(\lambda))$, рассматриваемой как функция со значениями в $L(\mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_+)$, причем размерность собственного подпространства оператора $\Gamma_\infty(\lambda_0)$ в $\mathcal{H}_+$ конечна. Заметим, что, вообще говоря, в окрестности точки λ_0 может быть сколько угодно других собственных значений оператора H_∞ и размерность отвечающего точке λ_0 собственного подпространства оператора H_∞ в $\mathcal{H}_0$ может быть любой, но удовлетворяющих условию (4) собственных функций лишь конечное число, и вне некоторой окрестности точки λ_0 нет других собственных значений, которым бы отвечали удовлетворяющие условию (4) собственные функции.

Далее мы предположим, что любое решение уравнения (5) из $\mathcal{H}_+$ принадлежит $\mathcal{H}_-$ и области определения оператора H_0 :

$$\text{Ker}(E - \Gamma_\infty(\lambda_0)) \subset \mathcal{D}(H_0) \cap \mathcal{H}_-. \quad (6)$$

(В приложении к теории потенциального рассеяния условие (4) эквивалентно условию излучения, а условие (6) – лемме Реллиха.)

При предположении (6) пространство решений уравнения (5) совпадает с тем подпространством решений уравнения (2), которое удовлетворяет условию (4). Это подпространство конечномерно. Назовем его правильным собственным подпространством оператора H_∞ , а λ_0 – правильным собственным значением.

Далее мы предположим, что на правильном собственном подпространстве невырождена квадратичная форма:

$$f \otimes g \rightarrow \langle f | V_\infty g \rangle, \quad (7)$$

т.е. предположим, что для любого вектора g из правильного собственного подпространства существует такой вектор f из этого пространства, что

$$\langle f | V_\infty g \rangle \neq 0.$$

Покажем, что при выполнении этого условия точка $\mu = 1$ есть полупростое собственное значение оператора $\Gamma_\infty(\lambda_0)$.

Если ψ_k принадлежит правильному собственному подпространству и $\varphi \in \mathcal{H}_+$, то функция

$$\lambda \rightarrow \langle (\lambda E - H_0) \psi_k | R(\lambda, H_0) V_\infty \varphi \rangle$$

аналитична в окрестности λ_0 и при $\text{Im } \lambda > 0$

$$\langle (\lambda E - H_0) \psi_k | R(\lambda, H_0) V_\infty \varphi \rangle = \langle \psi_k | V_\infty \varphi \rangle, \quad (8)$$

поэтому равенство (8) выполнено и в точке $\lambda = \lambda_0$. Если ψ_m также принадлежит правильному собственному подпространству и φ есть решение уравнения

$$(E - \Gamma_\infty(\lambda_0)) \varphi = \psi_m, \quad (9)$$

то при любом ψ_k из правильного собственного подпространства

$$\langle (\lambda_0 E - H_0) \psi_k | (E - \Gamma_\infty(\lambda_0)) \varphi \rangle = \langle V_\infty \psi_k | \psi_m \rangle = \langle V_\infty \psi_k | \varphi \rangle - \langle \psi_k | V_\infty \varphi \rangle = 0,$$

что противоречит невырожденности квадратичной формы (7).

Итак, уравнение (9) решений не имеет, поэтому все нильпотенты оператора $\Gamma_\infty(\lambda_0)$ равны нулю и точка $\mu = 1$ – полупростое собственное значение. Чтобы избежать непринципиальных осложнений технического характера, мы предположим, что точка $\mu = 1$ есть простое собственное значение. В рассматриваемой ситуации это эквивалентно предположению о том, что пространство решений уравнения (5) одномерно. В силу инвариантности собственного пространства оператора H_∞ относительно инволюции мы можем считать, что $\psi_0^* = \psi_0$. Далее мы предположим, что ни один из операторов H_n при $n < \infty$ в некоторой окрестности λ_0 правильных собственных значений не имеет. Это наше последнее предположение.

