Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Г. Мазур, Квазиклассическая асимптотика в методе обратной задачи рассеяния для уравнений КдФ и решение модуляционных уравнений Уизема, *ТМФ*, 1996, том 106, номер 1, 44–61

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1096>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 11:17:03

Н.Г. Мазур

**КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ АСИМПТОТИКА
В МЕТОДЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ
ДЛЯ УРАВНЕНИЙ КДФ И РЕШЕНИЕ
МОДУЛЯЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ УИЗЕМА**

Исследована задача Коши для уравнения Кортевега–де Фриза в слабодисперсионном пределе, моделирующая образование и эволюцию бездиссипативной ударной волны в плазме. Теория возмущений по малому параметру при дисперсионном члене приводит к уравнению простой волны, а после опрокидывания простой волны – к системе модуляционных уравнений Уизема, описывающей возникшую бездиссипативную ударную волну. В работе использован альтернативный подход, состоящий в асимптотическом исследовании в пределе слабой дисперсии точного решения, полученного методом обратной задачи рассеяния. При этом используются формулы квазиклассики в прямой задаче рассеяния и точное многосолитонное решение в обратной задаче. В результате перехода к пределу получена система конечных соотношений, связывающих x , t и модуляционные параметры бездиссипативной ударной волны.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача Коши для уравнения КДФ

$$u_t - 6uu_x + \varepsilon^2 u_{xxx} = 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (2)$$

в слабодисперсионном пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ может изучаться с помощью двух подходов.

Первый подход, основанный на теории возмущений с применением многомасштабных разложений, развит в работах [1–10]. Он приводит для описания начального этапа эволюции к уравнению Хопфа

$$u_t - 6uu_x = 0, \quad (3)$$

решение которого годится только до момента опрокидывания t_* . При $t > t_*$ появляется расширяющаяся со временем область, заполненная модулированным пакетом нелинейных (кноидальных) волн длины $\sim \varepsilon$. В этой области ситуация описывается модуляционной теорией Уизема [1]. В простейшем и наиболее типичном случае однофазного волнового пакета система уравнений Уизема состоит из трех квазилинейных уравнений первого порядка; она имеет диагональную риманову форму. Впервые задача о

спивке решения уравнений Уизема с “внешним” решением уравнения Хопфа поставлена в [2] (задача Гуревича–Питаевского); там же получены важные автомодельные решения, описывающие распад начального разрыва и начальную стадию после момента опрокидывания. Более общие решения этой задачи были найдены в работах [3, 4], где с применением метода годографа исследован случай, когда из трех римановых переменных, подчиняющихся уравнениям Уизема, одна является постоянной, а остальные две – искомыми величинами. Наконец, на основе обобщенного метода годографа [5, 6] было построено общее аналитическое решение задачи Гуревича–Питаевского [7–11].

Второй подход состоит в изучении асимптотики при $\varepsilon \rightarrow 0$ точного решения задачи (1), (2) методом обратной задачи рассеяния (МОЗР). Существенный прогресс в этом направлении достигнут в серии работ Лакса и Левормора [12], где путем прямого асимптотического исследования при $\varepsilon \rightarrow 0$ формул ОЗР получено уравнение (3) при $t \leq t_*$, а при $t > t_*$ – уравнения Уизема (и их многофазное обобщение). Метод Лакса–Левормора был расширен Венакидесом [13, 14] на случай непрерывного спектра (ненулевого коэффициента отражения). Бикбаев [15, 16] использовал традиционный подход МОЗР с нетривиальными граничными условиями на бесконечности. В работе Геогджаева [17] изучен квазиклассический предельный вариант МОЗР для уравнения КдФ и нелинейного уравнения Шредингера.

Суть второго подхода заключается в применении формул квазиклассического приближения (ВКБ) для решения прямой задачи рассеяния при $t = 0$, т.е. на потенциале $u_0(x)$. Далее, обратная задача рассеяния при $t > 0$ может быть решена путем обращения этих формул, но только для $t \leq t_*$. Для больших времен приходится решать обратную задачу точно, т.е. с помощью уравнения Гельфанда–Левитана. Однако сильное упрощение происходит при $\varepsilon \rightarrow 0$ и в случае $t > t_*$ благодаря тому, что коэффициент отражения $r(k; \varepsilon) \rightarrow 0$, так что в ядре уравнения Гельфанда–Левитана можно пренебречь частью, отвечающей непрерывному спектру. Это позволяет заменить точное решение задачи (1), (2) безотражательным потенциалом, эволюционирующим согласно уравнению (1), т.е. N -солитонным решением ($N \sim \varepsilon^{-1} \rightarrow \infty$), выражающимся известной явной элементарной формулой. Непосредственное исследование этого выражения при $N \rightarrow \infty$ и решает поставленную задачу, приводя к результатам, совпадающим с полученными методом теории возмущений.

Заметим, что хотя при $t \leq t_*$ использование многосолитонной формулы для решения обратной задачи рассеяния не является необходимым, тем не менее она, разумеется, работает и в этом случае и дает тот же ответ (при $N \rightarrow \infty$), что и обращение ВКБ-формулы прямой задачи.

Наиболее интересен в связи с задачей (1), (2) вопрос о качественном характере механизма возникновения осцилляционной зоны после момента опрокидывания t_* . Это явление можно рассматривать как своего рода “фазовый переход”. На плоскости x, t при $\varepsilon \rightarrow 0$ выделяются четко разграниченные области: хопфовская область, где решение стремится (в сильном смысле) к решению уравнения Хопфа (3), и уиземовская область, в которой решение испытывает осцилляции конечной амплитуды с длиной волны $\sim \varepsilon$ и имеет предел $\bar{u}(x, t)$ лишь в слабом смысле [12]. Заметим при этом, что сама постановка вопроса о причинах и механизме возникновения осцилляционной области естественна лишь в рамках второго подхода, тогда как применение модуляционных уравнений Уизе-

ма требует допущения о наличии такой области в качестве дополнительной гипотезы. Прямой анализ при $\varepsilon \rightarrow 0$ можно считать обоснованием этой гипотезы.

