Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Голубева, В. П. Лексин, О формуле восстановления Веселова–Фельдера в теории операторов Калоджеро–Сазерленда, *ТМФ*, 1996, том 106, номер 1, 62–75

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1097>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 12:39:26

В. А. Голубева, В. П. Лексин
**О ФОРМУЛЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ
ВЕСЕЛОВА–ФЕЛЬДЕРА
В ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ
КАЛОДЖЕРО–САЗЕРЛЕНДА**

В работе А. Мацуо [1] и И. Чередника [2] предложена изящная конструкция, связывающая решения обобщенных уравнений Книжника–Замолотчикова (КЗ) с собственными функциями операторов Калоджеро–Сазерленда, отвечающих той же системе корней. А. Веселов и Дж. Фельдер в работах [3] и [4] для рациональных уравнений КЗ упростили аргументы работ [1] и [2] и указали для случая системы корней A_{n-1} формулу восстановления, которая задает решение уравнения КЗ по собственным функциям оператора Калоджеро. В настоящей работе для любой приведенной неприводимой системы корней проведена прямая проверка утверждения Мацуо и Чередника о связи решений уравнений КЗ с собственными функциями операторов Калоджеро–Сазерленда, а также распространена формула восстановления Веселова–Фельдера на эти системы корней.

1. Обобщенное рациональное уравнение КЗ в форме Мацуо–Чередника, соответствующее приведенной и неприводимой системе корней $R \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$, имеет вид

$$\partial_\eta \Phi(z) = \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} k_\alpha \frac{(\alpha, \eta)}{(\alpha, z)} \sigma_\alpha + e_\eta(\lambda) \right\} \Phi(z), \quad (1)$$

где ∂_η — производная по направлению $\eta \in \mathbb{C}^n$, (α, z) — распространение на $\mathbb{C}^n$ стандартного скалярного произведения в $\mathbb{R}^n$. Функция $\Phi(z)$ аналитична на $\mathbb{C}^n \setminus \{\bigcup_{\alpha \in R} (\alpha, z) = 0\}$. Это — $\mathbb{C}[W]$ -значная функция, где $\mathbb{C}[W]$ — групповая алгебра группы Вейля W , порожденной ортогональными отражениями относительно корней из системы корней R , причем ее действие продолжено на $\mathbb{C}^n$. Линейные операторы σ_α и $e_\eta(\lambda)$ на $\mathbb{C}[W]$ определяются следующими равенствами на элементах стандартного базиса $[w]$ в $\mathbb{C}[W]$:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha[w] &= [s_\alpha w], & w &\in W, \\ e_\eta(\lambda)[w] &= (w\lambda, \eta)[w], & \lambda &\in \mathbb{C}^n, \quad w \in W, \end{aligned}$$

где s_α — отражение, отвечающее корню $\alpha \in R$, k_α — W -инвариантное множество комплексных чисел, т.е. $k_{w\alpha} = k_\alpha$. Заметим, что $\sigma_\alpha = \sigma_{-\alpha}$.

Обобщенный оператор Калоджеро, отвечающий системе корней R , имеет вид

$$L_C = -\Delta + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} \frac{k_\alpha(k_\alpha - 1)(\alpha, \alpha)}{(\alpha, z)^2}, \quad (2)$$

где $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_i^2$ – обычный оператор Лапласа.

Тригонометрическое уравнение КЗ в форме Мацуо–Чередника имеет вид

$$\partial_\eta \Phi(z) = \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} \omega k_\alpha(\alpha, \eta) (\text{cth } \omega(\alpha, z) \sigma_\alpha + \sigma_\alpha \varepsilon_\alpha) + e_\eta(\lambda) \right\} \Phi(z), \quad (3)$$

где ω – комплексный параметр и ε_α ($\alpha \in R$) – линейные операторы на групповой алгебре $C[W]$, определенные равенствами

$$\varepsilon_\alpha([w]) = \begin{cases} [w] & \text{при } w^{-1}\alpha \in R^+, \\ -[w] & \text{при } w^{-1}\alpha \in R^-, \end{cases}$$

R^+ и R^- – положительные и отрицательные системы корней в системе R относительно некоторого базиса в R . Заметим, что имеет место равенство $\varepsilon_\alpha + \varepsilon_{-\alpha} = 0$, т.е. $\varepsilon_{-\alpha} = -\varepsilon_\alpha$.