3. Из сказанного выше следует, что существуют такие числа $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что проектор

$$P_n(\lambda) = (1/2\pi i) \int_{|1-\mu|=\varepsilon} R(\mu, \Gamma_n(\lambda)) d\mu, \quad |\lambda - \lambda_0| < \delta, \quad (10)$$

при $n = \infty$ одномерен, аналитически зависит от λ и удовлетворяет уравнениям

$$\Gamma_n(\lambda)P_n(\lambda) = P_n(\lambda)\Gamma_n(\lambda) = \mu_n(\lambda)P_n(\lambda), \quad P_n^2(\lambda) = P_n(\lambda). \quad (11)$$

Так как $\Gamma_n(\lambda) \rightarrow \Gamma_\infty(\lambda)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по λ , то

$$P_n(\lambda) \rightarrow P_\infty(\lambda), \quad |\lambda - \lambda_0| < \delta, \quad (12)$$

и сделанные выше утверждения о проекторе P_n справедливы при всех $n \geq n_0$. Число δ в дальнейшем предполагается достаточно малым.

ЛЕММА 1. *Определенный формулой (10) проектор $P(\lambda)$ может быть записан в виде*

$$P(\lambda)f = c(\lambda)\langle V\psi(\lambda)|f\rangle\psi(\lambda), \quad f \in \mathcal{H}_+, \quad (13)$$

где функция $\psi(\lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$\mu(\lambda)\psi(\lambda) = \Gamma(\lambda)\psi(\lambda) \quad (14)$$

и аналитична по λ при $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ как функция со значениями в $\mathcal{H}_+$, функция

$$c(\lambda) = (\langle \psi(\lambda)|V\psi(\lambda)\rangle)^{-1} \quad (15)$$

аналитична по λ при $|\lambda - \lambda_0| < \delta$. Кроме того,

$$\psi_n(\lambda) \rightarrow \psi_\infty(\lambda), \quad n \rightarrow \infty,$$

в $\mathcal{H}_+$ равномерно по λ , $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, $\psi_\infty(\lambda_0) = \psi_0$, $c_n(\lambda) \rightarrow c_\infty(\lambda)$ равномерно по λ , $n \rightarrow \infty$, $|\lambda - \lambda_0| < \delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем вектор $f_0 \in \mathcal{H}_+$ так, чтобы при всех $n \geq n_0$ и $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ вектор $\psi_n(\lambda) = P_n(\lambda)f_0$ был ненулевым, и за счет нормировки f_0 добьемся равенства $\psi_\infty(\lambda_0) = \psi_0$. Тогда

$$\forall f \in \mathcal{H}_+ : P_n(f) = \langle \tilde{\psi}(\lambda)|f\rangle\psi(\lambda), \quad \tilde{\psi}(\lambda) \in \mathcal{H}_- \quad (16)$$

и $\psi(\lambda)$ удовлетворяет требованиям леммы. Из (11) следует, что

$$\langle \tilde{\psi}(\lambda)|\Gamma(\lambda)f\rangle = \mu(\lambda)\langle \tilde{\psi}(\lambda)|f\rangle. \quad (17)$$

Полагая в (17) $f \in \mathcal{H}_-$, $\text{Im } \lambda > 0$ и заменяя $f \rightarrow R(\lambda, H_0)f$, получим

$$\langle \Gamma(\lambda)R(\lambda, H_0)\tilde{\psi}(\lambda)|f\rangle = \mu(\lambda)\langle R(\lambda, H_0)\tilde{\psi}(\lambda)|f\rangle,$$

а так как собственное подпространство $\Gamma(\lambda)$ одномерно, то $R(\lambda, H_0)\tilde{\psi}(\lambda) = \alpha(\lambda)\tilde{\psi}(\lambda)$.

