Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Р. Гадыльшин, О рассеянии на цилиндре с узкой щелью и стенками конечной толщины, *ТМФ*, 1996, том 106, номер 1, 24–43

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1095>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 12:53:11

Р. Р. Гадыльшин

О РАССЕЯНИИ НА ЦИЛИНДРЕ С УЗКОЙ ЩЕЛЬЮ И СТЕНКАМИ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

Метод согласования асимптотических разложений применен к построению асимптотик полюсов аналитического продолжения функции Грина для двумерного аналога резонатора Гельмгольца со стенками конечной толщины и граничными условиями Неймана. Получены явные формулы для главных членов асимптотик полюсов соответствующих обобщенных собственных функций и решений задачи рассеяния.

Известно, что рассеяние акустических волн на идеально жестком цилиндре и H -поляризованных электромагнитных полей на идеально проводящей цилиндрической поверхности сводится к решению краевой задачи Неймана для уравнения Гельмгольца на плоскости во внешности сечения препятствия.

В настоящей работе рассматривается случай, когда сечение рассеивателя в пределе гомеоморфно кольцу, а возмущенная область получается вырезанием узкого канала, соединяющего обе несвязные компоненты внешности предельного сечения.

Известно [1], что аналитическое продолжение решения возмущенной задачи имеет две серии полюсов с малой мнимой частью, не сходящихся к нулю (строгое доказательство существования малых полюсов для двумерной задачи отсутствует). При уменьшении ширины канала связи первая серия сходится к собственным частотам (квадратным корням из собственных значений) предельной краевой задачи в ограниченной компоненте, что полностью аналогично двумерному аналогу классического резонатора Гельмгольца с идеально тонкими стенками [2–5]. Вторая же серия присуща именно рассеивателям со стенками конечной толщины [1, 6–8]. Она порождается конечностью длины канала связи и естественно отсутствует в случае идеально тонких стенок. Фактически рассматриваемый рассеиватель представляет собой систему двух резонаторов, состоящих из “внутренней” ловушки и “входного” резонатора, которым является сам канал связи. В [6] были даны оценки скорости сходимости полюсов.

В настоящей работе методом согласования асимптотических разложений [9–11] строятся полные асимптотики указанных выше полюсов по малому параметру (ширине канала связи) в невырожденных случаях, когда предельное (ненулевое) значение не является общим для обеих серий одновременно и исследуются возникающие резонансные явления, порожаемые этими полюсами.

Статья имеет следующую структуру. В первом разделе дана постановка краевой задачи и приведены некоторые предварительные сведения. Основные результаты сформу-

лированы во втором разделе. В третьем и четвертом разделах строятся асимптотические разложения полюсов, ассоциированных с внутренней ловушкой и каналом связи, соответственно. В пятый раздел вынесено громоздкое доказательство одного из вспомогательных утверждений. В шестом разделе приведены некоторые заключительные замечания, касающиеся, в частности, соотношения полученных результатов для резонатора с известными результатами о собственных значениях для двумерной “гантели” (т.е. для случая двух ограниченных областей, соединенных тонким каналом).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть Ω^{in} и Ω — односвязные ограниченные области в $\mathbb{R}^2$, $\overline{\Omega^{\text{in}}} \subset \Omega$, $\Omega^{\text{ex}} = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$, $\partial\Omega^{\text{in(ex)}} \in C^\infty$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Будем предполагать, что Ω^{in} в окрестности начала координат совпадает с полуплоскостью $x_2 > 0$, область Ω^{ex} в окрестности $\mathbf{x}_0 = (0, -h)$, $h > 0$, совпадает с полуплоскостью $x_2 < -h$, а интервал $(0, -h)$, лежащий на оси Ox_2 , не содержит точек из $\Omega^{\text{in}} \cup \Omega^{\text{ex}}$. Области Ω^{in} и Ω^{ex} являются соответственно внутренней и внешней резонаторов

$$\Omega_\varepsilon = \Omega^{\text{in}} \cup \Omega^{\text{ex}} \cup \mathcal{K}_\varepsilon,$$

где $\mathcal{K}_\varepsilon = (\varepsilon\omega_-, \varepsilon\omega_+) \times [0, -h]$ — узкий канал связи; $0 < \varepsilon \ll 1$.

Математической моделью рассеяния на цилиндре с сечением Ω_ε является следующая краевая задача:

$$(\Delta + k^2)u_\varepsilon = F, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon, \quad \partial u_\varepsilon / \partial \nu = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_\varepsilon, \quad (1.1)$$

$$u_\varepsilon = O(r^{-1/2}), \quad \partial u_\varepsilon / \partial r - iku_\varepsilon = o(r^{-1/2}), \quad r \rightarrow \infty, \quad (1.2)$$

где $r = |\mathbf{x}|$, ν — внешняя нормаль, $k > 0$, а F — квадратично интегрируемая функция с финитным носителем в Ω^{ex} .

Решение задачи (1.1), (1.2) (и его аналитическое продолжение) рассматривается в классе функций, принадлежащих $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\varepsilon)$, и понимается в обобщенном смысле. Очевидно, что обобщенное решение принадлежит $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\varepsilon) \cap W_{2,\text{loc}}^2(Q)$ для любой подобласти Q области Ω_ε , отделенной от ребер. Из финитности F следует, что функция u_ε бесконечно дифференцируема при достаточно больших r . Поэтому условие излучения (1.2) понимается в обычном смысле.

Под предельной внутренней (внешней) задачей будем понимать краевую задачу Неймана для уравнений Гельмгольца в $\Omega^{\text{in(ex)}}$. В дальнейшем представляется удобным считать все функции продолженными нулем вне их первоначальной области определения.

Пусть $\tilde{\mathbb{C}}$ — комплексная плоскость с разрезом вдоль отрицательной вещественной полуоси. Известно [12], что при $k > 0$ краевая задача (1.1), (1.2) и предельная внешняя задача однозначно разрешимы и их функция Грина допускает аналитическое продолжение в $\tilde{\mathbb{C}}$, которое имеет дискретное (при фиксированном ε) множество полюсов Σ_ε и Σ^{ex} , соответственно, лежащее ниже вещественной оси.

Обозначим $\Sigma = \Sigma^{\text{in}} \cup \Sigma^{\text{ex}} \cup \Sigma^{\text{ch}}$, где $\Sigma^{\text{ch}} = \{\pi m/h\}_{m=1}^\infty$, а Σ^{in} — множество ненулевых собственных частот (квадратных корней из собственных значений) задачи Неймана для

$-\Delta$ в Ω^{in} . Пусть K — произвольный компакт в $\widetilde{\mathbb{C}}$ такой, что $K \cap \Sigma = \emptyset$. В [1] показано, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ аналитическое продолжение возмущенной задачи (1.1), (1.2) сходится к решению предельной задачи в $L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ равномерно по $k \in K$. И наоборот, к любому элементу из Σ при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится хотя бы один полюс из Σ_ε . Существование дополнительного предельного вещественного множества Σ^{ch} объясняется тем, что полная предельная задача для (1.1), (1.2) распадается на три задачи — на предельные внутреннюю и внешнюю задачи и на задачу Штурма–Лиувилля на интервале $(-h, 0)$ на оси Ox_2 с нулевыми граничными условиями [1].

Пусть Σ_1^{in} — подмножество простых, ненулевых собственных частот из Σ^{in} , а $\Sigma_1 = (\Sigma_1^{\text{in}} \setminus \Sigma^{\text{ch}}) \cup (\Sigma^{\text{ch}} \setminus \Sigma^{\text{in}})$. Если $k_0 \in \Sigma_1^{\text{in}} \setminus \Sigma^{\text{ch}}$, то через ψ будем обозначать соответствующую нормированную в $L_2(\Omega^{\text{in}})$ собственную функцию внутренней предельной задачи. Если же $k_0 \in \Sigma^{\text{ch}} \setminus \Sigma^{\text{in}}$, то положим $\psi(\mathbf{x}) = \varepsilon^{-1/2} \phi(x_2)$ при $\mathbf{x} \in \mathcal{K}_\varepsilon$ (и $\psi = 0$ вне $\mathcal{K}_\varepsilon$), где

$$\phi(t) = \left(\frac{2}{h(\omega_+ - \omega_-)} \right)^{1/2} \sin(k_0 t).$$

Следуя [1, 8], легко показать, что если $k_0 \in \Sigma_1$, то аналитическое продолжение функции Грина краевой задачи (1.1), (1.2) имеет единственный полюс первого порядка τ_ε , сходящийся к k_0 при $\varepsilon \rightarrow 0$, а для аналитического же продолжения решения (1.1), (1.2) при k , близких к k_0 , справедливо следующее представление:

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}, k) = -(\tau_\varepsilon^2 - k^2)^{-1} \Psi_\varepsilon(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^2} \Psi_\varepsilon(\mathbf{y}) F(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, k), \quad (1.3)$$

где $\tilde{u}_\varepsilon$ сходится к регулярной части аналитического продолжения решения внешней предельной задачи (продолженной нулем вне Ω^{ex}) в норме $L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ равномерно по k , а Ψ_ε — обобщенная собственная функция [12], являющаяся решением уравнения $(\Delta + \tau_\varepsilon^2) \Psi_\varepsilon = 0$ в Ω_ε , удовлетворяющая граничному условию $\partial \Psi_\varepsilon / \partial \nu = 0$ на $\partial \Omega_\varepsilon$ и для которой имеет место сходимость $\Psi_\varepsilon - \psi \rightarrow 0$ в $L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$. Естественно, что при фиксированном ε функция Ψ_ε экспоненциально растет на бесконечности.

Так как исходная задача (1.1), (1.2) рассматривается при частотах $k > 0$, то очевидно, что для вещественных частот первое (резонансное) слагаемое принимает наибольшие значения в пиковом режиме, когда

$$k = k(\varepsilon) = \text{Re} \tau_\varepsilon + O(\text{Im} \tau_\varepsilon).$$

Однако без дополнительной информации об асимптотиках τ_ε (и, в частности, о его мнимой части) и Ψ_ε в Ω^{ex} никакого заключения о “количественном” влиянии резонансного слагаемого на решение нельзя сделать. Поэтому основной целью работы и является построение асимптотик полюса и соответствующей обобщенной собственной функции, которые, в свою очередь, позволяют эффективно использовать представление (1.3) для оценки вклада резонансного слагаемого в наиболее интересном пиковом режиме.

2. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Главные члены асимптотик полюса τ_ε и соответствующей обобщенной собственной функции Ψ_ε зависят от некоторых вполне определенных постоянных и функций. Пусть $G^{\text{ex(in)}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k)$ – функция Грина задачи Неймана в $\Omega^{\text{ex(in)}}$,

$$\sigma = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial S(R)} |G^{\text{ex}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, k_0)|^2 ds,$$

где $S(R)$ – круг радиуса R с центром в начале координат. Обозначим

$$g^{\text{in(ex)}}(k) = g^{\text{in(ex)}}(\mathbf{x}_0^{\text{in(ex)}}, \mathbf{x}_0^{\text{in(ex)}}, k),$$

где $\mathbf{x}_0^{\text{in}} = 0$, $\mathbf{x}_0^{\text{ex}} = \mathbf{x}_0$, $g^{\text{in(ex)}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0^{\text{in(ex)}}, k)$ – регулярная (по $\mathbf{x}$ в окрестности точки $\mathbf{x}_0^{\text{in(ex)}}$ и по k в окрестности точки k_0) часть функции $G^{\text{ex(in)}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0^{\text{in(ex)}}, k)$. Заметим, что $\text{Im } g^{\text{in}}(k_0) = 0$, а $\text{Im } g^{\text{ex}}(k_0) = k_0 \sigma$ (см., например, [4, 8, 13]).

Обозначим

$$\gamma_\omega = ((\omega_-, \omega_+) \times [0, -\infty)) \cup \mathbb{R}_+^2, \quad \mathbb{R}_+^2 = \{\mathbf{x} : x_2 > 0\}.$$

Используя конформное отображение полосы на γ_ω [14], легко показать существование гармонической в γ_ω функции X , принадлежащей $W_{2,\text{loc}}^1(\gamma_\omega)$, удовлетворяющей однородному граничному условию Неймана на $\partial\gamma_\omega$ (за исключением угловых точек) и имеющей на бесконечности асимптотики

$$\begin{aligned} X(\mathbf{x}) &= c_\omega \ln r + \sum_{j=1}^{\infty} c_j^+ r^{-j} \cos j\theta, \quad x_2 \geq 0, \\ X(\mathbf{x}) &= x_2 + q_\omega + O(\exp\{\pi^{-1}|\omega|x_2\}), \quad x_2 < 0, \end{aligned}$$

где θ – полярный угол, c_j^+ – некоторые вещественные постоянные, $c_\omega = \pi^{-1}|\omega|$, а $q_\omega = \pi^{-1}|\omega|(\ln(2|\omega|\pi^{-1}) - 1)$.

Обозначим через $S^{\text{ex}}(t)$ круг радиуса t с центром в $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{y}^* = (y_1, -y_2)$. Основным содержанием работы является доказательство следующих двух утверждений.

ТЕОРЕМА 2.1. *Если $k_0 \in \Sigma_1^{\text{in}} \setminus \Sigma^{\text{ch}}$ и $\psi(\mathbf{0}) \neq 0$, то асимптотики полюса τ_ε , сходящегося к k_0 , и соответствующей обобщенной собственной функции Ψ_ε имеют вид*

$$\begin{aligned} \tau_\varepsilon &= k_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{i-1} \varepsilon^i \ln^j \varepsilon \tau_{ij}, \\ \tau_{10} &= \frac{1}{2} \psi^2(\mathbf{0}) \text{ctg}(k_0 h) |\omega|, \\ \tau_{21} &= \frac{1}{2} k_0 \psi^2(\mathbf{0}) |\omega| (\text{ctg}^2(k_0 h) + \text{cosec}^2(k_0 h)); \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} \tau_{20} &= -\frac{1}{2} (k_0 \psi(\mathbf{0}) |\omega| \operatorname{cosec}(k_0 h))^2 \sigma, \\
\Psi_\varepsilon(\mathbf{x}) &= \psi(\mathbf{x}) + o(1), \quad \mathbf{x} \in \Omega^{\text{in}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}), \\
\Psi_\varepsilon(\mathbf{x}) &= \psi(\mathbf{0}) + o(1), \quad \mathbf{x} \in S(2\varepsilon^{1/2}), \\
\Psi_\varepsilon(\mathbf{x}) &= \psi(\mathbf{0}) \sin^{-1}(k_0 h) (\sin(k_0(x_2 + h)) + o(1)), \\
&\quad \mathbf{x} \in \mathcal{K}_\varepsilon \setminus (S^{\text{ex}}(\varepsilon^{1/2}) \cup S(\varepsilon^{1/2})), \\
\Psi_\varepsilon(\mathbf{x}) &= -\varepsilon k_0 \psi(\mathbf{0}) \sin^{-1}(k_0 h) (X((\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})^* / \varepsilon) - \\
&\quad - |\omega| g^{\text{ex}}(k_0) + o(1)), \quad \mathbf{x} \in S^{\text{ex}}(2\varepsilon^{1/2}), \\
\Psi_\varepsilon(\mathbf{x}) &= -\varepsilon k_0 \psi(\mathbf{0}) \sin^{-1}(k_0 h) |\omega| \left(G^{\text{ex}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, k_0) + o(1) \right), \\
&\quad \mathbf{x} \in \Omega^{\text{ex}} \setminus S^{\text{ex}}(\varepsilon^{1/2})
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$\in L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$.

ТЕОРЕМА 2.2. Асимптотики полюса τ_ε , сходящегося к $k_0 = \pi t/h \in \Sigma^{\text{ch}} \setminus \Sigma^{\text{in}}$, и соответствующей обобщенной собственной функции Ψ_ε имеют вид

$$\begin{aligned}
\tau_\varepsilon &= k_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^i \varepsilon^i \ln^j \varepsilon \tau_{ij}, \\
\tau_{11} &= 2k_0(\pi h)^{-1} |\omega|, \quad \operatorname{Im} \tau_{10} = -h^{-1} k_0^2 |\omega| \sigma;
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_\varepsilon(\mathbf{x}) &= -\varepsilon^{1/2} \frac{1}{2} h^{-1/2} k_0 G^{\text{in}}(\mathbf{x}, \mathbf{0}, k_0) + o(\varepsilon^{1/2}), \quad \mathbf{x} \in \Omega^{\text{in}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}), \\
\Psi_\varepsilon(\mathbf{x}) &= \varepsilon^{1/2} \frac{1}{2} (h|\omega|)^{-1/2} k_0 (X(\mathbf{x}/\varepsilon^{-1}) - |\omega| g^{\text{in}}(k_0) + o(1)), \quad \mathbf{x} \in S(2\varepsilon^{1/2}), \\
\Psi_\varepsilon(\mathbf{x}) &= \varepsilon^{-1/2} \frac{1}{2} (h|\omega|)^{-1/2} \sin(k_0 x_2) (1 + o(1)), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{K}_\varepsilon \setminus (S^{\text{ex}}(\varepsilon^{1/2}) \cup S(\varepsilon^{1/2})), \\
\Psi_\varepsilon(\mathbf{x}) &= (-1)^{m+1} \varepsilon^{1/2} \frac{1}{2} (h|\omega|)^{-1/2} k_0 (X((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^* \varepsilon^{-1}) - \\
&\quad - |\omega| g^{\text{ex}}(k_0) + o(1)), \quad \mathbf{x} \in S^{\text{ex}}(2\varepsilon^{1/2}), \\
\Psi_\varepsilon(\mathbf{x}) &= (-1)^m \varepsilon^{1/2} \frac{1}{2} h^{-1/2} k_0 (G^{\text{ex}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, k_0) + o(1)), \quad \mathbf{x} \in \Omega^{\text{ex}} \setminus S^{\text{ex}}(\varepsilon^{1/2})
\end{aligned} \tag{2.4}$$

$\in L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$.

С учетом утверждений теорем 2.1 и 2.2 представление (1.3) становится уже конструктивным. Действительно, из теорем 2.1 и 2.2, во-первых, получаем, что пиковый режим описывается вещественными $k = k(\varepsilon)$, представимыми в виде

$$\begin{aligned}
k &= k_0 + \varepsilon \tau_{11} + \varepsilon^2 \ln \varepsilon \tau_{21} + \varepsilon^2 (t + o(1)), \\
k &= k_0 + \varepsilon \ln \varepsilon \tau_{11} + \varepsilon (t + o(1))
\end{aligned}$$

для $k_0 \in \Sigma_1^{\text{in}} \setminus \Sigma^{\text{ch}}$ и $k_0 \in \Sigma^{\text{ch}} \setminus \Sigma_1^{\text{in}}$, соответственно (t – любое вещественное число).

Во-вторых, из асимптотик обобщенных собственных функций и (1.3) немедленно следует, что в случае $k_0 \in \Sigma_1^{\text{in}} \setminus \Sigma^{\text{ch}}$ решение (1.1), (1.2) в пиковом режиме имеет асимптотики, равные

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(\mathbf{x}, k) &\sim \varepsilon^{-1} a_F(t) \psi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega^{\text{in}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}), \\ u_\varepsilon(\mathbf{x}, k) &\sim \varepsilon^{-1} a_F(t) \psi(\mathbf{0}), & \mathbf{x} \in S(2\varepsilon^{1/2}), \\ u_\varepsilon(\mathbf{x}, k) &\sim \varepsilon^{-1} a_F(t) \psi(\mathbf{0}) \sin^{-1}(k_0 h) \sin(k_0(x_2 + h)), \\ && \mathbf{x} \in \mathcal{K}_\varepsilon \setminus (S^{\text{ex}}(\varepsilon^{1/2}) \cup S(\varepsilon^{1/2})), \\ u_\varepsilon(\mathbf{x}, k) &\sim -a_F(t) k_0 \psi(\mathbf{0}) \sin^{-1}(k_0 h) (X((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^* / \varepsilon) - |\omega| g^{\text{ex}}(k_0)), \\ && \mathbf{x} \in S^{\text{ex}}(2\varepsilon^{1/2}), \\ u_\varepsilon(\mathbf{x}, k) &\sim -a_F(t) k_0 \psi(\mathbf{0}) \sin^{-1}(k_0 h) |\omega| G^{\text{ex}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, k) + u^{\text{ex}}(\mathbf{x}, k), \\ && \mathbf{x} \in \Omega^{\text{ex}} \setminus S^{\text{ex}}(\varepsilon^{1/2}), \\ a_F(t) &= (2(t - \tau_{20}))^{-1} \psi(\mathbf{0}) \sin^{-1}(k_0 h) |\omega| u^{\text{ex}}(\mathbf{x}_0, k_0), \end{aligned}$$

где $u^{\text{ex}}(\mathbf{x}, k)$ – решение внешней предельной задачи Неймана в Ω^{ex} .