Целью настоящей работы является нахождение зависимости модуляционных параметров от x, t в конечном виде, т.е. получение решения уравнений Уизема прямо из явной формулы для N -солитонного решения. Использован метод Лакса–Левормора [12], состоящий в редукции исходной задачи к некоторой вариационной задаче с ограничением и решении возникающего интегрального уравнения (см. ниже уравнение (11)) путем сведения к проблеме Римана–Гильберта теории функций комплексного переменного. Это позволяет в полной мере использовать результаты работы [12]. Отличие от [12] состоит в том, что решение уравнения (11) строится для правых частей более общего вида, что позволяет получить не только уравнения Уизема, как в [12], но и их решение в замкнутом виде.

2. МНОГОСОЛИТОННОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ КВАЗИКЛАССИЧЕСКИХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Прежде чем перейти к решению поставленной задачи, надо кратко изложить некоторые сведения, касающиеся N -солитонного решения при $N \rightarrow \infty$. Приводимые формулы лишь в несущественных деталях отличаются от использованных в работе [12].

Для конкретности начальное условие $u_0(x)$ берется в виде простой “потенциальной ямы” $u_0(x) \leq 0$ с двумя монотонными “склонами”, причем правый склон имеет лишь одну точку перегиба (чтобы не было усложнений с несколькими опрокидываниями). Функцию $u_0(x)$ подчиним условиям быстрого убывания на $\pm\infty$, а также условиям нормировки

$$\min u_0 = -1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} (-u_0)^{1/2} dx = \pi.$$

N -солитонное решение, которым при асимптотическом исследовании заменяется решение задачи (1), (2), дается формулой [18]

$$u(x, t) = -2\varepsilon^2 \partial^2 / \partial x^2 \ln \sum_{\mu} \exp(N^2 Q_{\mu}), \quad Q_{\mu} = -A_{\mu}x + B_{\mu}, \quad (4)$$

где суммирование ведется по всем двоичным словам $\mu = \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$, $\mu_n = 0$ или 1, и

$$A_{\mu} = 2N^{-1} \sum_{n=1}^N \mu_n k_n, \quad (5)$$

$$B_{\mu} = N^{-1} \sum_{n=1}^N \mu_n (8tk_n^3 + l_n) + N^{-2} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \mu_m (1 - \mu_n) l_{mn}, \quad (6)$$

$$l_{mn} = \ln |(k_m + k_n)/(k_m - k_n)| \quad (m \neq n);$$

ε и N связаны соотношением $N = \varepsilon^{-1} + O(1)$. Параметры k_n, l_n рассчитываются по начальному потенциалу $u_0(x)$ с помощью квазиклассических формул

$$k_n = k(\nu_n), \quad \nu_n = (n - 1/2)/N, \quad l_n = L(k_n),$$

$k(\nu)$ – обратная функция к

$$\nu(k) = \pi^{-1} \int_{\xi_-}^{\xi_+} [-k^2 - u_0(x)]^{1/2} dx, \quad (7)$$

$$L(k) = \int_0^k s [\xi_+(s) + \xi_-(s)] (k^2 - s^2)^{-1/2} ds, \quad (8)$$

$\xi_- < \xi_+$ – корни уравнения $u_0(\xi) = -k^2$. Смысл величины $\nu(k)$ состоит в том, что $N\nu(k)$ есть число собственных значений $\lambda_n = -k_n^2$ дискретного спектра уравнения Шредингера $-\varepsilon^2 \psi'' + u_0(x) \psi = \lambda \psi$, меньших $-k^2$. Уравнение (7) получается при $\varepsilon \rightarrow 0$ из условия квантования Бора–Зоммерфельда.

По виду выражения (4) понятно, что при $N \rightarrow \infty$ основной вклад в сумму по μ определяется окрестностью максимума величины Q_μ . Далее, нормированные указанным в (5), (6) способом суммы превращаются при $N \rightarrow \infty$ в интегралы, если учесть, что двоичное слово μ имеет “локальную долю единиц”

$$p(\nu) = N^{-1} \sum_{n=1}^N \mu_n \delta(\nu - \nu_n),$$

которую удобно рассматривать как функцию переменной k , связанной с ν посредством (7). Функция Q_μ на множестве двоичных слов длины N превращается при $N \rightarrow \infty$ в функционал $Q[p]$ на множестве функций $p(k)$, определенных в интервале $0 < k < 1$ и изменяющихся в пределах $0 \leq p(k) \leq 1$. Детальное обоснование этой конструкции дано в [12]. Функционал Q определяется формулой

$$\begin{aligned} Q[p] = & \int_0^1 [-2xk + 8tk^3 + L(k) + h(k)] \gamma(k) p(k) dk - \\ & - \int_0^1 \int_0^1 l(k, k') \gamma(k) \gamma(k') p(k) p(k') dk dk', \end{aligned}$$

где обозначено

$$\gamma(k) = -d\nu/dk, \quad l(k, k') = \ln |(k + k')/(k - k')|, \quad h(k) = \int_0^1 l(k, k') \gamma(k') dk'.$$

Функция $h(k)$ допускает представление, аналогичное (8):

$$h(k) = \int_0^k s [\xi_+(s) - \xi_-(s)] (k^2 - s^2)^{-1/2} ds. \quad (9)$$

3. ЗАДАЧА МАКСИМИЗАЦИИ ФУНКЦИОНАЛА Q ПРИ ДОПОЛНИТЕЛЬНОМ ОГРАНИЧЕНИИ И СООТВЕТСТВУЮЩАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА

Таким образом, исследование асимптотики решения задачи (1), (2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ приводит к проблеме отыскания максимума функционала $Q[p]$ при ограничении $0 \leq p(k) \leq 1$. Обозначим $\hat{p}(k)$ ту функцию p , для которой этот максимум достигается.