При $\text{Im } \lambda > 0$ следствием уравнения (14) является равенство

$$\mu(\lambda)(\lambda E - H_0)\psi(\lambda) = V\psi(\lambda), \quad (18)$$

поэтому $\tilde{\psi}(\lambda) = c(\lambda)V\psi(\lambda)$, $\text{Im } \lambda > 0$. Множитель c определяется из условия $P^2 = P$. Лемма доказана.

Из (11) следует, что

$$\mu(\lambda) = \text{tr } P(\lambda)\Gamma(\lambda), \quad |\lambda - \lambda_0| < \delta,$$

поэтому функция $\mu(\lambda)$ аналитична в окрестности $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ и

$$\mu_n(\lambda) \rightarrow \mu_\infty(\lambda), \quad n \rightarrow \infty, \quad |\lambda - \lambda_0| < \delta,$$

равномерно по λ .

ЛЕММА 2. *Справедлива формула*

$$\partial\mu_\infty(\lambda_0)/\partial\lambda = -(\langle\psi_0|V\psi_0\rangle)^{-1}. \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (14) следует, что

$$\mu_\infty(\lambda)(\lambda E - H_0)\psi_\infty(\lambda) = V_\infty\psi_\infty(\lambda), \quad \text{Im } \lambda > 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mu_\infty(\lambda)\langle\psi_0|(\lambda E - H_0)\psi_\infty(\lambda)\rangle &= \langle\psi_0|V_\infty\psi_\infty(\lambda)\rangle; \\ (\partial\mu_\infty/\partial\lambda)\langle\psi_0|(\lambda E - H_0)\psi_\infty(\lambda)\rangle + \mu_\infty(\lambda)\langle\psi_0|\psi_\infty(\lambda)\rangle + \\ + \mu_\infty(\lambda)\langle\psi_0|(\lambda E - H_0)\partial\psi_\infty/\partial\lambda\rangle &= \langle\psi_0|V_\infty\partial\psi_\infty/\partial\lambda\rangle. \end{aligned} \quad (20)$$

Полагая в (20) $\lambda = \lambda_0 + i\varepsilon$, мы получим (19).

Из леммы 2 следует, что функция $\lambda \rightarrow 1 - \mu_\infty(\lambda)$ в точке λ_0 имеет нуль первого порядка. Поэтому при достаточно больших n функция $\lambda \rightarrow 1 - \mu_n(\lambda)$ в окрестности λ_0 имеет точно один нуль и это нуль первого порядка. Мы обозначим его через λ_n :

$$\mu_n(\lambda_n) = 1, \quad |\lambda_n - \lambda_0| < \delta. \quad (21)$$

Так как оператор H_n не может иметь собственных значений в верхней полуплоскости и по предположению не имеет правильных собственных значений на интервале $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$, должно выполняться неравенство $\text{Im } \lambda_n < 0, n < \infty$.

ЛЕММА 3. *Если $\psi(\lambda)$ удовлетворяет уравнению (14), то*

$$\begin{aligned} \text{Im } \mu(\lambda)\langle\psi(\lambda), V\psi(\lambda)\rangle &= \\ = -\pi \left((UV\psi(\lambda)(\lambda)), (UV\psi(\lambda)(\lambda)) \right), \quad \lambda_0 - \delta < \lambda < \lambda_0 + \delta. \end{aligned} \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливо равенство

$$\begin{aligned} \mu(\lambda + i\varepsilon)\langle V\psi^*(\lambda + i\varepsilon)|\psi(\lambda + i\varepsilon)\rangle - \mu^*(\lambda + i\varepsilon)\langle V\psi(\lambda + i\varepsilon)|\psi^*(\lambda + i\varepsilon)\rangle &= \\ = \langle V\psi^*(\lambda + i\varepsilon)|[R(\lambda + i\varepsilon, H_0) - R(\lambda - i\varepsilon, H_0)]V\psi(\lambda + i\varepsilon)\rangle, \quad \lambda_0 - \delta < \lambda < \lambda_0 + \delta. \end{aligned} \quad (23)$$

Переходя в (23) к пределу $\varepsilon \rightarrow +0$, мы получаем (22).