Аналогично в случае $k_0 \in \Sigma^{\text{ch}} \setminus \Sigma_1^{\text{in}}$ из (2.4) и (1.3) следует, что в пиковом режиме решение имеет асимптотики

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(\mathbf{x}, k) &\sim -b_F(t) k_0 G^{\text{in}}(\mathbf{x}, \mathbf{0}, k_0), & \mathbf{x} \in \Omega^{\text{in}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}), \\ u_\varepsilon(\mathbf{x}, k) &\sim b_F(t) |\omega|^{-1/2} k_0 (X(\mathbf{x}/\varepsilon^{-1}) - |\omega| g^{\text{in}}(k_0)), & \mathbf{x} \in S(2\varepsilon^{1/2}), \\ u_\varepsilon(\mathbf{x}, k) &\sim \varepsilon^{-1} b_F(t) |\omega|^{-1/2} \sin(k_0 x_2) (1 + o(1)), \\ && \mathbf{x} \in \mathcal{K}_\varepsilon \setminus (S^{\text{ex}}(\varepsilon^{1/2}) \cup S(\varepsilon^{1/2})), \\ u_\varepsilon(\mathbf{x}, k) &\sim (-1)^{m+1} b_F(t) |\omega|^{-1/2} k_0 (X((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^* \varepsilon^{-1}) - |\omega| g^{\text{ex}}(k_0)), \\ && \mathbf{x} \in S^{\text{ex}}(2\varepsilon^{1/2}), \\ u_\varepsilon(\mathbf{x}, k) &\sim (-1)^m b_F(t) k_0 G^{\text{ex}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, k) + u^{\text{ex}}(\mathbf{x}, k), & \mathbf{x} \in \Omega^{\text{ex}} \setminus S^{\text{ex}}(\varepsilon^{1/2}), \\ b_F(t) &= (-1)^m (8h(\tau_{10} - t))^{-1} u^{\text{ex}}(\mathbf{x}_0, k_0). \end{aligned}$$

Из асимптотик решений в Ω^{ex} , в частности, следует, что полюсы τ_ε имеют резонансный характер в обоих рассматриваемых случаях.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1

Обозначим $\alpha_{\text{in}} = 1$, $\alpha_{\text{ex}} = 0$,

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(\mathbf{x}, k) &= (k_0^2 - k^2) R_0^{\text{in(ex)}} G^{\text{in(ex)}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0^{\text{in(ex)}}, k) + \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{i - \alpha_{\text{in(ex)}}} \varepsilon^i \ln^j \varepsilon (k_0^2 - k^2) R_{i-j}^{\text{in(ex)}, i} (D_y) G^{\text{in(ex)}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0^{\text{in(ex)}}, k), \\ R_i^{\text{in(ex)}, j} (D_y) &= \sum_{q=\alpha_{\text{in(ex)}}}^i a_{ijq}^{\text{in(ex)}} \frac{\partial^q}{\partial y_1^q}, \end{aligned}$$

где $R_0^{\text{in(ex)}}$ и $a_{ijq}^{\text{in(ex)}}$ — некоторые постоянные.

Отметим, что коэффициенты ряда $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(\mathbf{x}, k)$ аналитичны по переменной k в некоторой комплексной окрестности точки k_0 , являются решением уравнения $(\Delta + k^2)U = 0$ в $\Omega^{\text{in(ex)}}$ и удовлетворяют граничному условию $\partial U / \partial \nu = 0$ на $\Gamma_0 \setminus \{0\}$, а при вещественных k коэффициенты ряда $\psi_\varepsilon^{\text{ex}}(\mathbf{x}, k)$ удовлетворяют и условию излучения (1.2). Поэтому вне канала связи и малых окрестностей его концов полные асимптотики обобщенной функции представляется удобным искать в виде

$$\psi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(\mathbf{x}, \tau_\varepsilon), \quad \mathbf{x} \in \Omega^{\text{in(ex)}} \setminus S^{\text{in(ex)}}(\varepsilon^{1/2}), \quad (3.1)$$

где $S^{\text{in}}(t) = S(t)$.

Заметим, что обобщенные собственные функции ψ_ε и Ψ_ε , фигурирующие в формулировке теоремы 2.1 и в (3.1), равны с точностью до скалярного множителя, равного $1 + o(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В канале же связи и в малых окрестностях его концов полные асимптотики ψ_ε строятся в виде

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon(\mathbf{x}) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \varepsilon^i \ln^j \varepsilon w_{ij}(x_2), \\ \mathbf{x} &\in \mathcal{K}_\varepsilon \setminus (S^{\text{ex}}(\varepsilon^{1/2}) \cup S^{\text{in}}(\varepsilon^{1/2})), \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon(\mathbf{x}) &= \sum_{i=\beta_{\text{in(ex)}}}^{\infty} \sum_{j=0}^i \varepsilon^i \ln^j \varepsilon v_{ij}^{\text{in(ex)}}(\mathbf{x}^{\text{in(ex)}}/\varepsilon), \\ \mathbf{x} &\in S^{\text{in(ex)}}(2\varepsilon^{1/2}), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $\mathbf{x}^{\text{in}} = \mathbf{x}$, $\mathbf{x}^{\text{ex}} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^*$, $\beta_{\text{in(ex)}} = 1 - \alpha_{\text{in(ex)}}$.

Краевые задачи для коэффициентов рядов (3.3) получаются стандартной подстановкой (см., например, [11]) рядов (2.1), (3.3) в (1.1) при $F = 0$ и переходом к переменной $\xi = \mathbf{x}^{\text{in(ex)}}/\varepsilon$:

$$\begin{aligned} \Delta v_{ji} &= -k_0^2 v_{j-2,i} - \sum_{q=1}^{j-2-\beta_{\text{in(ex)}}} \sum_{t=0}^{q-1+\beta} \lambda_{qt} v_{j-q-2,i-t}, \quad \xi \in \gamma_\omega, \\ \partial v_{ji} / \partial \nu &= 0, \quad \xi \in \partial \gamma_\omega, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $\beta = 0$, λ_{qt} — коэффициенты ряда $\lambda_\varepsilon = \tau_\varepsilon^2 - k_0^2$, а верхние индексы у $v_{qt}^{\text{in(ex)}}$ опущены.

Подставляя ряды (2.1), (3.2) в (1.1) (при $F = 0$), получаем обыкновенные дифференциальные уравнения для w_{ji}

$$w_{ji}''(x_2) + k_0^2 w_{ji}(x_2) + \sum_{q=1}^{j+\beta} \sum_{t=0}^{q-1+\beta} \lambda_{qt} w_{j-q,i-t}(x_2) = 0, \quad -h < x_2 < 0. \quad (3.5)$$

Очевидно, что функции

$$\begin{aligned} w_{ji}(x_2) = & -k_0^{-1} \sum_{q=1}^j \sum_{t=0}^{q-1+\beta} \lambda_{qt} \int_{-h}^{x_2} \sin(k_0(x_2-t)) w_{j-q,i-t}(t) dt + \\ & + a_{ji} \sin(k_0 x_2) + b_{ji} \cos(k_0 x_2), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где a_{ji} и b_{ji} – произвольные постоянные, являются решениями (3.5). Всюду далее коэффициенты ряда (3.5) предполагаются выбранными в соответствии с (3.6).

Пусть $\rho = |\xi|$, $P_j(\xi)$ – однородные полиномы степени j , а $T_j(\xi)$ – однородные функции степени j , представимые в виде $P_{j+2q}(\xi) \rho^{-2q}$ при каком-нибудь целом $q \geq 1$, которые удовлетворяют граничному условию $\partial P_j(\xi)/\partial \xi_2 = 0$ при $\xi_2 = 0$ и $\partial T_j(\xi)/\partial \xi_2 = 0$ при $\xi_2 = 0$, $\xi \neq 0$, соответственно. Обозначим через $\tilde{\mathcal{A}}_j$ множество рядов вида

$$T(\xi) = \sum_{q=-\infty}^j T_q(\xi) + \ln \rho \sum_{n=0}^j P_n(\xi).$$

Далее, обозначим через $w_\varepsilon(\mathbf{x})$ ряд (8). На суммах $U(\mathbf{x}, \varepsilon)$ вида $w_\varepsilon(\mathbf{x})$ и $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(\mathbf{x}, \tau_\varepsilon)$, где τ_ε – произвольная функция, имеющая асимптотику (2.1) (или (2.3)), определим операторы “переразложения” $K_q^{\text{in(ex)}}$ следующим образом [11]. Разложим коэффициенты $U(\mathbf{x}, \varepsilon)$ в ряды при $|\mathbf{x}^{\text{in(ex)}}| \rightarrow 0$ и перейдем к переменным $\xi = \mathbf{x}^{\text{in(ex)}} \varepsilon^{-1}$ (в случае $U(\mathbf{x}, \varepsilon) = \psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(\mathbf{x}, \tau_\varepsilon)$ функцию τ_ε заменим ее асимптотическим рядом). В полученном таким образом двойном ряду возьмем сумму членов $\varepsilon^j \ln^i \varepsilon \Phi(\xi)$ при $j \leq q$. Эту сумму и назовем $K_q^{\text{in(ex)}}(U(\mathbf{x}, \varepsilon))$.

Из определений $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}$, w_ε , $K_q^{\text{in(ex)}}$ и асимптотик функций Грина предельных задач и их производных (см., например, [13]) вытекает

ЛЕММА 3.1. Пусть τ_ε – произвольная функция, имеющая асимптотику (2.1). Тогда для любого целого $N \geq 0$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} K_N^{\text{in(ex)}} \left(\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(\mathbf{x}, \tau_\varepsilon) \right) &= \sum_{i=\beta_{\text{in(ex)}}}^N \sum_{j=0}^i \varepsilon^i \ln^j \varepsilon V_{ij}^{\text{in(ex)}}(\xi), \\ K_N^{\text{in(ex)}}(w_\varepsilon(\mathbf{x})) &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^i \varepsilon^i \ln^j \varepsilon W_{ij}^{\text{in(ex)}}(\xi_2), \end{aligned} \quad (3.7)$$

где $V_{ij}^{\text{in(ex)}} \in \tilde{\mathcal{A}}_{i-j}$, а $W_{ij}^{\text{in(ex)}}$ – многочлены $(i-j)$ -го порядка.