Область значений k , при которых $\hat{p}(k)$ отлично как от 0, так и от 1, обозначим $D = D(x, t)$. Для k из этой области функция $p(k)$ имеет возможность в некоторых пределах свободно варьироваться, “не упираясь” в ограничение $0 \leq p(k) \leq 1$. В соответствии с этим замечанием (детальный анализ см. в [12]) для решения рассматриваемой задачи на максимум надо для всех $k \in D$ удовлетворить уравнению

$$\delta Q[p] / \delta p(k) = 0. \quad (10)$$

Вне области D либо $\hat{p}(k) = 0$, либо $\hat{p}(k) = 1$. Учитывая явный вид функционала Q , находим, что (10) эквивалентно интегральному уравнению

$$\int_D l(k, k') \psi(k') dk' = f(k) \quad (\forall k \in D), \quad (11)$$

где в случае, когда $\hat{p}(k) \equiv 0$ вне D ,

$$\psi = \gamma \hat{p}, \quad f = -xk + 4tk^3 + 1/2[L(k) + h(k)],$$

а если $\hat{p}(k) \equiv 1$ вне D , то

$$\psi = \gamma(1 - \hat{p}), \quad f = xk - 4tk^3 - 1/2[L(k) - h(k)].$$

Более сложный случай, когда вне D бывает и $\hat{p}(k) = 0$, и $\hat{p}(k) = 1$, рассмотрен в разделе 5.

Особенностью рассматриваемой задачи является то, что область D заранее не известна. При заданной же области D в том случае, если она состоит из конечного числа интервалов, для решения уравнения (11) можно использовать [12] известную краевую задачу Римана–Гильберта теории функций комплексного переменного; ниже это подробно изложено. При заранее неизвестной области D приходится исходить из некоторых априорных представлений об ее устройстве, которые проверяются после полного решения задачи и сводятся к следующему.

Для t , не превышающих некоторого значения t_* (которое, как ясно из дальнейшего, есть как раз момент “опрокидывания” решения уравнения (3)), область D представляет собой один интервал

$$D = (0, c). \quad (12)$$

При этом имеется такое $x_1 = x_1(t)$, что при $x < x_1$ $\hat{p}(k) \equiv 1$ для k вне D , а при $x > x_1$ вне D тождественно $\hat{p}(k) = 0$. Эта ситуация представлена на рис. 1а, где изображены

Рис. 1

область определения функции $\hat{p}(k; x)$ (полоса $0 \leq k \leq 1$) и график функции $k = c(x)$, разделяющий ее на части, где соответственно $\hat{p} \equiv 1$, $0 < \hat{p} < 1$, $\hat{p} \equiv 0$. На рис. 1б для того же момента времени $t < t_*$ показаны графики максимизатора $\hat{p}(k)$ при некоторых значениях x (отмеченных на рис. 1а). При $t > t_*$ возникает интервал значений x : $x^-(t) < x < x^+(t)$, для которых область $D(x, t)$ разделяется на два интервала (см. рис. 2а,б):

$$D = (0, a) \cup (b, c), \quad (13)$$

причем $\hat{p}(k) \equiv 0$ вне D . Для значений $x \notin (x^-, x^+)$ по-прежнему D состоит из одного интервала. С дальнейшим ростом t происходит некоторое усложнение ситуации после момента t_1 , когда точка $x_1(t)$ оказывается правее точки $x^-(t)$. При $t > t_1$ функция $\hat{p}(k)$ вне D перестает быть тождественным нулем, интервал (x^-, x^+) разбивается точкой x_1

Рис. 2

на две части, и для $x \in (x^-, x_1)$ во внешности $D(x, t)$ мы имеем

$$\hat{p}(k) = 0 \quad \text{при} \quad a \leq k \leq b, \quad \hat{p}(k) = 1 \quad \text{при} \quad k \geq c,$$

что иллюстрируется относящимися к случаю $t > t_1$ рисунками 3а и 3б.

Приведенные на рисунках графики соответствуют начальному условию $u_0(x) = -(\operatorname{ch} x)^{-2}$, для которого $L(k) = 0$, $\gamma(k) = 1$ (т.е. либо $\hat{p} = \psi$, либо $\hat{p} = 1 - \psi$). Решение уравнения (11) в этом частном случае для $D = (0, c)$ может быть получено методом задачи Римана-Гильберта (как описано ниже в разделе 4) и выражается в элементарных функциях:

$$\psi = \pi^{-1} \left(\arctg \frac{\sqrt{c^2 - k^2}}{k\sqrt{1 - c^2}} \mp 12tk\sqrt{c^2 - k^2} \right)$$

Рис. 3

(верхний знак относится к случаю, когда $\hat{p} = \psi$, нижний — к случаю, когда $\hat{p} = 1 - \psi$). Все кривые на рис. 1б, а также кривые 1–3, 6 на рис. 2б и 1–4, 9 на рис. 3б рассчитаны по указанной формуле. При $t > t_*$, когда $D = (0, a) \cup (b, c)$, элементарного решения, разумеется, не получается; соответствующие кривые (4, 5 на рис. 2б и 5–8 на рис. 3б) имеют качественный характер.

4. РЕШЕНИЕ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ И НАХОЖДЕНИЕ ЗАВИСИМОСТИ МОДУЛЯЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ ОТ x, t ПРИ $t \leq t_1$

Ограничиваясь вначале случаем $t \leq t_1$, мы приходим к необходимости решить уравнение (11) для D вида (12) при $t \leq t_*$ или вида (13) для некоторых x при $t > t_*$.

Решение уравнения (11) сводится к задаче Римана–Гильберта. Этот метод был ис-

пользован в [12] для нахождения $\partial\psi/\partial x$ и $\partial\psi/\partial t$ из продифференцированного соответственно по x и t уравнения (11). Правая часть продифференцированного уравнения представляет собой просто нечетную степень k , и решение задачи Римана–Гильберта получается чисто алгебраически. Найденные выражения для $\partial\psi/\partial x$ и $\partial\psi/\partial t$ позволили получить (при $t > t_*$) для величин a^2, b^2, c^2 как функций x, t систему дифференциальных уравнений, которая оказалась не чем иным, как системой уравнений Уизема в римановой форме:

$$\partial_t r_i + v_i(r_1, r_2, r_3) \partial_x r_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (14)$$

где

$$r_1 = a^2, \quad r_2 = b^2, \quad r_3 = c^2. \quad (15)$$

Выражения для v_i приведены ниже (формулы (29)).

Этот факт является одним из основных результатов серии работ [12]. Отметим, что в [12] получены более общие уравнения – для границ любого числа интервалов, составляющих область D .