СЛЕДСТВИЕ 1. *Справедливо равенство*

$$\|(UV_\infty\psi_0)(\lambda_0)|L^2(\Omega, d\omega)\| = 0. \quad (24)$$

Рассмотрим оператор

$$T(\lambda) = V + V R(\lambda, H) V, \quad |\lambda - \lambda_0| < \delta, \quad \text{Im } \lambda > 0. \quad (25)$$

ЛЕММА 4. Оператор $T(\lambda)$ может быть записан в виде

$$T(\lambda) = r(\lambda) + t_{\text{reg}}(\lambda), \quad |\lambda - \lambda_0| < \delta, \quad (26)$$

где оператор t_{reg} аналитичен по λ в окрестности λ_0 как функция со значениями в $L(\mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_+)$ и равномерно по λ

$$t_{\text{reg}}(\lambda)_n \rightarrow t_{\text{reg}}(\lambda)_\infty, \quad n \rightarrow \infty, \quad |\lambda - \lambda_0| < \delta, \quad (27)$$

в топологии $L(\mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_+)$, а

$$r(\lambda) = (c(\lambda)\mu(\lambda)/(1 - \mu(\lambda))) \langle \psi(\lambda) | Vf \rangle V\psi(\lambda) \quad (28)$$

(входящие в (28) величины описаны в лемме 2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из второго резольвентного уравнения следует, что при $\text{Im } \lambda > 0$

$$R(\lambda, H) = R(\lambda, H_0) + \Gamma(\lambda)R(\lambda, H),$$

поэтому

$$R(\lambda, H) = (E - \Gamma(\lambda))^{-1} R(\lambda, H_0). \quad (29)$$

Так как точка $\mu(\lambda)$ есть полюс первого порядка для $R(\mu, \Gamma(\lambda))$, то

$$(E - \Gamma(\lambda))^{-1} = (1 - \mu(\lambda))^{-1} P(\lambda) + S(\lambda), \quad |\lambda - \lambda_0| < \delta, \quad 1 - \mu(\lambda) \neq 0, \quad (30)$$

где оператор $S(\lambda)$ аналитичен по λ в $L(\mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_+)$ и

$$S_n(\lambda) \rightarrow S_\infty(\lambda), \quad n \rightarrow \infty, \quad |\lambda - \lambda_0| < \delta,$$

равномерно по λ . Из (29) и (30) мы получаем

$$T(\lambda) = (1 - \mu(\lambda))^{-1} V P(\lambda) \Gamma(\lambda) + t_{\text{reg}}(\lambda),$$

где

$$t_{\text{reg}}(\lambda) = V + V S(\lambda) \Gamma(\lambda),$$

а

$$\begin{aligned} V P(\lambda) R(\lambda, H_0) V f &= c(\lambda) \langle V \psi(\lambda) | R(\lambda, H_0) V f \rangle V \psi(\lambda) = \\ &= c(\lambda) \langle R(\lambda, H_0) V \psi(\lambda) | V f \rangle = \mu(\lambda) c(\lambda) \langle V \psi(\lambda) | f \rangle V \psi(\lambda). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

4. Мы приступаем к нашей основной задаче – изучению оператора рассеяния $S(H_n, H_0)$. Как известно [2], оператор рассеяния коммутирует с H_0 и в пространстве $\hbar$ задается операторной функцией

$$\lambda \rightarrow s_n(\lambda) \in L(L^2(\Omega, d\omega) \rightarrow L^2(\Omega, d\omega)),$$

которая в рассматриваемом нами случае имеет вид

$$s_n(\lambda) = 1 - 2\pi i t_n(\lambda), \quad (31)$$

где $t_n(\lambda)$ – интегральный оператор с ядром

$$\begin{aligned} t(\lambda, \omega, \omega')_n &= U(\lambda, \omega) T_n(\lambda) U^{-1}(\lambda, \omega') = \\ &= (UV\psi(\lambda))(\lambda, \omega) \cdot (UV\psi(\lambda))(\lambda, \omega') + t_{\text{reg}}(\lambda, \omega, \omega')_n \end{aligned} \quad (32)$$