Справедливы представления

$$\begin{aligned} W_{ij}^{\text{in}}(\xi_2) &= \widetilde{W}_{ij}^{\text{in}}(\xi_2) + b_{ij}, \\ W_{ij}^{\text{ex}}(\xi_2) &= \widetilde{W}_{ij}^{\text{ex}}(\xi_2) - a_{ij} \sin(k_0 h) + b_{ij} \cos(k_0 h), \\ \widetilde{W}_{ii}^{\text{in(ex)}}(\xi_2) &= 0, \quad \widetilde{W}_{10}^{\text{in}}(\xi_2) = a_{00} k_0 \xi_2, \end{aligned}$$

$$\widetilde{W}_{10}^{\text{ex}}(\xi_2) = -k_0(b_{00} \sin(k_0 h) + a_{00} \cos(k_0 h))\xi_2,$$

где $\widetilde{W}_{ij}^{\text{in(ex)}}$ не зависят от τ_{qt} , a_{qt} и b_{qt} при $q \geq i$,

$$V_{00}^{\text{in}}(\xi) \equiv R_0^{\text{in}} \psi^2(\mathbf{0}), \quad V_{ii}^{\text{in(ex)}}(\xi) \equiv 2k_0 \tau_{i,i-1} \pi^{-1} R_0^{\text{in(ex)}}, \quad i \geq 1,$$

$$\begin{aligned} V_{10}^{\text{in(ex)}}(\xi) &= \alpha_{\text{in(ex)}} \psi_{x_1}(\mathbf{0}) \psi(\mathbf{0}) (R_0^{\text{in}} \xi_1 + a_{101}^{\text{in}}) + \\ &+ 2k_0 \tau_{10} R_0^{\text{in(ex)}} \pi^{-1} \left(\ln \rho - \pi g^{\text{in(ex)}}(\mathbf{x}_0^{\text{in(ex)}}, \mathbf{x}_0^{\text{in(ex)}}, k_0) \right) - \\ &- 2k_0 \tau_{10} \pi^{-1} \Sigma_{00}^{\text{in(ex)}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{ij}^{\text{in(ex)}}(\xi) &= \widetilde{V}_{ij}^{\text{in(ex)}}(\xi) + \alpha_{\text{in(ex)}} \psi_{x_1}(\mathbf{0}) \psi(\mathbf{0}) a_{ij1}^{\text{in}} + \\ &+ \beta_{\text{in(ex)}} 2k_0 \tau_{10} \pi^{-1} a_{i-1,j0}^{\text{ex}} \left(\ln \rho - \pi g^{\text{in(ex)}}(k_0) \right) + \\ &+ 2k_0 \tau_{ij} \pi^{-1} R_0^{\text{in(ex)}} \left(\ln \rho - \pi g^{\text{in(ex)}}(k_0) \right) - \\ &- 2k_0 \pi^{-1} \left(\tau_{ij} \Sigma_{00}^{\text{in(ex)}} + \tau_{10} \Sigma_{i-1,j} \right), \quad i > j, \quad i \geq 2, \end{aligned}$$

$$\Sigma_{sn}^{\text{in(ex)}} = \sum_{t=1}^{\infty} a_{t+s,nt}^{\text{in(ex)}} (t-1)! \rho^{-t} \cos(t\theta),$$

где $\widetilde{V}_{ij}^{\text{in(ex)}}$ не зависят от τ_{qn} и $a_{t+q-1,nt}^{\text{in(ex)}}$ при $q \geq i$.

Ряды $V_{ij}^{\text{in(ex)}}$ (а следовательно, и ряды $\widetilde{V}_{ij}^{\text{in(ex)}} \in \widetilde{\mathcal{A}}_{i-j}$) являются формальными асимптотическими решениями краевой задачи (3.4) при $\rho \rightarrow \infty$, $\xi_2 \geq 0$, где функции v_{qt} заменены на $V_{qt}^{\text{in(ex)}}$.

Если $W_{00}^{\text{ex}} \equiv 0$, то $W_{ij}^{\text{in(ex)}}$ (а следовательно, и $\widetilde{W}_{ij}^{\text{in(ex)}}$) являются формальными асимптотическими решениями краевой задачи (3.4) при $\rho \rightarrow \infty$, $\xi_2 < 0$, где функции v_{qt} заменены на $W_{qt}^{\text{in(ex)}}$.

Взяв мнимую часть от (3.7), получаем

СЛЕДСТВИЕ:

- 1) если $\text{Im } R_0^{\text{ex}} = \text{Im } \tau_{10} = 0$, то $\text{Im } V_{10}^{\text{ex}} = 0$;
- 2) если $\text{Im } a_{00} = \text{Im } b_{00} = \text{Im } b_{10} = 0$, то $\text{Im } W_{10}^{\text{ex}} = -\text{Im } a_{10} \sin(k_0 h)$;
- 3) если $\text{Im } a_{00} = 0$, то $\text{Im } \widetilde{W}_{20}^{\text{in}} = k_0 \text{Im } a_{10} \xi_2$;
- 4) если $\text{Im } R_0^{\text{in}} = \text{Im } a_{101}^{\text{in}} = 0$, то $\text{Im } \widetilde{V}_{20}^{\text{in}} = 0$.

Таким образом, согласование рядов (3.1)–(3.3) свелось к доказательству существования решений $v_{ij}^{\text{in(ex)}}$ краевых задач (3.4), имеющих на бесконечности асимптотики, равные $V_{ij}^{\text{in(ex)}}$ при $\xi_2 \geq 0$ и равные $W_{ij}^{\text{in(ex)}}$ при $\xi_2 < 0$.

Рассмотрим задачу (3.4). Пусть $0 = \mu_0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots$ – собственные частоты задачи Неймана для оператора $-d^2/d\xi_1^2$ на интервале (ω_-, ω_+) , $\beta_q(\xi_1)$ – соответствующие нормированные в $L_2(\omega)$ собственные функции. Обозначим через $\widetilde{\mathcal{B}}_{q,n}$ множество рядов вида

$$H(\xi) = R_q^{(0)}(\xi_2) + \sum_{j=1}^{\infty} R_n^{(j)}(\xi_2) \beta_j(\xi_1) \exp\{\mu_j \xi_2\},$$

где $R_i^{(m)}(t)$ — многочлены порядка i . При отрицательных n под $\tilde{\mathcal{B}}_{q,n}$ понимается множество многочленов порядка q . Положим $\tilde{\mathcal{B}} = \bigcup_{n,q} \tilde{\mathcal{B}}_{q,n}$.

Обозначим через $\mathcal{A}_m$ множество функций из $C^\infty(\gamma_\omega) \cap W_{2,\text{loc}}^1(\gamma_\omega)$, удовлетворяющих однородному условию Неймана на $\partial\gamma_\omega$ и имеющих на бесконечности дифференцируемые асимптотики из $\tilde{\mathcal{A}}_m$ и $\tilde{\mathcal{B}}$ при $\xi_2 \geq 0$ и $\xi_2 < 0$, соответственно. Заметим, что по определению $X \in \mathcal{A}_0$.

ЛЕММА 3.2. Пусть $f \in \mathcal{A}_m$, ряд $V \in \tilde{\mathcal{A}}_{m+2}$ является формальным асимптотическим решением уравнения $\Delta V = f$ при $\rho \rightarrow \infty$, $\xi_2 \geq 0$, а многочлен $W(\xi_2)$ удовлетворяет уравнению $\Delta W = f + o(1)$ (или, что то же самое, уравнению $W'' = f + o(1)$) при $\rho \rightarrow \infty$ и $\xi_2 < 0$.

Тогда существует функция $v \in \mathcal{A}_{m+2}$, являющаяся решением краевой задачи

$$\Delta v = f, \quad \xi \in \gamma_\omega, \quad \partial v / \partial \nu = 0, \quad \xi \in \partial\gamma_\omega \quad (3.8)$$

и имеющая при $\rho \rightarrow \infty$ дифференцируемые асимптотики

$$\begin{aligned} v(\xi) &= V(\xi) + c_0 \ln \rho + \sum_{j=1}^{\infty} c_j \rho^{-j} \cos(j\theta), & \xi_2 \geq 0, \\ v(\xi) &= W(\xi_2) + q_0 + O(\xi_2^n \exp\{\mu_1 \xi_2\}), & \xi_2 < 0, \end{aligned}$$

где $n \geq 0$, q_0 и c_i — некоторые числа.

Так как доказательство этого достаточно очевидного утверждения, к сожалению, громоздко, то представляется удобным вынести его отдельно в пятый раздел.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если v_1 и v_2 — два решения (3.8) и на бесконечности $v_1 - v_2 = \alpha \ln r + o(1)$ при $\xi_2 \geq 0$ и $v_1 - v_2 = O(1)$ при $\xi_2 < 0$, то $v_1 = v_2$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если v_1 и v_2 — два решения (3.8) и на бесконечности $v_1 - v_2 = O(1)$ при $\xi_2 \geq 0$ и $\xi_2 < 0$, то $v_1 = v_2 + \text{const}$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Существует гармоническая в γ_ω функция $Y \in \mathcal{A}_1$, имеющая на бесконечности асимптотики

$$\begin{aligned} Y(\xi) &= \xi_1 + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \rho^{-j} \cos(j\theta), & \xi_2 \geq 0, \\ Y(\xi) &= q^\omega + O(\exp\{\mu_1 \xi_2\}), & \xi_2 < 0. \end{aligned}$$

Справедливость последних трех утверждений вытекает из интегрирования по частям тождеств

$$\int_{S(R) \cap \gamma_\omega} \Delta(v_1 - v_2) d\xi = 0, \quad \int_{S(R) \cap \gamma_\omega} \Delta Y d\xi = 0, \quad R \rightarrow \infty.$$

В свою очередь, из следствия 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4. Если $\operatorname{Im} V = \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} W = 0$, то $\operatorname{Im} c_i = \operatorname{Im} q_0 = 0$.