В настоящей работе использован тот же метод сведения уравнения (11) к задаче Римана–Гильберта, но для нахождения самой функции $\psi(k)$, а не ее производных по x и t . При этом для величин a^2, b^2, c^2 получается система конечных уравнений, которая дает в неявной форме *решение* уравнений Уизема. Это и естественно, поскольку при дифференцировании уравнения (11) по x или t пропадает член $\pm L + h$, содержащий информацию о начальных данных, тогда как при решении самого уравнения (11) эта информация сохраняется. Поясним, каким образом получается эта система конечных соотношений, на примере $D = (0, a)(b, c)$. Функция $\psi(k)$, определяемая из уравнения (11), при произвольном расположении точек a, b, c , вообще говоря, неограниченна в окрестности этих точек. Она ведет себя как

$$C_\xi(a, b, c) \rho^{-1/2}, \quad \xi = a, b, c, \quad \rho = |k - \xi|.$$

Вместе с тем основное условие $0 \leq \hat{p} \leq 1$ требует ограниченности функции ψ . Поэтому три коэффициента $C_\xi(a, b, c)$, зависящие также (очевидно, линейно) от параметров x, t уравнения (11), должны быть равны нулю. Получается как раз система трех уравнений относительно трех неизвестных a, b, c , неявно определяющая их как функции от x, t .

Задача Римана–Гильберта состоит в том, чтобы найти аналитическую в верхней полуплоскости функцию комплексного переменного $\Phi(z)$, $z = k + ik'$, по заданным на чередующихся интервалах действительной оси ее мнимой и действительной частям $\text{Im } \Phi(k + i0)$, $\text{Re } \Phi(k + i0)$. Чтобы связать уравнение (11) с этой задачей, напомним его в более симметричной форме, доопределив при $k > 0$ искомую функцию $\psi(k)$ нулем вне области D и затем продолжив ее *нечетным* образом для $k \leq 0$. Вследствие нечетности $l(k, k')$ по каждому из аргументов уравнение (11) заменяется после дифференцирования по k уравнением [12]

$$\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(k')}{k' - k} dk' = f'(k) \quad (\forall k \in \Delta), \quad (16)$$

где $f(k)$ – нечетное продолжение правой части (11), а область Δ состоит из D , отражения D относительно нуля и точки $k = 0$.

Обратим внимание, что (16) есть следствие (11), но не наоборот. Если область D не связна, как, например, в случае (13), то (11) нельзя получить из (16) просто интегрированием от 0 до k , поскольку в интервале (a, b) соотношение (16) не обязано выполняться. Поэтому при наличии “дырок” в области D надо накладывать на $\psi(k)$ дополнительные условия, состоящие в том, что интеграл от левой части (16) по каждому промежутку, выпадающему из D , равен приращению функции $f(k)$ на этом промежутке (см. ниже условие (20)).

Сопоставим искомой функции $\psi(k)$ аналитическую в верхней полуплоскости функцию $\Phi(z)$, у которой $\operatorname{Im} \Phi(k + i0) = \psi(k)$. Эта функция определяется с точностью до действительной константы, равной $\Phi(\infty)$. Положим для определенности $\Phi(\infty) = 0$, тогда

$$\operatorname{Re} \Phi(k + i0) = \pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(k')}{k' - k} dk'.$$

Сопоставляя с (16), мы видим, что функция $\Phi(z)$ (зная которую, можно найти искомую $\psi(k) = \operatorname{Im} \Phi(k + i0)$) удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Phi(k + i0) &= \pi^{-1} f'(k), \quad \forall k \in \Delta, \\ \operatorname{Im} \Phi(k + i0) &= 0, \quad \forall k \notin \Delta, \end{aligned} \quad (17)$$

т.е. условиям задачи Римана–Гильберта и, кроме того, условию $\Phi(\infty) = 0$.

Решение задачи Римана–Гильберта с граничным условием (17) не является единственным. Одно из решений дается формулой Келдыша–Седова [19], которую в данном случае удобно использовать в модифицированном виде

$$\Phi_0(z) = (i\pi^2)^{-1} r(z) \int_{\Delta} f'(\kappa) r(\kappa)^{-1} (\kappa - z)^{-1} d\kappa, \quad (18)$$

где $r(z) = [P(z)]^{1/2}$; $P(z) = z^2 - c^2$, $\Delta = (-c, c)$ в случае (12) и $P(z) = (z^2 - a^2) \times (z^2 - b^2)(z^2 - c^2)$, $\Delta = (-c, -b) \cup (-a, a) \cup (b, c)$ в случае (13). Функция $r(z)$ рассматривается в верхней полуплоскости, причем берется ее ветвь, положительная в точках действительной оси, расположенных правее области Δ .

Добавление к $\Phi_0(z)$ функции вида $Q(z)/r(z)$, где $Q(z)$ – любая функция, аналитическая в верхней полуплоскости и действительная на действительной оси, очевидно, не нарушает условия (17). Поэтому будем искать нужное для получения решения уравнения (11) решение задачи Римана–Гильберта в виде

$$\Phi = \Phi_0 + Q/r. \quad (19)$$

При этом достаточно рассматривать в качестве $Q(z)$ полиномы с вещественными коэффициентами.

Искомое решение выделяется условиями $\Phi(\infty) = 0$ и нечетности $\operatorname{Im} \Phi(k + i0)$. В случае (13) добавляется еще одно условие, вызванное несвязностью области D : чтобы при

интегрировании (16) получить (11), надо потребовать соблюдения дополнительного условия

$$\int_a^b [\operatorname{Re} \Phi(k + i0) - \pi^{-1} f'(k)] dk = 0. \quad (20)$$

Степень полинома $Q(z)$ определяется поведением $\Phi_0(z)$ при $z \rightarrow \infty$: если $\Phi_0 \sim z^n$, то степень полинома Q равна $n + \nu$, $\nu = 1$ в случае (12) и $\nu = 3$ в случае (13).

Условие нечетности $\operatorname{Im} \Phi(k + i0)$ учитывается очень просто благодаря тому, что $\operatorname{Im} \Phi_0(k + i0)$ обладает этим свойством. У полинома $Q(z)$ поэтому отличны от нуля лишь коэффициенты при нечетных степенях z .