и

$$t_{\text{reg}}(\lambda, \omega, \omega')_n = U(t_{\text{reg}}(\lambda)_n U^{-1}(\lambda, \omega'))(\lambda, \omega). \quad (33)$$

Формула (31) справедлива при $n < \infty$ для всех $\lambda \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ и при $n = \infty$ для $\lambda \neq \lambda_0$. Из (32) и (27) вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. *Равномерно по $\omega, \omega' \in \Omega$ и $\lambda, |\lambda - \lambda_0| < \delta$,*

$$t_{\text{reg}}(\lambda, \omega, \omega')_n \rightarrow t_{\text{reg}}(\lambda, \omega, \omega')_\infty, \quad n \rightarrow \infty, \quad (34)$$

и для любого $\lambda \neq \lambda_0$ равномерно по $\omega, \omega' \in \Omega$

$$t(\lambda, \omega, \omega')_n \rightarrow t(\lambda, \omega, \omega')_\infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

ЛЕММА 5. *Справедливо равенство*

$$\lim_{|\lambda - \lambda_0| \rightarrow +0} \int |t_{\text{reg}}(\lambda, \omega, \omega')_\infty - t(\lambda, \omega, \omega')_\infty| d\omega = 0. \quad (35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (32) следует, что

$$\begin{aligned} & \int |t_{\text{reg}}(\lambda, \omega, \omega)_\infty - t(\lambda, \omega, \omega)_\infty| d\omega = \\ & = |\mu(\lambda)c(\lambda)/(1 - \mu_\infty(\lambda))| \int |(UV_\infty\psi(\lambda))(\lambda, \omega)|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (36)$$

Функция $1 - \mu_\infty(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_0$ имеет нуль первого порядка. Интеграл в правой части (36) равен нулю в силу (24). В силу того же равенства

$$\begin{aligned} & \left| \partial_\lambda \int |(UV_\infty\psi(\lambda))(\lambda, \omega)|^2 d\omega \right| \leq 2 \left(\int \left| \partial_\lambda (UV_\infty\psi(\lambda))(\lambda, \omega) \right|^2 d\omega \right)^{1/2} \times \\ & \times \left(\int |(UV_\infty\psi(\lambda))(\lambda, \omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} = 0, \quad \lambda = \lambda_0, \end{aligned}$$

поэтому предел правой части (36) при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ равен нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ. Те же рассуждения показывают, что

$$\lim_{|\lambda - \lambda_0| \rightarrow 0} |t_{\text{reg}}(\lambda, \omega, \omega')_\infty - t(\lambda, \omega, \omega')_\infty| = 0, \quad \omega, \omega' \in \Omega.$$

Переходим к доказательству нашего основного результата. Положим

$$\text{v. p. } t(\lambda_0, \omega, \omega')_\infty = \lim_{|\lambda - \lambda_0| \rightarrow +0} t(\lambda, \omega, \omega')_\infty, \quad (37)$$

(существование предела следует из формулы (32)).

ТЕОРЕМА 1. *Справедливо равенство*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega |t(\text{Re } \lambda_n, \omega, \omega)_n - \text{v. p. } t(\lambda_0, \omega, \omega)_\infty| d\omega = 1/\pi. \quad (38)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как в силу (35)

$$\begin{aligned} & \int |t(\text{Re } \lambda_n, \omega, \omega)_\infty - \text{v. p. } t(\lambda_0, \omega, \omega)_\infty| d\omega = \\ & = \int |t(\text{Re } \lambda_n, \omega, \omega)_\infty - t_{\text{reg}}(\lambda_0, \omega, \omega)_\infty| d\omega \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