Леммы 3.1 и 3.2 позволяют перейти к согласованию асимптотических разложений. Обозначим через $v_\varepsilon^{\operatorname{in}(\operatorname{ex})}(\mathbf{x}^{\operatorname{in}(\operatorname{ex})}/\varepsilon)$ ряды (3.3), а через $v_{\varepsilon,N}^{\operatorname{in}(\operatorname{ex})}(\boldsymbol{\xi})$ — частичные суммы этих рядов.

ТЕОРЕМА 3.1. Существуют функция τ_ε , имеющая асимптотику (2.1), и ряды (3.1)–(3.3), (3.6) такие, что

$$\begin{aligned} R_0^{\operatorname{in}} &= \psi^{-1}(\mathbf{0}), \quad v_{00}^{\operatorname{in}} \equiv b_{00} = R_0^{\operatorname{in}} \psi^2(\mathbf{0}), \quad a_{00} = b_{00} \operatorname{ctg}(k_0 h), \\ \tau_{10} &= (2R_0^{\operatorname{in}})^{-1} \pi a_{00} c_\omega, \quad R_0^{\operatorname{ex}} = -(2\tau_{10})^{-1} \pi (b_{00} \sin(k_0 h) + a_{00} \cos(k_0 h)) c_\omega, \\ v_{10}^{\operatorname{ex}} &= -k_0 (b_{00} \sin(k_0 h) + a_{00} \cos(k_0 h)) X - 2k_0 \tau_{10} R_0^{\operatorname{ex}} g^{\operatorname{ex}}(k_0), \\ b_{10} &= a_{00} k_0 q_\omega + \psi_{x_1}(\mathbf{0}) \psi(\mathbf{0}) (R_0^{\operatorname{in}} q^\omega + a_{101}^{\operatorname{in}}) - 2k_0 \tau_{10} R_0^{\operatorname{in}} g^{\operatorname{in}}(k_0), \\ a_{10} &= \sin^{-1}(k_0 h) (b_{10} \cos(k_0 h) + k_0 (a_{00} \sin(k_0 h) + b_{00} \cos(k_0 h)) q_\omega + \\ &\quad + 2k_0 \tau_{10} R_0^{\operatorname{ex}} g^{\operatorname{ex}}(k_0)), \\ v_{11}^{\operatorname{in}} &\equiv b_{11} = 2k_0 \tau_{10} \pi^{-1} R_0^{\operatorname{in}}, \quad v_{11}^{\operatorname{ex}} \equiv 2k_0 \tau_{10} \pi^{-1} R_0^{\operatorname{ex}}, \\ a_{11} &= \sin^{-1}(k_0 h) (b_{11} \cos(k_0 h) - 2k_0 \tau_{10} \pi^{-1} R_0^{\operatorname{ex}}), \quad \tau_{21} = a_{11} \pi (2R_0^{\operatorname{in}})^{-1}, \\ \operatorname{Im} \tau_{20} &= \operatorname{Im} a_{10} \pi (2R_0^{\operatorname{in}})^{-1} c_\omega, \end{aligned} \quad (3.9)$$

коэффициенты $v_{ij}^{\operatorname{in}(\operatorname{ex})} \in \mathcal{A}_{i-j}$ являются решениями рекуррентной системы краевых задач (3.4) и для любого целого $N \geq 0$ справедливы дифференцируемые асимптотические равенства

$$K_N^{\operatorname{in}(\operatorname{ex})}(\psi_\varepsilon^{\operatorname{in}(\operatorname{ex})}(\mathbf{x}, \tau_\varepsilon)) = v_{\varepsilon,N}^{\operatorname{in}(\operatorname{ex})}(\boldsymbol{\xi}), \quad \xi_2 \geq 0, \quad (3.10)$$

$$K_N^{\operatorname{in}(\operatorname{ex})}(w_\varepsilon(\mathbf{x})) = v_{\varepsilon,N}^{\operatorname{in}(\operatorname{ex})}(\boldsymbol{\xi}) + O(\xi_2^{m_N} \exp\{\mu_1 \xi_2\}), \quad \xi_2 < 0, \quad (3.11)$$

при $\rho \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Коэффициент R_0^{in} выбирается из следующих соображений. Как было сказано выше, обобщенная собственная функция Ψ_ε сходится к ψ в $\Omega^{\operatorname{in}}$ и к нулю в $\Omega^{\operatorname{ex}}$. С другой стороны, при по-членном переходе к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $k \rightarrow k_0$ ряды $\psi_\varepsilon^{\operatorname{in}}(\mathbf{x}, k) \rightarrow R_0^{\operatorname{in}} \psi(\mathbf{0}) \psi$, $\psi_\varepsilon^{\operatorname{ex}}(\mathbf{x}, k) \rightarrow 0$. Поэтому коэффициент R_0^{in} естественно положить равным $\psi^{-1}(\mathbf{0})$.

Положив $v_{00}^{\operatorname{in}}$, b_{00} в соответствии с (3.9), во-первых, получаем, что $v_{00}^{\operatorname{in}} \in \mathcal{A}_0$ удовлетворяет (3.4), а, во-вторых, в силу леммы 3.1 добиваемся равенства (3.10) при $N = 0$.

Определив a_{00} согласно (3.9), получаем равенство $W_{00}^{\operatorname{ex}} = 0$ (а следовательно, и равенство (3.11) для $N = 0$) и завершаем “нулевой” шаг согласования.

Далее функции

$$\begin{aligned} v_{10}^{\operatorname{in}} &= a_{00} k_0 X + \psi_{x_1}(\mathbf{0}) \psi(\mathbf{0}) R_0^{\operatorname{in}} Y + c_{10}^{\operatorname{in}}, \\ v_{10}^{\operatorname{ex}} &= -k_0 (b_{00} \sin(k_0 h) + a_{00} \cos(k_0 h)) X + c_{10}^{\operatorname{ex}}, \end{aligned}$$

где $c_{10}^{\text{in(ex)}}$ — произвольные постоянные, принадлежат $\mathcal{A}_1$, являются решениями (3.4) и в силу леммы 3.1, определения X и следствий 3.4 леммы 3.2 для них при $\rho \rightarrow \infty$ справедливы равенства

$$W_{10}^{\text{in}}(\xi) - v_{10}^{\text{in}}(\xi) = b_{10} - a_{00}k_0q_\omega - \psi_{x_1}(\mathbf{0})\psi(\mathbf{0})R_0^{\text{in}}q^\omega - c_{10}^{\text{in}} + O(\exp\{\mu_1\xi_2\}), \quad \xi_2 < 0; \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} V_{10}^{\text{in}}(\xi) - v_{10}^{\text{in}}(\xi) &= \ln \rho (2k_0\tau_{10}R_0^{\text{in}}\pi^{-1} - a_{00}k_0c_\omega) - \\ &\quad - 2k_0\tau_{10}R_0^{\text{in}}g^{\text{in}}(k_0) + \psi_{x_1}(\mathbf{0})\psi(\mathbf{0})a_{101}^{\text{in}} - c_{10}^{\text{in}} - \\ &\quad - \sum_{t=1}^{\infty} (2k_0\tau_{10}\pi^{-1}a_{t0t}^{\text{in}} + d_t^{\text{in}}\rho^{-t}) \cos(t\theta), \quad \xi_2 \geq 0; \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} W_{10}^{\text{ex}}(\xi) - v_{10}^{\text{in}}(\xi) &= -a_{10} \sin(k_0h) + b_{10} \cos(k_0h) - c_{10}^{\text{ex}} + \\ &\quad + k_0(a_{00} \sin(k_0h) + b_{00} \cos(k_0h))q_\omega + O(\exp\{\mu_1\xi_2\}), \quad \xi_2 < 0; \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} V_{10}^{\text{ex}}(\xi) - v_{10}^{\text{ex}}(\xi) &= k_0(2\tau_{10}R_0^{\text{ex}}\pi^{-1} + (b_{00} \sin(k_0h) + \\ &\quad + a_{00} \cos(k_0h))c_\omega) \ln \rho - 2k_0\tau_{10}R_0^{\text{ex}}g^{\text{ex}}(k_0) - c_{10}^{\text{ex}} - \\ &\quad - \sum_{t=1}^{\infty} (2k_0\tau_{10}\pi^{-1}a_{t0t}^{\text{ex}} + d_t^{\text{ex}})\rho^{-t} \cos(t\theta), \quad \xi_2 \geq 0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где $d_t^{\text{in(ex)}}$ — некоторые вещественные числа. Приравнивая в правой части (3.13) коэффициент при $\ln \rho$ к нулю, получаем значение (3.9) для τ_{10} . Аналогично, приравнивая в правой части (3.15) коэффициент при $\ln \rho$ к нулю, получаем значение (3.9) для R_0^{ex} . Полагая равными нулю коэффициенты при ρ^{-t} в правых частях (3.13) и (3.15), определяем постоянные $a_{t0t}^{\text{in(ex)}}$ (в том числе и *вещественную* постоянную a_{101}^{in}). Далее, определяя $c_{10}^{\text{in(ex)}}$ как

$$\begin{aligned} c_{10}^{\text{in}} &= -2k_0\tau_{10}R_0^{\text{in}}g^{\text{in}}(k_0) + \psi_{x_1}(\mathbf{0})\psi(\mathbf{0})a_{101}^{\text{in}}, \\ c_{10}^{\text{ex}} &= -2k_0\tau_{10}R_0^{\text{ex}}g^{\text{ex}}(k_0), \end{aligned}$$

добиваемся равенств

$$V_{10}^{\text{in(ex)}}(\xi) - v_{10}^{\text{in(ex)}}(\xi) = 0, \quad \xi_2 \geq 0, \quad (3.16)$$

и получаем значение (3.9) для v_{10}^{ex} .