Благодаря линейности уравнения (11) можно решить задачу (17) отдельно для $f = k$, $f = k^3$ и $f = f^{(\pm)}(k) = (L \pm h)/2$, удовлетворить указанным выше дополнительным условиям, а затем составить из решений нужную линейную комбинацию. При этом для функций $f = k, k^3$ частное решение Φ_0 указывается тривиально: очевидно, $\Phi_0^{(1)}(z) = \pi^{-1}$ и $\Phi_0^{(3)}(z) = 3\pi^{-1}z^2$ удовлетворяют соответствующим условиям (17). Такого рода решения, дополненные Q/r , использованы в [12]. Для функции же $f^{(\pm)}$ приходится реально применять формулу Келдыша–Седова (18), причем полезно следующее вытекающее из (8), (9) представление через начальный потенциал $u_0(x)$:

$$f^{(\pm)}(k) = \int_0^k s \xi_{\pm}(s) (k^2 - s^2)^{-1/2} ds \quad (21)$$

(преобразование Абеля), где $\xi_{\pm}(s)$ – корни уравнения $u_0(\xi) = -s^2$.

Теперь рассмотрим последовательно случаи (12) и (13).

Случай $D = (0, c)$. Для степенных функций k, k^3 , определяя коэффициенты полиномов $Q(z)$ из условия $\Phi(\infty) = 0$, находим

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)}(z) &= \pi^{-1} [1 - z(z^2 - c^2)^{-1/2}], \\ \Phi^{(3)}(z) &= 3\pi^{-1} [z^2 - (z^3 - 2^{-1}c^2z)(z^2 - c^2)^{-1/2}]. \end{aligned}$$

Для $f = f^{(\pm)}$ после подстановки (21) в (18), изменения порядка интегрирований и явного вычисления внутреннего интеграла с помощью вычетов получаем

$$\Phi_0^{(\pm)}(z) = z\pi^{-1} \left[(z^2 - c^2)^{-1/2} \xi_{\pm}(c) - \int_0^c (z^2 - s^2)^{-3/2} s \xi_{\pm}(s) ds \right]. \quad (22)$$

Условие $\Phi^{(\pm)}(\infty) = 0$ (с учетом поведения функции (22) при $z \rightarrow \infty$ $\Phi_0^{(\pm)}(z) = \pi^{-1} \xi_{\pm}(c) + O(z^{-2})$) определяет полином $Q(z)$, в данном случае – первой степени. Имеем

$$\Phi^{(\pm)}(z) = \Phi_0^{(\pm)}(z) - \pi^{-1} \xi_{\pm}(c) z (z^2 - c^2)^{-1/2}.$$

Теперь можно составить нужную линейную комбинацию функций $\Phi^{(1)}, \Phi^{(3)}, \Phi^{(\pm)}$:

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) \pm \pi^{-1} z (z^2 - c^2)^{-1/2} [x + 12t(c^2/2 - z^2) - \xi_{\pm}(c)],$$

где Φ_0 — соответствующая комбинация частных решений $\Phi_0^{(1)}, \Phi_0^{(3)}, \Phi_0^{(\pm)}$. Отсюда видно, что для ограниченности $\text{Im } \Phi(k + i0)$ при $k \rightarrow c - 0$ (учитывая, что $\text{Im } \Phi_0(k + i0)$ ограничена) надо связать c, x, t соотношением $x = 6tc^2 + \xi_{\pm}(c)$. Это означает, что зависимость границы области D от x, t определяется решением уравнения Хопфа (3) с начальным условием $u(x, 0) = u_0(x)$:

$$c^2 = -u(x, t).$$

Случай $D = (0, a) \cup (b, c)$. Полиномы $Q^{(n)}$ в решениях для $f = k, k^3$

$$\Phi^{(1)}(z) = \pi^{-1} + Q^{(1)}(z)/r(z), \quad \Phi^{(3)}(z) = 3\pi^{-1}z^2 + Q^{(3)}(z)/r(z)$$

определяются с помощью условий $\Phi^{(n)}(\infty) = 0$ и (20):

$$Q^{(1)}(z) = z\pi^{-1}J_1^{-1}(J_3 - z^2J_1), \quad (23)$$

$$Q^{(3)}(z) = 3z\pi^{-1}J_1^{-1}\left[J_5 - z^4J_1 - \frac{1}{2}\sigma(J_3 - z^2J_1)\right], \quad (24)$$

где обозначено $\sigma = a^2 + b^2 + c^2$ и

$$J_n = \int_a^b k^n [P(k)]^{-1/2} dk.$$

Функции $J_n(a, b, c)$ выражаются через стандартные полные эллиптические интегралы $K(m), E(m)$; эти формулы приведены в приложении.

Решение (18) для $f = f^{(+)}(k)$ с помощью процедуры, аналогичной выводу формулы (22), приводится к виду

$$\begin{aligned} \Phi_0^{(+)}(z) &= \Phi_0^{(+)(0,c)}(z) + \Psi(z), \\ \Psi(z) &= -\pi^{-2}zr(z) \left[\int_a^b \xi'_+(s) ds \int_{a^2}^{s^2} G d\zeta + \int_b^c \xi'_+(s) ds \int_{a^2}^{b^2} G d\zeta \right], \end{aligned} \quad (25)$$

где $G = (\zeta - z^2)^{-1} [P(\zeta^{1/2})(s^2 - \zeta)]^{-1/2}$, а $\Phi_0^{(+)(0,c)}$ обозначает здесь и ниже частное решение задачи Римана–Гильберта для случая $D = (0, c)$ и $f = f^{(+)}$, которое определяется выражением (22). Выделение слагаемого $\Phi_0^{(+)(0,c)}$ в (25) облегчает применение условия (20). Далее, зная $\Phi_0^{(+)}(z)$, можно найти полином $Q^{(+)}(z)$ в $\Phi^{(+)} = \Phi_0^{(+)} + Q^{(+)}/r$. При этом степень полинома и его коэффициенты, кроме одного, определяются условием $\Phi^{(+)}(\infty) = 0$ с учетом поведения $\Phi_0^{(+)}(z)$ при $z \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} Q^{(+)}(z) &= \pi^{-1}(A_5z^5 + A_3z^3 + A_1z), \\ A_5 &= \pi^{-1} \int_a^c \Gamma_0(s) \xi'_+(s) ds, \\ A_3 &= -\xi_+(c) + \pi^{-1} \int_a^c [\sigma \Gamma_0(s) - \Gamma_1(s)] \xi'_+(s) ds, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\Gamma_n(s) = \int_{a^2}^{\mu} \zeta^n [P(\zeta^{1/2})(s^2 - \zeta)]^{-1/2} d\zeta, \quad \mu = \min(s^2, b^2).$$