Обобщенный оператор Сазерленда, отвечающий системе корней R , имеет вид

$$L_S = -\Delta + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} \frac{k_\alpha(k_\alpha - 1)\omega^2(\alpha, \alpha)}{\text{sh}^2 \omega(\alpha, z)}. \quad (4)$$

2. Уравнения (1) и (3) W -инвариантны в том смысле, что если их записать в виде $\partial_\eta \Phi = A_\eta(z)\Phi$, то выполняется равенство

$$wA_\eta(w^{-1}z)w^{-1} = A_{w\eta}$$

(см. [1] и [2]).

Полная интегрируемость системы уравнений (3), т.е. выполнение коммутаторных равенств

$$[\partial_\xi - A_\xi, \partial_\eta - A_\eta] = 0, \quad \forall \xi, \eta \in C^n, \quad (5)$$

проверена в работе [1] с помощью обобщения одного тождества Данкла из работы [5] на тригонометрический случай. В настоящей работе проверяется полная интегрируемость рациональных уравнений КЗ с помощью непосредственного использования тождества Данкла.

ЗАМЕЧАНИЕ. Необходимо отметить, что тождество Данкла и его тригонометрическое обобщение играют важную роль в установлении связи между операторами КЗ и операторами Калоджеро–Сазерленда, а также в интегральных представлениях решений уравнений КЗ [6, 7].

Справедливо следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Система (1) рациональных уравнений КЗ вполне интегрируема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$\partial_\xi A_\eta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} -\frac{k_\alpha(\alpha, \eta)(\alpha, \xi)}{(\alpha, z)^2} \sigma_\alpha = \partial_\eta A_\xi,$$

то для проверки равенства (5) достаточно проверить выполнение равенства $[A_\xi, A_\eta] = 0$. Представим коммутатор $[A_\xi, A_\eta]$ в виде

$$[A_\xi, A_\eta] = S_1 + S_2 + S_3,$$

где

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{4} \sum_{\substack{\alpha \neq \pm \beta \\ \alpha, \beta \in R}} \frac{k_\alpha k_\beta ((\alpha, \xi)(\beta, \eta) - (\beta, \xi)(\alpha, \eta))}{(\alpha, z)(\beta, z)} \sigma_\alpha \sigma_\beta, \\ S_2 &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} \frac{k_\alpha(\alpha, \xi)}{(\alpha, z)} [\sigma_\alpha, e_\eta(\lambda)] + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} \frac{k_\alpha(\alpha, \eta)}{(\alpha, z)} [e_\xi(\lambda), \sigma_\alpha] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} \frac{k_\alpha}{(\alpha, z)} ((\alpha, \xi)[\sigma_\alpha, e_\eta(\lambda)] - (\alpha, \eta)[\sigma_\alpha, e_\xi(\lambda)]), \\ S_3 &= [e_\xi, e_\eta]. \end{aligned}$$

Покажем, что $S_2 = 0$. Действительно, для $\forall w \in W$ имеем

$$\begin{aligned} [\sigma_\alpha, e_\eta(\lambda)][w] &= \sigma_\alpha e_\eta(\lambda)[w] - e_\eta(\lambda) \sigma_\alpha[w] = \\ &= (w\lambda, \eta) \sigma_\alpha[w] - (s_\alpha w\lambda, \eta) \sigma_\alpha[w] = \\ &= (w\lambda, \eta) \sigma_\alpha[w] - (w\lambda - (\check{\alpha}, w\lambda)\alpha, \eta) \sigma_\alpha[w] = \\ &= (\check{\alpha}, w\lambda)(\alpha, \eta) \sigma_\alpha[w], \end{aligned}$$

т. е.

$$[\sigma_\alpha, e_\eta(\lambda)] = (\check{\alpha}, w\lambda)(\alpha, \eta) \sigma_\alpha,$$

где $\check{\alpha} = \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}$. Аналогично имеем

$$[\sigma_\alpha, e_\xi(\lambda)] = (\check{\alpha}, w\lambda)(\alpha, \xi) \sigma_\alpha.$$