Приравнивая же к нулю постоянные в правых частях (3.12), (3.14), находим значения (3.9) для a_{10} и b_{10} и добиваемся равенств

$$W_{10}^{\text{in(ex)}}(\xi) - v_{10}^{\text{in(ex)}}(\xi) = O(\exp\{\mu_1\xi_2\}), \quad \xi_2 < 0. \quad (3.17)$$

Далее, определяя b_{11} , a_{11} и $v_{11}^{\text{in(ex)}}$ согласно (3.9), в силу леммы 3.1 получаем равенства

$$v_{11}^{\text{in(ex)}} = V_{11}^{\text{in(ex)}}, \quad \xi_2 \geq 0, \quad v_{11}^{\text{in(ex)}} = W_{11}^{\text{in(ex)}}, \quad \xi_2 < 0. \quad (3.18)$$

Из соотношений (3.16)–(3.18) вытекает справедливость равенств (3.10), (3.11) для $N = 1$.

Дальнейшее доказательство теоремы 3.1 проводится по индукции на основе утверждений лемм 3.1 и 3.2. На n -м шаге строятся решения $\tilde{v}_{nj}^{\text{in(ex)}} \in \mathcal{A}_{n-j}$ задачи (3.4), имеющие асимптотики на бесконечности,

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{nj}^{\text{in(ex)}}(\xi) &= \tilde{V}_{nj}^{\text{in(ex)}}(\xi) + O(\ln \rho), \quad \xi_2 \geq 0, \\ \tilde{v}_{nj}^{\text{in(ex)}}(\xi) &= \tilde{W}_{nj}^{\text{in(ex)}}(\xi) + O(1), \quad \xi_2 < 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Приравнявая в (3.19) к нулю коэффициенты при $\ln \rho$ и ρ^{-n} ($n > 0$), определяем τ_{nj} и $a_{t+n-1,jt}$. Затем выбираем постоянные $c_{nj}^{\text{in(ex)}}$ так, чтобы для функций $v_{nj}^{\text{in(ex)}} = \tilde{v}_{nj}^{\text{in(ex)}} + c_{nj}^{\text{in(ex)}}$ выполнялось асимптотическое равенство

$$v_{nj}^{\text{in(ex)}} = V_{nj}^{\text{in(ex)}}, \quad \xi_2 \geq 0. \quad (3.20)$$

Коэффициенты b_{nj} и a_{nj} последовательно определяются из равенств

$$v_{nj}^{\text{in(ex)}}(\xi) = W_{nj}^{\text{in(ex)}}(\xi) + O(\xi_2^{m_n} \exp\{\mu_1 \xi_2\}), \quad \xi_2 < 0. \quad (3.21)$$

Из (3.20), (3.21) и предположения индукции вытекает справедливость (3.10), (3.11) для $N = n$.

На втором шаге согласования, действуя по указанной схеме, в частности, получаем, что

$$\tilde{v}_{21}^{\text{in}} = a_{11} k_0 X \Rightarrow \tilde{v}_{21}^{\text{in}}(\xi) - V_{21}^{\text{in}}(\xi) = k_0 (a_{11} - 2\tau_{21}\pi^{-1}R_0^{\text{in}}) \ln \rho + O(1).$$

Приравнявая к нулю коэффициент при $\ln \rho$ в правой части последнего равенства, получаем значение (3.9) для τ_{21} .

Покажем справедливость формулы (3.9) для $\text{Im } \tau_{20}$. Заметим, что по построению (см. (3.9)) все условия следствия леммы 3.1 выполнены. Из приведенного алгоритма, леммы 3.1, пунктов 1 и 2 ее следствия и следствий 2 и 4 леммы 3.2 получаем, что

$$\text{Im } v_{10}^{\text{ex}} \equiv -\text{Im } a_{10} \sin(k_0 h) = -2k_0^2 \tau_{10} R_0^{\text{ex}} \sigma.$$

Следовательно,

$$\text{Im } a_{10} = 2k_0^2 \tau_{10} R_0^{\text{ex}} \sin^{-1}(k_0 h) \sigma. \quad (3.22)$$

С другой стороны, в силу (3.4) и вещественности v_{00}^{in} получаем, что $\text{Im } v_{20}^{\text{in}}$ является решением краевой задачи

$$\Delta(\text{Im } v_{20}^{\text{in}}) = 0, \quad \xi \in \gamma_\omega, \quad \partial(\text{Im } v_{20}^{\text{in}})/\partial\nu = 0, \quad \xi \in \partial\gamma_\omega. \quad (3.23)$$

Из (3.22), (3.23) и пунктов 3 и 4 следствия леммы 3.1 вытекает, что $\operatorname{Im} \tilde{v}_{20}^{\text{in}} = k_0 \operatorname{Im} a_{10} X$. Следовательно, в силу леммы 3.1

$$\operatorname{Im} (\tilde{v}_{20}^{\text{in}}(\xi) - V_{20}^{\text{in}}(\xi)) = k_0 (\operatorname{Im} a_{10} c_\omega - 2 \operatorname{Im} \tau_{20} \pi^{-1} R_0^{\text{in}}) \ln \rho + O(1).$$

Приравнивая к нулю коэффициент при $\ln \rho$ в правой части последнего равенства, получаем значение (3.9) для $\operatorname{Im} \tau_{20}$. Теорема 3.1 доказана.

Из теоремы 3.1 стандартным образом (см., например, доказательства леммы 6 и теоремы 3 в [8]) следует, что полюс τ_ε , сходящийся к $k_0 \in \Sigma_1^{\text{in}} \setminus \Sigma^{\text{ch}}$, и соответствующая обобщенная функция ψ_ε имеют асимптотики (2.1), (3.1)–(3.3), (3.6), (3.9). В свою очередь, из соотношений (3.9) вытекают все соотношения из (2.2). Теорема 2.1 доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2

В этом разделе всюду считается, что $k_0 \in \Sigma^{\text{ch}} \setminus \Sigma^{\text{in}}$, $\alpha_{\text{in}} = \alpha_{\text{ex}} = 0$, $\beta = 1$ и

$$\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(\mathbf{x}, k) = \varepsilon^{1/2} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \varepsilon^i \ln^j \varepsilon R_{i-j}^{\text{in(ex)}, i}(D_y) G^{\text{in(ex)}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0^{\text{in(ex)}}, k). \quad (4.1)$$

Вне канала связи и малых окрестностей его концов асимптотики обобщенной функции будем искать, по-прежнему, в виде (3.1), а в канале связи и окрестности его концов асимптотические разложения строятся в форме

$$\psi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon^{-1/2} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \varepsilon^i \ln^j \varepsilon w_{ij}(x_2), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{K}_\varepsilon \setminus \left(S^{\text{ex}}(\varepsilon^{1/2}) \cup S^{\text{in}}(\varepsilon^{1/2}) \right), \quad (4.2)$$

$$\psi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon^{1/2} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i+1} \varepsilon^i \ln^j \varepsilon v_{ij}^{\text{in(ex)}}(\mathbf{x}^{\text{in(ex)}}/\varepsilon), \quad \mathbf{x} \in S^{\text{in(ex)}}(2\varepsilon^{1/2}). \quad (4.3)$$

Появление множителя $\varepsilon^{-1/2}$ в разложении (4.2) (а следовательно, и в (4.1) и (4.3)) объясняется тем, что в рассматриваемом случае обобщенная собственная функция сосредоточена в $\mathcal{K}_\varepsilon$ и имеет вид $\varepsilon^{-1/2} \phi(x_2)$. С другой стороны, т.к. $k_0 \notin \Sigma^{\text{in}}$, то функция Грина G^{in} голоморфна в точке $k = k_0$ и поэтому множитель $(k_0^2 - k^2)$ в (4.1) в рассматриваемом случае отсутствует.

Краевые задачи для коэффициентов рядов (4.3) и уравнения для коэффициентов ряда (4.2) получаются так же, как и в предыдущем разделе (с учетом (2.3)), и имеют в принятых обозначениях по-прежнему вид (3.4), (3.5). Следовательно, функции w_{ji} , определяемые равенством (3.6), по-прежнему будут решениями (3.5). Однако, т.к. в главном члене Ψ_ε есть $\alpha \sin(k_0 x_2)$, то представляется удобным всюду ниже заранее считать, что в представлении (3.6) коэффициенты $b_{00} = a_{ji} = 0$ при $j > 0$.

В указанных обозначениях справедлив следующий прямой аналог леммы 3.1.

ЛЕММА 4.1. Пусть τ_ε – произвольная функция, имеющая асимптотику (2.3), где $k_0 = \pi t/h$. Тогда для любого целого $N \geq 0$ справедливы равенства

$$K_{N+1/2}^{\text{in(ex)}} \left(\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(\mathbf{x}, \tau_\varepsilon) \right) = \varepsilon^{1/2} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{i+1} \varepsilon^i \ln^j \varepsilon V_{ij}^{\text{in(ex)}}(\xi),$$

$$K_{N+1/2}^{\text{in(ex)}} (w_\varepsilon(\mathbf{x})) = \varepsilon^{1/2} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{i+1} \varepsilon^i \ln^j \varepsilon W_{ij}^{\text{in(ex)}}(\xi),$$

где $V_{ij}^{\text{in(ex)}} \in \tilde{\mathcal{A}}_{i-j}$, $W_{ij}^{\text{in(ex)}}$ – многочлены $(i-j)$ -го порядка, а под $\tilde{\mathcal{A}}_{-1}$ и много-членом -1 -го порядка понимаются постоянные.

Справедливы представления

$$W_{ij}^{\text{in}}(\xi) = \tilde{W}_{ij}^{\text{in}}(\xi_2) + \tau_{i+1,j} h a_{00} + b_{i+1,j},$$

$$W_{ij}^{\text{ex}}(\xi) = \tilde{W}_{ij}^{\text{ex}}(\xi_2) + (-1)^{m+1} b_{i+1,j},$$

$$\tilde{W}_{00}^{\text{in}}(\xi_2) = a_{00} k_0 \xi_2, \quad \tilde{W}_{01}^{\text{in(ex)}}(\xi_2) = 0, \quad \tilde{W}_{00}^{\text{ex}}(\xi_2) = (-1)^{m+1} a_{00} k_0 \xi_2,$$

где $\tilde{W}_{ij}^{\text{in(ex)}}$ не зависят от τ_{qt} и b_{qt} при $q \geq i+1$,

$$V_{i,i+1}^{\text{in(ex)}}(\xi) = \tilde{V}_{i,i+1}^{\text{in(ex)}}(\xi) \equiv -\pi^{-1} a_{i,i+1}^{\text{in(ex)}},$$

$$V_{ij}^{\text{in(ex)}}(\xi) = \tilde{V}_{ij}^{\text{in(ex)}}(\xi) - \pi^{-1} (a_{ij0}^{\text{in(ex)}} (\ln \rho - \pi g^{\text{in(ex)}}(k_0)) +$$

$$+ a_{i,j-1,0}^{\text{in(ex)}} - \Sigma_{ij}^{\text{in(ex)}}), \quad i \leq j,$$

$$\tilde{V}_{00}^{\text{in(ex)}}(\xi) \equiv 0,$$

где $\tilde{V}_{ij}^{\text{in(ex)}}$ не зависят от τ_{qn} и $a_{t+q,nt}^{\text{in(ex)}}$ при $q \geq i$.