то утверждение (38) эквивалентно равенству

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |t(\text{Re } \lambda_n, \omega, \omega)_n - t(\text{Re } \lambda_n, \omega, \omega)_\infty| d\omega = 1/\pi. \quad (38')$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$t_{\text{reg}}(\lambda, \omega, \omega)_n \rightarrow t_{\text{reg}}(\lambda, \omega, \omega)_\infty, \quad n \rightarrow \infty,$$

равномерно по λ, ω , то в силу леммы 5 достаточно доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |t(\text{Re } \lambda_n, \omega, \omega)_n - t_{\text{reg}}(\text{Re } \lambda_n, \omega, \omega)_n| d\omega = 1/\pi. \quad (39)$$

Но

$$\begin{aligned} & \int |t(\text{Re } \lambda_n, \omega, \omega)_n - t_{\text{reg}}(\text{Re } \lambda_n, \omega, \omega)_n| d\omega = \\ & = |c_n(\text{Re } \lambda_n) \mu_n(\text{Re } \lambda_n) / (1 - \mu_n(\text{Re } \lambda_n))| \int |(UV_n \psi_n(\text{Re } \lambda_n)(\text{Re } \lambda_n, \omega)|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (40)$$

Из леммы 3 следует, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |(UV_n \psi_n(\text{Re } \lambda_n))(\text{Re } \lambda_n, \omega)|^2 d\omega = (1/\pi) |\text{Im } \mu_n(\text{Re } \lambda_n)| \times \\ & \times |\langle \psi_n^*(\text{Re } \lambda_n) | V_n \psi_n(\text{Re } \lambda_n) \rangle|. \end{aligned} \quad (41)$$

Далее,

$$\begin{aligned} 1 - \mu_n(\text{Re } \lambda_n) &= \mu_n(\lambda_n) - \mu_n(\text{Re } \lambda_n) = \\ &= i\partial \mu_n(\text{Re } \lambda_n) / \partial \lambda \cdot \text{Im } \lambda_n + O(|\text{Im } \lambda_n|^2); \\ \text{Im } \mu_n(\text{Re } \lambda_n) &= \text{Im}(\mu_n(\text{Re } \lambda_n) - 1) = \\ &= -\text{Im}(i\partial \mu_n(\text{Re } \lambda_n) / \partial \lambda \cdot \text{Im } \lambda_n) + O(|\text{Im } \lambda_n|^2), \end{aligned}$$

и так как в силу леммы 2 $\partial \mu_\infty / \partial \lambda|_{\lambda=\lambda_0}$ — действительное число, то

$$|\text{Im } \mu_n(\text{Re } \lambda_n) / (1 - \mu_n(\text{Re } \lambda_n))| \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Теперь заметим, что

$$|c_n(\text{Re } \lambda_n) \langle \psi_n^*(\text{Re } \lambda_n) | V_n \psi_n(\text{Re } \lambda_n) \rangle| \rightarrow |c_\infty(\lambda_0) \langle \psi_0 | V_\infty \psi_0 \rangle| = 1.$$

Теорема доказана.

Ясно, что если собственное значение $\mu = 1$ имеет кратность m , то в правой части (38) будет m/π .

В приложении к теории потенциального рассеяния величина $t(\lambda, \omega, \omega)$ с точностью до зависящего от λ множителя есть амплитуда рассеяния назад.

Работа выполнена в Институте математического моделирования при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект N93-011-1698.

Список литературы

- [1] Като Т. Теория возмущений и линейные операторы. М.: Мир, 1972.
- [2] Бирман М.Ш., Энтина С.Б. // Изв.АН СССР, сер.матем. 1967. Т. 31. С. 401–430.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
13.IV.1995 г.

А.А. Арсен'ев

RESONANCES OF THE SCATTERING MATRIX AND QUASILEVELS

The connection between resonances of the scattering matrix and quasilevels in the abstract theory of scattering is analyzed.