Подставляя полученные выражения в S_2 , получим

$$S_2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} \frac{k_\alpha}{(\alpha, z)} ((\alpha, \xi)(\alpha, \eta)(\check{\alpha}, w\lambda) \sigma_\alpha - (\alpha, \eta)(\alpha, \xi)(\check{\alpha}, w\lambda) \sigma_\alpha) = 0.$$

Сумму S_1 запишем в виде

$$S_1 = \frac{1}{4} \sum_{w \in W} w \sum_{\substack{\alpha \neq \pm \beta \\ s_\alpha s_\beta = w}} \frac{k_\alpha k_\beta B(\alpha, \beta)}{(\alpha, z)(\beta, z)},$$

где $B(\alpha, \beta) = (\alpha, \xi)(\beta, \eta) - (\beta, \xi)(\alpha, \eta)$. Так как $B(\alpha, \beta)$ является билинейной формой, удовлетворяющей условиям Данкла из предложения 1.7 в работе [5], то каждая внутренняя сумма в S_1 обращается в нуль в силу тождества Данкла:

$$\sum_{\substack{\alpha \neq \pm \beta \\ s_\alpha s_\beta = w}} \frac{k_\alpha k_\beta B(\alpha, \beta)}{(\alpha, z)(\beta, z)} = 0.$$

Поэтому имеем $S_1 = 0$.

Далее, т.к.

$$S_3[w] = [e_\xi(\lambda), e_\eta(\lambda)][w] = (w\lambda, \eta)(w\lambda, \xi)[w] - (w\lambda, \xi)(w\lambda, \eta)[w] = 0,$$

то отсюда вытекает полная интегрируемость системы уравнений (1).

3. Пусть $\varepsilon: \mathbb{C}[W] \rightarrow \mathbb{C}$ – аугментация, отображающая $\sum_i a_i [w_i]$ в $\sum_i a_i$. Рассмотрим функцию $\varphi(z) = \varepsilon(\Phi(z))$. Как следует из работ [1] и [2], если $\Phi(z)$ – решение уравнений КЗ вида (1) или (3), то функция $\varphi(z)$ является собственной функцией соответственно операторов L_C или L_R с собственным значением $-(\lambda, \lambda)$. В работах [3] и [4] А. Веселов и Дж. Фельдер провели прямую проверку этого утверждения для рациональных уравнений КЗ и системы корней A_{n-1} . В этом разделе, используя тождество Данкла и его тригонометрическое обобщение, мы проведем прямую проверку сформулированного утверждения для рациональных и тригонометрических уравнений КЗ и произвольных приведенных и неприводимых систем корней. В работе [1] проведено подробное доказательство для тригонометрического случая, но в качестве оператора L берется оператор Бельтрами–Лапласа, который имеет несколько другой вид по сравнению с операторами L_C и L_S , общее доказательство в работе [2] имеет более косвенный характер.

Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Если $\Phi(z) = \sum_{w \in W} \Phi_w(z)[w]$ – решение обобщенного уравнения КЗ рационального или тригонометрического типов (1), (3), то $\varphi(z) = \varepsilon(\Phi(z))$ является собственной функцией соответственно оператора L_C или L_S с собственным значением $-(\lambda, \lambda)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем утверждение теоремы в рациональном случае. Запишем уравнение (1) в следующем виде:

$$\partial_\eta \Phi(z) = A_\eta \Phi(z).$$

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ – стандартный ортонормированный базис в C^n и $\partial_i = \partial_{e_i}$ – производные по направлениям $e_i, i = 1, 2, \dots, n$. Также положим $e_i(\lambda) = e_{e_i}(\lambda)$, $A_i = A_{e_i}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}\partial_i \Phi(z) &= A_i \Phi(z), \\ \partial_i^2 \Phi(z) &= (\partial_i A_i) \Phi(z) + A_i \partial_i \Phi(z) = (\partial_i A_i + A_i^2) \Phi(z),\end{aligned}$$

где $A_i^2 = A_i \circ A_i$ – композиция операторов.