Ряды $V_{ij}^{\text{in(ex)}}$ (а следовательно, и ряды $\tilde{V}_{ij}^{\text{in(ex)}} \in \tilde{\mathcal{A}}_{i-j}$) являются формальными асимптотическими решениями краевой задачи (3.4) при $\rho \rightarrow \infty$, $\xi_2 \geq 0$, где функции v_{qt} заменены на $V_{qt}^{\text{in(ex)}}$.

Многочлены $W_{ij}^{\text{in(ex)}}$ (а следовательно, и $\tilde{W}_{ij}^{\text{in(ex)}}$) являются формальными асимптотическими решениями краевой задачи (3.4) при $\rho \rightarrow \infty$, $\xi_2 < 0$, где функции v_{qt} заменены на $W_{qt}^{\text{in(ex)}}$.

Согласование рядов (4.1)–(4.3) вновь свелось к доказательству существования решений $v_{ij}^{\text{in(ex)}}$ краевых задач (3.4), имеющих на бесконечности асимптотики, равные $V_{ij}^{\text{in(ex)}}$ при $\xi_2 \geq 0$ и равные $W_{ij}^{\text{in(ex)}}$ при $\xi_2 < 0$.

ТЕОРЕМА 4.1. Существуют функция τ_ε , имеющая асимптотику (2.3), и ряды (4.1)–(4.3), (3.6) такие, что

$$a_{00} = \frac{1}{2} (h|\omega|)^{-1/2}, \quad a_{000}^{\text{in}} = -\pi a_{00} k_0 c_\omega, \quad a_{000}^{\text{ex}} = (-1)^m \pi a_{00} k_0 c_\omega,$$

$$v_{00}^{\text{in}} = a_{00} k_0 X + a_{000}^{\text{in}} g^{\text{in}}(k_0), \quad v_{00}^{\text{ex}} = (-1)^{m+1} a_{00} k_0 X + a_{000}^{\text{ex}} g^{\text{ex}}(k_0),$$

$$b_{10} = (-1)^m a_{000}^{\text{ex}} g^{\text{ex}}(k_0) - a_{00} k_0 q_\omega,$$

$$\tau_{10} = (h a_{00})^{-1} (a_{000}^{\text{in}} g^{\text{in}}(k_0) + a_{00} k_0 q_\omega - b_{10}),$$

$$b_{11} = (-1)^{m+1} \pi^{-1} a_{000}^{\text{ex}}, \quad \tau_{11} = -(h a_{00})^{-1} (\pi^{-1} a_{000}^{\text{in}} + b_{11}), \quad (4.4)$$

коэффициенты $v_{ij}^{\text{in(ex)}} \in \mathcal{A}_{i-j}$ являются решениями рекуррентной системы краевых задач (3.4) и для любого целого $N \geq 0$ справедливы дифференцируемые асимптотические равенства

$$\begin{aligned} K_{N+1/2}^{\text{in(ex)}} \left(\psi_{\varepsilon}^{\text{in(ex)}}(\mathbf{x}, \tau_{\varepsilon}) \right) &= v_{\varepsilon, N+1/2}^{\text{in(ex)}}(\xi), \quad \xi_2 \geq 0, \\ K_{N+1/2}^{\text{in(ex)}}(w_{\varepsilon}(\mathbf{x})) &= v_{\varepsilon, N+1/2}^{\text{in(ex)}}(\xi) + O(\xi_2^{m_N} \exp\{\mu_1 \xi_2\}), \quad \xi_2 < 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

при $\rho \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.1. Так как обобщенная собственная функция Ψ_{ε} сосредоточена в канале $\mathcal{K}_{\varepsilon}$ и в главном совпадает с $\frac{1}{2}(h|\omega|)^{-1/2} \sin(k_0 x_2)$, то a_{00} естественно выбрать согласно (4.4). Положив $a_{00}^{\text{in(ex)}}$, $v_{0j}^{\text{in(ex)}}$, b_{1j} и τ_{1j} в соответствии с (4.4), а

$$a_{t0t}^{\text{in}} = \pi a_{00} k_0 ((t-1)!)^{-1} c_t^+, \quad a_{t0}^{\text{ex}} = (-1)^t \pi a_{00} k_0 ((t-1)!)^{-1} c_t^+, \quad t > 0,$$

где c_t^+ – коэффициенты асимптотики X при $\rho \rightarrow \infty$ и $\xi_2 \geq 0$, в силу леммы 3.1 получаем равенства (4.5), (4.6) для $N = 0$.

Дальнейшее доказательство проводится по индукции. На n -м шаге по рядам $\tilde{V}_{nj}^{\text{in(ex)}} \in \tilde{\mathcal{A}}_{n-j}$ и многочленам $\tilde{W}_{nj}^{\text{in(ex)}}$ строятся решения $\tilde{v}_{nj}^{\text{in(ex)}} \in \mathcal{A}_{n-j}$ задачи (3.4), имеющие на бесконечности асимптотики

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{nj}^{\text{in(ex)}}(\xi) &= V_{nj}^{\text{in(ex)}}(\xi) + O(\ln \rho), \quad \xi_2 \geq 0, \\ \tilde{v}_{nj}^{\text{in(ex)}}(\xi) &= W_{nj}^{\text{in(ex)}}(\xi) + O(1), \quad \xi_2 < 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Приравнявая в (4.6) к нулю коэффициенты при $\ln \rho$ и ρ^{-n} ($n > 0$), определяем $a_{t+n,jt}^{\text{in(ex)}}$. Затем выбираем постоянные $c_{nj}^{\text{in(ex)}}$ так, чтобы для функций $v_{nj}^{\text{in(ex)}} = \tilde{v}_{nj}^{\text{in(ex)}} + c_{nj}^{\text{in(ex)}}$ выполнялось асимптотическое равенство (3.22).

Коэффициенты $b_{n+1,j}$ и $\tau_{n+1,j}$ последовательно определяются из требования выполнения равенств (3.23).

Из (3.22), (3.23) и предположения индукции вытекает справедливость (4.5) для $N = n$. Теорема 4.1 доказана.

Из теоремы 4.1 следует, что полюс τ_{ε} , сходящийся к $k_0 = \pi t/h \in \Sigma^{\text{ch}} \setminus \Sigma^{\text{in}}$, и соответствующая обобщенная функция ψ_{ε} имеют асимптотики (2.3), (4.1)–(4.3), (3.6), (4.4). Все соотношения (2.4) последовательно вытекают из (4.4). Теорема 2.2 доказана.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.2

Обозначим $\Pi_{\omega}^t = (\omega_-, \omega_+) \times (0, -t)$, $\gamma = \{(\xi_1, 0) : \xi_1 \notin \bar{\omega}\}$.

ЛЕММА 5.1. Пусть функция $F \in L_2(\Pi_{\omega}^{\infty})$ имеет при $\xi_2 \rightarrow -\infty$ бесконечно дифференцируемую асимптотику $O(\exp\{\mu_N \xi_2\})$. Тогда существует решение $w \in W_{2,\text{loc}}^1(\Pi_{\omega}^{\infty})$ краевой задачи

$$\begin{aligned} \Delta w &= F, \quad \xi \in \Pi_{\omega}^{\infty}, \quad \partial w / \partial \nu = 0, \quad \xi \in \partial \omega \times (0, -\infty), \\ w &= 0, \quad \xi_2 = 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

имеющее на бесконечности дифференцируемую асимптотику

$$w(\xi) = q_0 + \sum_{j=1}^{N-2} q_j \beta_j(\xi_1) \exp\{\mu_j \xi_2\} + O(\exp\{\mu_{N-1} \xi_2\}), \quad (5.2)$$

где q_i – некоторые постоянные.

Решение краевой задачи (5.1) в классе ограниченных на бесконечности функций из $W_{2,\text{loc}}^1(\Pi_\omega^\infty)$ единственно.

ЛЕММА 5.2. Пусть функция $F \in L_2(\mathbb{R}_+^2)$ имеет при $\rho \rightarrow \infty$ бесконечно дифференцируемую асимптотику $O(\rho^{-N})$. Тогда существует решение $w \in W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+^2)$ краевой задачи

$$\Delta w = F, \quad \xi \in \mathbb{R}_+^2, \quad \partial w / \partial \nu = 0, \quad \xi \in \gamma, \quad w = 0, \quad \xi \in \omega, \quad (5.3)$$

имеющее на бесконечности дифференцируемую асимптотику

$$w(\xi) = \sum_{j=0}^{N-3} c_j \rho^{-j} \cos(j\theta) + O(\rho^{-N+2}), \quad (5.4)$$

где c_i – некоторые постоянные.

Решение краевой задачи (5.1) в классе ограниченных на бесконечности функций из $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+^2)$ единственно.

Справедливость обоих этих утверждений легко показать, конформно отображая области Π_ω^∞ и $\mathbb{R}_+^2$ на полукруг (см., например, [14]) и затем сводя полученную задачу к задаче Дирихле в круге.

В свою очередь, из лемм 5.1 и 5.2 и известных результатов о повышении гладкости решений краевых задач для оператора Лапласа (см., например, [15]) очевидным образом вытекает справедливость следующих двух лемм.