Функции $\Gamma_n(s)$ выражаются через полные эллиптические интегралы первого и третьего родов (см. приложение). Оставшийся коэффициент A_1 находится из условия (20), которое, с учетом того что для $k \in (a, b)$ известна $\operatorname{Re} \Phi_0^{(+)(0,c)}(k + i0) = \pi^{-1} f'(k)$, принимает вид

$$A_5 J_5 + A_3 J_3 + A_1 J_1 = \pi \int_a^b \operatorname{Re} \Psi(k + i0) dk.$$

Правую часть этого соотношения обозначим B ; как и коэффициенты A_5, A_3 , она приводится к виду линейного функционала от $\xi_+(s)$:

$$B = \pi^{-1} \int_a^c \beta(s) \xi'_+(s) ds \quad (27)$$

с ядром

$$\beta(s) = \int_a^b k [P(k)]^{1/2} dk \int_{a^2}^{\mu} (\zeta - k^2)^{-1} [P(\zeta^{1/2})(s^2 - \zeta)]^{-1/2} d\zeta.$$

Выражение $\beta(s)$ через эллиптические интегралы дано в приложении. Полином $Q^{(+)}$ полезно представить в виде

$$Q^{(+)}(z) = z\pi^{-1} J_1^{-1} [B - (J_5 - z^4 J_1)A_5 - (J_3 - z^2 J_1)A_3]. \quad (28)$$

Теперь можно, как и в случае $D = (0, c)$, составить из (23), (24) и (28) нужную линейную комбинацию $Q(z)$. Вследствие ограниченности $\operatorname{Im} \Phi_0(k + i0)$ условиями ограниченности $\operatorname{Im} \Phi(k + i0)$ при $k \rightarrow a, b, c$ являются равенства $Q(a) = 0, Q(b) = 0, Q(c) = 0$, т.е. в явном виде

$$\begin{aligned} & -x(J_3 - z^2 J_1) + 12t \left[J_5 - z^4 J_1 - \frac{1}{2} \sigma (J_3 - z^2 J_1) \right] + \\ & + B - (J_5 - z^4 J_1)A_5 - (J_3 - z^2 J_1)A_3 = 0, \quad z = a, b, c. \end{aligned}$$

После переобозначения $a^2 = r_1, b^2 = r_2, c^2 = r_3$ (ср. (14), (15)) получается система уравнений Царева [5,6]

$$x = tv_i(r_1, r_2, r_3) + w_i(r_1, r_2, r_3), \quad i = 1, 2, 3.$$

Коэффициенты при t

$$v_i = 12(J_5 - r_i^2 J_1)(J_3 - r_i J_1)^{-1} - 6\sigma \quad (29)$$

являются характеристическими скоростями системы уравнений (14). В приложении приведены их выражения через K, E .

Выражение

$$w_i = -A_3 - \rho_i A_5 + (J_3 - r_i J_1)^{-1} B, \quad \rho_i = (J_5 - r_i^2 J_1)(J_3 - r_i J_1)^{-1}, \quad (30)$$

необходимо сравнить с результатами работ, посвященных решению системы уравнений (14). Важным свойством функций w_i является возможность потенциального представления [7]

$$w_i = f - (\lambda/\partial_i \lambda) \partial_i f, \quad (31)$$

где $f = f(r_1, r_2, r_3)$, $\partial_i \equiv \partial/\partial r_i$, $\lambda = \text{const} \cdot J_1$ — медленно меняющаяся длина волны в модулированном пакете.

Чтобы представить (30) в виде (31), заметим, что имеют место соотношения

$$\rho_i = \frac{2}{3}\sigma - \frac{1}{6}\lambda/\partial_i \lambda, \quad (J_3 - r_i J_1)^{-1} = \alpha_i \lambda/\partial_i \lambda,$$

где

$$\sigma = r_1 + r_2 + r_3, \quad \alpha_i = \varkappa_i^{-1} (r_3 - r_1)^{-3/2} [2 K(m)]^{-1}, \\ \varkappa_1 = m, \quad \varkappa_2 = m(m-1), \quad \varkappa_3 = 1-m, \quad m = (r_2 - r_1)/(r_3 - r_1).$$

Выражение (30) преобразуется к виду

$$w_i = -A_3 - \frac{2}{3}\sigma A_5 + (\lambda/\partial_i \lambda) \left(\frac{1}{6}A_5 + \alpha_i B \right). \quad (32)$$

Эта формула имеет вид представления (31), однако

$$\partial_i \left(A_3 + \frac{2}{3}\sigma A_5 \right) \neq \frac{1}{6}A_5 + \alpha_i B.$$

Оказывается, что для получения потенциального представления надо еще перераспределить слагаемые в (32):

$$w_i = -A_3 - \frac{2}{3}\sigma A_5 + X - (\lambda/\partial_i \lambda) \left[-\frac{1}{6}A_5 - \alpha_i B + (\partial_i \lambda/\lambda) X \right],$$

где

$$X = \pi^{-1} \int_a^c \left(\frac{1}{3}\sigma - s^2 \right) \Gamma_0(s) \xi'_+(s) ds.$$

Таким образом, полученное в данной работе выражение (30) представлено в виде (31) с потенциалом

$$f = \xi_+(c) + \pi^{-1} \int_a^c [-s^2 \Gamma_0(s) + \Gamma_1(s)] \xi'_+(s) ds. \quad (33)$$

В работах [9,10] выражение для f содержит под интегралом $\xi_+(s)$, а не $\xi'_+(s)$. Для сравнения преобразуем (33) с помощью интегрирования по частям; при этом исчезает и внеинтегральный член $\xi_+(c)$, и эллиптический интеграл третьего рода Γ_1 (поскольку $\partial_s \Gamma_1 = s^2 \partial_s \Gamma_0 + s \Gamma_0$). Имеем

$$f = \pi^{-1} \int_a^c s \Gamma_0(s) \xi_+(s) ds. \quad (34)$$

Эта формула после замены $y = s^2$ в точности совпадает с результатом работы [9] (формула (38) из [9]) или, что то же, с f_1 из работы [10].