Суммируя второе равенство по i , получим

$$\Delta \Phi(z) = \left(\sum_{i=1}^n (\partial_i A_i + A_i^2) \right) \Phi(z).$$

Для $\sum_{i=1}^n \partial_i A_i$ имеем выражение

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} -\frac{k_\alpha(\alpha, e_i)(\alpha, e_i)}{(\alpha, z)^2} \sigma_\alpha = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} \frac{k_\alpha(\alpha, \alpha)}{(\alpha, z)^2} \sigma_\alpha,$$

где использовано равенство $\sum_{i=1}^n (\alpha, e_i)(\alpha, e_i) = (\alpha, \alpha)$.

Запишем сумму $\sum_{i=1}^n A_i^2$ в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^n A_i^2 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4,$$

где

$$\begin{aligned}S_1 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha \in R} \frac{k_\alpha^2(\alpha, e_i)^2}{(\alpha, z)^2} \sigma_\alpha^2, \\ S_2 &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{\alpha \neq \pm \beta \\ \alpha, \beta \in R}} \frac{k_\alpha k_\beta(\alpha, e_i)(\beta, e_i)}{(\alpha, z)(\beta, z)} \sigma_\alpha \sigma_\beta, \\ S_3 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha \in R} \frac{k_\alpha}{(\alpha, z)} ((\alpha, e_i) \sigma_\alpha e_i(\lambda) + (\alpha, e_i) e_i(\lambda) \sigma_\alpha), \\ S_4 &= \sum_{i=1}^n e_i^2(\lambda).\end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned}S_3 &= \sum_{\alpha \in R} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\alpha, e_i)(w\lambda, e_i) \sigma_\alpha[w] + \sum_{i=1}^n (\alpha, e_i)(s_\alpha w\lambda, e_i) \sigma_\alpha[w] = \\ &= ((\alpha, w\lambda) + (s_\alpha w\lambda, \alpha)) \sigma_\alpha[w] = ((\alpha, w\lambda) + (w\lambda, s_\alpha \alpha)) \sigma_\alpha[w] = \\ &= ((\alpha, w\lambda) + (w\lambda, -\alpha)) = 0.\end{aligned}$$

Вычислим S_2 :

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha \neq \pm \beta} \frac{k_\alpha k_\beta (\alpha, e_i) (\beta, e_i)}{(\alpha, z) (\beta, z)} \sigma_\alpha \sigma_\beta = \\ &= \sum_{\alpha \neq \pm \beta} \frac{k_\alpha k_\beta (\alpha, \beta)}{(\alpha, z) (\beta, z)} \sigma_\alpha \sigma_\beta = \sum_{w \in W} w \sum_{\substack{\alpha \neq \pm \beta \\ s_\alpha s_\beta = w}} \frac{k_\alpha k_\beta (\alpha, \beta)}{(\alpha, z) (\beta, z)}. \end{aligned}$$

Положим $B(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)$. Тогда $\forall w \in W$ имеем

$$B(w\alpha, w\beta) = (w\alpha, w\beta) = (\alpha, \beta) = (\beta, \alpha) = B(\beta, \alpha).$$

Видим, что для билинейной формы $B(\alpha, \beta)$ выполняется условие Данкла, и потому в силу тождества Данкла [5, предложение 1.7] имеем

$$\sum_{\substack{\alpha \neq \pm \beta \\ s_\alpha s_\beta = w}} \frac{k_\alpha k_\beta B(\alpha, \beta)}{(\alpha, z) (\beta, z)} = 0, \quad \forall w \in W.$$

Следовательно,

$$\sum_{\alpha \neq \pm \beta} \frac{k_\alpha k_\beta (\alpha, \beta)}{(\alpha, z) (\beta, z)} \sigma_\alpha \sigma_\beta = \sum_{w \in W} w \sum_{\substack{\alpha \neq \pm \beta \\ s_\alpha s_\beta = w}} \frac{k_\alpha k_\beta (\alpha, \beta)}{(\alpha, z) (\beta, z)} = 0.$$

Кроме того, имеем равенство

$$\sum_{i=1}^n e_i^2(\lambda)[w] = (\lambda, \lambda)[w],$$

т.к.