ЛЕММА 5.3. Пусть функция $F \in C^\infty(\overline{\Pi_\omega^\infty})$ имеет при $\xi_2 \rightarrow -\infty$ асимптотику из $\tilde{B}$, многочлен $W(\xi_2)$ является асимптотическим решением (5.1) при $\xi_2 \rightarrow -\infty$ с точностью до $o(1)$. Тогда существует решение $w \in W_{2,\text{loc}}^1(\Pi_\omega^\infty) \cap C^\infty(\overline{\Pi_\omega^\infty} \setminus \partial\omega)$ краевой задачи (5.1), имеющее на бесконечности асимптотику из $\tilde{B}$ вида

$$w(\xi) = W(\xi_2) + q_0 + o(1).$$

ЛЕММА 5.4. Пусть функция $F \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^2})$ имеет при $\rho \rightarrow \infty$ бесконечно дифференцируемую асимптотику из $\tilde{\mathcal{A}}_n$, ряд $V \in \tilde{\mathcal{A}}_{n+2}$ является асимптотическим решением (5.2) при $\rho \rightarrow \infty$. Тогда существует решение $w \in W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+^2) \cap C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^2} \setminus \partial\omega)$ краевой задачи (5.1), имеющее на бесконечности асимптотику из $\tilde{\mathcal{A}}_{n+2}$ вида

$$w(\xi) = V(\xi) + \sum_{j=0}^{\infty} c_j \rho^{-j} \cos(j\theta).$$

Обозначим $\gamma_\omega^t = (\mathbb{R}_+^2 \cap S(t)) \cup ((\omega_-, \omega_+) \times [0, -t))$, где $t > |\omega_-| + |\omega_+|$. Рассмотрим краевую задачу (3.8) в случае, когда $f \in L_2(\gamma_\omega)$, $\text{supp } f \subset S(t)$. Пусть $g \in L_2(\gamma_\omega)$ – пока произвольная функция такая, что $\text{supp } g \subset S(2t)$, $g^{+(-)}$ – сужение g на полуплоскость $\mathbb{R}_{+(-)}^2$, а $w^{+(-)}$ – решение (5.1) ((5.3)) при $F = g^{+(-)}$. Далее, пусть $u \in W_2^1(\gamma_\omega^{2t})$ – решение краевой задачи

$$\Delta u = g, \quad \xi \in \gamma_\omega^{2t}, \quad \partial u / \partial \nu = 0, \quad \xi \in \partial \gamma_\omega, \quad u = w, \quad \xi \in \partial \gamma_\omega^{2t} \setminus \partial \gamma_\omega, \quad (5.5)$$

где w – функция, совпадающая с $w^{+(-)}$ в $\mathbb{R}_{+(-)}^2$ (однозначная разрешимость краевой задачи (5.5) в $W_2^1(\gamma_\omega^{2t})$ следует из [15] и лемм 5.1, 5.2).

Пусть $\zeta(z)$ – гладкая срезающая функция, равная единице при $z < 4t/3$ и нулю при $z > 5t/3$, $\chi(\xi) = \zeta(\rho)$ при $\xi_2 \geq 0$ и $\chi(\xi) = \zeta(-\xi_2)$ при $\xi_2 < 0$. Решение (3.8) будем искать в виде

$$v = w + \chi(u - w). \quad (5.6)$$

В силу утверждений лемм 5.1 и 5.2 функция $v \in W_{2,\text{loc}}^1(\gamma_\omega)$ удовлетворяет однородному граничному условию Неймана на $\partial \gamma_\omega$ и имеет на бесконечности асимптотики (5.2), (5.4).

Действуя на (5.6) оператором Лапласа и приравнивая результат к f (см. доказательство предложения 4.1 в [12, гл. XVI]), получаем следующее уравнение на g :

$$g + Tg = f, \quad (5.7)$$

где T – компактный оператор в $L_2(\gamma_\omega^{2t})$. Ясно, что если g – решение (5.7), то (5.6) – решение (3.8).

ЛЕММА 5.5. *Нуль является простым собственным значением оператора $(I + T)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.5. Интегрируя по частям равенство

$$\int_{\gamma_\omega^R} \Delta v d\xi = \int_{\gamma_\omega^R} f d\xi, \quad R \rightarrow \infty,$$

видим, что нуль является собственным значением $(I + T)$.

С другой стороны, очевидно, что решение (3.8) в классе функций из $W_{2,\text{loc}}^1(\gamma_\omega)$, имеющих асимптотики (5.2), (5.4), единственно с точностью до постоянного слагаемого, а, следуя доказательству предложения 4.2 [12, гл. XVI]), легко показать, что если $g \neq 0$, то и $v \neq 0$. Отсюда следует справедливость утверждения леммы.

Из леммы 5.5 и теорем о повышении гладкости решений уравнения Лапласа вытекает

ЛЕММА 5.6. *Пусть функция $f \in C^\infty(\overline{\gamma_\omega})$ имеет конечный носитель. Тогда существует решение краевой задачи (3.8) в классе функций из $\mathcal{A}_0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 3.2 является очевидной комбинацией утверждений лемм 5.3, 5.4 и 5.6.

6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Если в описании резонатора Ω_ε положить область Ω^{ex} ограниченной, то естественным образом получим задачу на собственные значения для двумерной гантели, исследованию которой посвящены работы [16–21] (для размерностей пространства $n \geq 3$, см. также [22, 23]). В [17, 19] рассматривались вопросы сходимости собственных значений, в [16, 18, 20] исследовался главный член теории возмущений для сходящихся к нулю собственных значений, а в [21, 22] изучались главные члены асимптотик остальных собственных значений.

Так как для гантели нуль является собственным значением предельной задачи и в Ω^{ex} (в отличие от резонатора), то прямых проекций результатов [16–21] на резонатор не существует. Более того, исследование малых полюсов для резонатора наталкивается на весьма существенные технические трудности, связанные с тем, что нуль является для резонатора точкой ветвления предельной задачи в Ω^{ex} . (Заметим, что в $\mathbb{R}^3$ последняя проблема отсутствует, и поэтому предложенным выше методом удастся построить асимптотики малых полюсов для резонатора [7, 8], являющихся аналогами второй собственной частоты для трехмерной гантели [22, 23].)

Для ненулевых предельных собственных частот легко видеть, что приведенный алгоритм позволяет построить полные асимптотики собственных значений двумерной гантели с сохранением формул (2.2) и (2.4) для первых членов теории возмущений и сравнить их с главными членами, полученными в [21] (в случае, когда k_0 не является собственной частотой Ω^{ex} и $k_0 \in \Sigma_1^{\text{in}} \setminus \Sigma^{\text{ch}}$ или $k_0 \in \Sigma^{\text{ch}} \setminus \Sigma^{\text{in}}$).

Заметим, что главные члены асимптотик вещественны и поэтому не являются, вообще говоря, принципиальными для задачи рассеяния на резонаторе (в отличие от *следующих комплексных* членов разложений).

В заключение отметим, что для задачи рассеяния представляется интересным рассмотреть ситуацию “двойного резонанса” $k_0 \in \Sigma_1^{\text{in}} \cap \Sigma^{\text{ch}} \neq \emptyset$ и построить полные асимптотики соответствующих полюсов и главные члены асимптотик рассеянного поля в пиковых режимах. Однако такая постановка задачи, помимо асимптотических модификаций, требует дополнительных строгих исследований уже и на уровне функционального анализа на предмет соответствия “кратности” такой частоты k_0 числу полюсов, сходящихся к k_0 , и обобщенных собственных функций резонатора. Подчеркнем, что эта проблема более нетривиальна, чем аналогичный вопрос в задаче о гантели [17, 20], из-за отсутствия условия ортогональности обобщенных собственных функций резонатора.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 93-011-16046) и ISF (грант NMB000).

Список литературы

- [1] Beale J. T. // Commun. Pure and Appl. Math. 1973. V. 26. № 4. P. 549–564.
- [2] Lord Rayleigh // Proc. Roy. Soc. London. A. 1916. V. 92. № 638. P. 265–275.
- [3] Hubert Palencia J., Sanchez Palencia E. Vibration and Coupling of Continuous Systems. Asymptotic Methods. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
- [4] Гадильшин Р. Р. // Изв. РАН, сер. матем. 1993. № 5. С. 44–74.
- [5] Gadyl'shin R. R. // J. Math. Phys. 1994. V. 35. № 7. P. 3464–3481.
- [6] Brown R. M., Hislop P. D., Martinez A. Eigenvalues and resonances for domains with tubes: Neumann boundary conditions. Research report 92-06. Univ. of Kentucky, 1992.

- [7] *Gadyl'shin R. R.* // Compt. Rend. Acad. Sci. 1993. V. 316. Série I. P. 959–963.
- [8] *Гадильшин Р. Р.* // Функци. анализ и его прилож. 1993. Т. 27. Вып. 4. С. 3–16.
- [9] *Ван Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
- [10] *Найфе А. Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1986.
- [11] *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
- [12] *Санчес-Паленсиа Е.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
- [13] *Гадильшин Р. Р.* // Дифф. уравнения. 1994. Т. 30. №2. С. 221–229.
- [14] *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
- [15] *Ладженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
- [16] *Готлиб В. Ю., Каган Б. А., Кивман Г. А.* // Мор. гидрофиз. журнал. 1985. №5. С. 3–8.
- [17] *Jimbo S.* // J. Diff. Equation. 1989. V. 77. №2. P. 322–350.
- [18] *Fang Q.* // Hiroshima Math. J. 1990. V. 20. P. 549–571.
- [19] *Hempel R., Seco L. A., Simon B.* // J. Funct. Annal. 1991. V. 102. №2. P. 448–483.
- [20] *Jimbo S., Morita Y.* // Comm. Partial Diff. Equation. 1992. V. 17. P. 523–552.
- [21] *Киселев А. А., Павлов Б. С.* // ТМФ. 1994. Т. 100. №3. С. 354–366.
- [22] *Jimbo S.* // J. Math. Soc. Japan. 1993. V. 45. №2. P. 339–356.
- [23] *Гадильшин Р. Р.* // ТМФ. 1993. Т. 97. №1. С. 68–77.

Институт математики Уральского отделения
Российской академии наук

Поступила в редакцию
7.XII.1994 г.

R. R. Gadyl'shin

**ON SCATTERING BY CYLINDER WITH NARROW
SLIT AND WITH SHELL OF FINITE DEPTH**

The method of matching asymptotic expansions is applied to construction of asymptotics of poles for the Green function analytic continuation of a two-dimensional analog of Helmholtz resonator with a shell of a finite depth and with Neumann's boundary condition. The explicit formulae for the principle terms of asymptotics of poles, for corresponding generalized eigenfunctions and for solutions of scattering problem are obtained.