5. АНАЛИЗ СЛУЧАЯ $t > t_1$

В этом случае для x из промежутка $x^-(t) < x < x_1(t)$ ситуация описывается уравнением (11) с $D = (0, a) \cup (b, c)$ и правой частью

$$f = -xk + 4tk^3 + f^{(+)}(k) - \int_c^1 l(k, k')\gamma(k') dk'. \quad (35)$$

По сравнению с предыдущим рассмотрением появилась добавка в виде интеграла по области $(c, 1)$, где $\hat{p}(k) \equiv 1$. Решения уравнения (11) с правыми частями k , k^3 и $f^{(+)}(k)$, изученные в разделе 4, обозначим $\psi^{(1)}$, $\psi^{(3)}$ и $\psi^{(+)}$. Для решения уравнения (11) с правой частью (35) остается найти при $k_0 > c$ решение интегрального уравнения

$$\int_D l(k, k')\psi^{(l)}(k'; k_0) dk' = l(k, k_0) \quad (\forall k \in D), \quad (36)$$

после чего искомое решение получается в виде линейной комбинации

$$\psi(k) = -x\psi^{(1)}(k) + 4t\psi^{(3)}(k) + \psi^{(+)}(k) - \int_c^1 \psi^{(l)}(k; \varkappa)\gamma(\varkappa) d\varkappa. \quad (37)$$

Применяя для решения (36) метод задачи Римана–Гильберта, находим по формуле Келдыша–Седова

$$\Phi_0^{(l)}(z; k_0) = \frac{2}{\pi r(k_0)} \frac{zr(z) - k_0 r(k_0)}{z^2 - k_0^2} \quad (k_0 > c).$$

Функцию комплексной переменной z , дающую $\psi^{(l)}$ как мнимую часть при $z \rightarrow k + i0$, получаем по формуле

$$\Phi^{(l)}(z; k_0) = \Phi_0^{(l)}(z; k_0) + Q^{(l)}(z; k_0)/r(z),$$

где полином пятой степени $Q^{(l)}$ определяется с учетом дополнительных условий $\Phi^{(l)}(\infty; k_0) = 0$ и (20):

$$Q^{(l)}(z; k_0) = z\pi^{-1}J_1^{-1}r(k_0)^{-1}[Y(k_0) + 2(J_5 - z^4J_1) - 2(\sigma - k_0^2)(J_3 - z^2J_1)],$$

$$Y(k_0) = \int_a^b 2k[P(k)]^{1/2}(k^2 - k_0^2)^{-1} dk \quad (\sigma = a^2 + b^2 + c^2).$$

Наконец, находим функцию

$$\Phi(z) = -x\Phi^{(1)}(z) + 4t\Phi^{(3)}(z) + \Phi^{(+)}(z) - \int_c^1 \Phi^{(l)}(z; \varkappa)\gamma(\varkappa) d\varkappa,$$

дающую (37) как $\psi(k) = \text{Im } \Phi(k + i0)$.

Соответственно полином $Q(z)$ в представлении $\Phi = \Phi_0 + Q/r$ имеет вид

$$Q = -xQ^{(1)} + 4tQ^{(3)} + Q^{(+)} + Q^*,$$

где $Q^{(1)}, Q^{(3)}, Q^{(+)}$ — полиномы, найденные в разделе 4 (формулы (23), (24) и (28)), а полином

$$Q^*(z) = - \int_c^1 Q^{(l)}(z; \varkappa) \gamma(\varkappa) d\varkappa \quad (38)$$

представляется в виде, аналогичном (28):

$$Q^*(z) = z\pi^{-1} J_1^{-1} [B^* - (J_5 - z^4 J_1) A_5^* - (J_3 - z^2 J_1) A_3^*],$$

где выражениям для B^*, A_5^*, A_3^* можно придать форму, аналогичную формулам для B, A_5, A_3 из раздела 4. Воспользуемся выражением для $\gamma = d\nu/dk$:

$$\gamma(k) = -k\pi^{-1} \int_k^1 (s^2 - k^2)^{-1/2} \Delta'(s) ds, \quad \Delta = \xi_+ - \xi_-. \quad (39)$$

После подстановки (39) в (38) и изменения порядка интегрирований получаются выражения

$$(B^*, A_5^*, A_3^*) = \pi^{-1} \int_c^1 (\beta^*(s), -\Gamma_0^*(s), \sigma\Gamma_0^*(s) - \Gamma_1^*(s)) \Delta'(s) ds,$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_n^*(s) &= \int_{c^2}^{s^2} \zeta^n [P(\zeta^{1/2})(s^2 - \zeta)]^{-1/2} d\zeta, \quad n = 0, 1, \\ \beta^*(s) &= \int_a^b k [P(k)]^{1/2} dk \int_{c^2}^{s^2} (k^2 - \zeta)^{-1} [P(\zeta^{1/2})(s^2 - \zeta)]^{-1/2} d\zeta. \end{aligned}$$

Условия ограниченности $\psi(k)$ в точках a, b, c имеют после переобозначений $a^2 = r_1, b^2 = r_2, c^2 = r_3$ вид

$$x = tv_i(r_1, r_2, r_3) + W_i(r_1, r_2, r_3), \quad i = 1, 2, 3,$$

где $W_i = w_i + w_i^*$; v_i, w_i найдены в разделе 4 (формулы (29), (30)), а

$$w_i^* = (J_3 - r_i J_1)^{-1} B^* - A_3^* - \rho_i A_5^*.$$

Так же как в разделе 4, находится потенциал для представления w_i^* :

$$w_i^* = f^* - (\lambda/\partial_i \lambda) \partial_i f^*, \quad f^* = \pi^{-1} \int_c^1 s \Gamma_0^*(s) \Delta(s) ds.$$

Суммарный потенциал $f + f^*$ (f определяется формулой (34)) совпадает с решением f_{II} из работы [10] (см. там формулу (15)). Для сравнения надо сделать замену $y = s^2$ и представить Γ_0 и Γ_0^* через стандартный эллиптический интеграл K .

Автор признателен А.В.Гуревичу и А.Л.Крылову, привлечшим его внимание к рассматриваемой проблеме, а также М.В.Павлову и Г.А.Элю за стимулирующий интерес к работе.

Автор благодарит Международный научный фонд за частичную поддержку настоящего исследования (грант RIE000).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Выражения через стандартные интегралы K , E и Π

Полные эллиптические интегралы в нормальной форме [20]:

$$K(m) = \int_0^1 (1-t^2)^{-1/2} (1-mt^2)^{-1/2} dt, \quad E(m) = \int_0^1 (1-t^2)^{-1/2} (1-mt^2)^{1/2} dt,$$

$$\Pi(n, m) = \int_0^1 (1+nt^2)^{-1} (1-t^2)^{-1/2} (1-mt^2)^{-1/2} dt.$$

Для указанных в основном тексте величин получены следующие выражения:

$$J_1 = d^{-1} K, \quad J_3 = d^{-1} (c^2 K - d^2 E),$$

$$J_5 = d^{-1} [(2a^2 c^2 - a^4 + d^4(2+m)/3) K - 2(a^2 d^2 + d^4(1+m)/3) E].$$

Здесь обозначено $d = (c^2 - a^2)^{1/2}$ и аргументом в $K(m)$, $E(m)$ является $m = (b^2 - a^2)d^{-2}$. Далее,

$$\Gamma_0(s) = 2(M - a^2)^{-1/2} (c^2 - \mu)^{-1/2} K(m^*),$$

$$\Gamma_1(s) = 2(M - a^2)^{-1/2} (c^2 - \mu)^{-1/2} [c^2 K(m^*) - (c^2 - a^2) \Pi(n, m^*)],$$

$$\beta(s) = 2 \left[\frac{(c^2 - a^2)}{(M - a^2)(c^2 - \mu)} \right]^{1/2} \left[\left(\frac{2M + c^2 - 3s^2}{3(c^2 - M)} (c^2 - b^2) K(m) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left(s^2 - \frac{1}{2} \sigma \right) E(m) \right) K(m^*) + (c^2 - b^2) \frac{(s^2 - c^2)(M - a^2)}{(c^2 - M)(c^2 - a^2)} K(m) E(m^*) \right],$$

где

$$M = \max(s^2, b^2), \quad \mu = \min(s^2, b^2), \quad \sigma = a^2 + b^2 + c^2,$$

$$m^* = (c^2 - M)(\mu - a^2)(M - a^2)^{-1} (c^2 - \mu)^{-1}, \quad n = (\mu - a^2)(c^2 - \mu)^{-1}.$$

С помощью вышеприведенных выражений для J_n формулы (29) преобразуются к виду

$$v_1 = 2(r_1 + r_2 + r_3) - 4(r_2 - r_1) K(K - E)^{-1},$$

$$v_2 = 2(r_1 + r_2 + r_3) - 4(r_2 - r_1)(1 - m) K(E - (1 - m) K)^{-1},$$

$$v_3 = 2(r_1 + r_2 + r_3) + 4(r_3 - r_1)(1 - m) KE^{-1}.$$

Список литературы

- [1] *Whitham G.B.* // Proc.Roy.Soc.A. 1965. V. 283. P. 238.
- [2] *Гуревич А.В., Питаевский Л.П.* // ЖЭТФ. 1973. Т. 65. С. 590.
- [3] *Гуревич А.В., Крылов А.Л., Мазур Н.Г.* // ЖЭТФ. 1989. Т. 95. С. 1674.
- [4] *Гуревич А.В., Крылов А.Л., Мазур Н.Г., Эль Г.А.* // ДАН СССР. 1992. Т. 323. С. 876.
- [5] *Царев С.П.* // ДАН СССР. 1985. Т. 282. С. 534.
- [6] *Дубровин Б.А., Новиков С.П.* // УМН. 1989. Т. 44. С. 29.
- [7] *Гуревич А.В., Крылов А.Л., Эль Г.А.* // Письма в ЖЭТФ. 1991. Т. 54. С. 104.
- [8] *Кудашев В.Р., Шарапов С.Е.* // ТМФ. 1991. Т. 87. С. 40.
- [9] *Гуревич А.В., Крылов А.Л., Эль Г.А.* // ЖЭТФ. 1992. Т. 101. С. 1797.
- [10] *Крылов А.Л., Ходоровский В.В., Эль Г.А.* // Письма в ЖЭТФ. 1992. Т. 56. С. 325.
- [11] *Tian F.R.* // Commun.Pure Appl.Math. 1993. V. 46. P. 1093.
- [12] *Lax P.D., Levermore C.D.* // Commun.Pure Appl.Math. 1983. V. 36. P. 253–290; 571–593; 809–830.
- [13] *Venakides S.* // Commun.Pure Appl.Math. 1985. V. 38. P. 125.
- [14] *Venakides S.* // Commun.Pure Appl.Math. 1990. V. 43. P. 335.
- [15] *Бикбаев Р.Ф.* // Функц.анализ и его прилож. 1989. Т. 23. С. 1.
- [16] *Bikbaev R.F.* // Phys.Lett.A. 1989. V. 141. P. 289.
- [17] *Геогджаев В.В.* // ДАН СССР. 1985. Т. 284. С. 1093.
- [18] *Солитоны* / Ред. Р.Буллаф, Ф.Кодри. М.: Мир, 1983. С. 175–192.
- [19] *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1958. С. 284–288.
- [20] *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1968.

Институт физики Земли
им. О.Ю.Шмидта
Российской академии наук

Поступила в редакцию
17.III.1995г.

N.G. Mazur

**QUASICLASSICAL ASYMPTOTICS OF THE INVERSE
SCATTERING SOLUTIONS OF THE KdV EQUATION AND
THE SOLUTION OF WHITHAM'S MODULATION EQUATIONS**

The initial value problem for the KdV equation is studied in the limit of weak dispersion. It may be considered as a model for nondissipative shock wave in plasmas. The perturbation theory in power series of the weak dispersion parameter leads to the Riemann simple wave equation describing nonlinear effects of wave front sharpening and "overturning". The subsequent phase of the nondissipative shock wave evolution is described by Whitham's modulation equations.

Another approach used in this paper is based on the asymptotic study of the exact solution by the inverse scattering problem technique. The WKB formulas for the direct scattering problem solution and the exact multisoliton solution of the inverse problem are considered. As a result a system of closed relations between x , t and the modulation parameters is obtained, which presents an exact solution of the Whitham's equations.