$$\sum_{i=1}^n e_i^2(\lambda)[w] = \sum_{i=1}^n (w\lambda, e_i)(w\lambda, e_i)[w] = (w\lambda, w\lambda)[w] = (\lambda, \lambda)[w].$$

Таким образом, получаем

$$\Delta \Phi(z) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} \frac{k_\alpha^2(\alpha, \alpha)}{(\alpha, z)^2} \Phi(z) - \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} \frac{k_\alpha(\alpha, \alpha)}{(\alpha, z)^2} \sigma_\alpha \Phi(z) + (\lambda, \lambda) \Phi(z).$$

Применим аугментацию ε к правой и левой частям этого равенства, при этом, учитывая равенства

$$\begin{aligned} \varepsilon(\Delta \Phi) &= \Delta(\varepsilon \Phi), \\ \varepsilon(\sigma_\alpha \Phi) &= \varepsilon \left(\sum_{w \in W} \Phi_w [s_\alpha w] \right) = \sum_{w \in W} \Phi_w = \varepsilon(\Phi), \end{aligned}$$

получим

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} \frac{(k_\alpha^2 - k_\alpha)(\alpha, \alpha)}{(\alpha, z)^2} \varphi + (\lambda, \lambda) \varphi$$

или

$$-\Delta\varphi + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} \frac{(\alpha, \alpha) k_\alpha (k_\alpha - 1)}{(\alpha, z)^2} \varphi = -(\lambda, \lambda) \varphi,$$

т. е.

$$L_C \varphi = -(\lambda, \lambda) \varphi.$$

Первая часть теоремы доказана.

Докажем утверждение теоремы для тригонометрического случая. Для простоты записи положим $\omega = 1$. Тогда имеем

$$A_i = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} k_\alpha(\alpha, e_i) (\operatorname{cth}(\alpha, z) \sigma_\alpha + \sigma_\alpha \varepsilon_\alpha) + e_i(\lambda).$$

Представим $\partial_i A_i + A_i^2$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \partial_i A_i + A_i^2 = & -\frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} k_\alpha \frac{(\alpha, e_i)^2}{\operatorname{sh}^2(\alpha, z)} \sigma_\alpha + \frac{1}{4} \cdot 2 \sum_{\alpha \in R} k_\alpha^2 (\alpha, e_i)^2 \operatorname{cth}^2(\alpha, z) \sigma_\alpha^2 + \\ & + \frac{1}{4} \sum_{\substack{\alpha \neq \pm \beta \\ \alpha, \beta \in R}} k_\alpha k_\beta (\alpha, e_i) (\beta, e_i) \operatorname{cth}(\alpha, z) \operatorname{cth}(\beta, z) \sigma_\alpha \sigma_\beta + \\ & + \frac{1}{4} \sum_{\alpha, \beta \in R} k_\alpha k_\beta (\alpha, e_i) (\beta, e_i) \operatorname{cth}(\alpha, z) \sigma_\alpha \sigma_\beta \varepsilon_\beta + \\ & + \frac{1}{4} \sum_{\alpha, \beta \in R} k_\alpha k_\beta (\alpha, e_i) (\beta, e_i) \operatorname{cth}(\beta, z) \sigma_\alpha \varepsilon_\alpha \sigma_\beta + \\ & + \frac{1}{4} \cdot 2 \sum_{\alpha \in R} k_\alpha^2 (\alpha, e_i)^2 \sigma_\alpha \varepsilon_\alpha \sigma_\alpha \varepsilon_\alpha + \\ & + \frac{1}{4} \sum_{\alpha \neq \pm \beta} k_\alpha k_\beta (\alpha, e_i) (\beta, e_i) \sigma_\alpha \varepsilon_\alpha \sigma_\beta \varepsilon_\beta + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} k_\alpha (\alpha, e_i) (\operatorname{cth}(\alpha, z) (\sigma_\alpha e_i(\lambda) + e_i(\lambda) \sigma_\alpha) + \\ & + (\sigma_\alpha \varepsilon_\alpha e_i(\lambda) + e_i(\lambda) \sigma_\alpha \varepsilon_\alpha)) + e_i^2(\lambda). \end{aligned}$$

Тогда сумму $\sum_{i=1}^n (\partial_i A_i + A_i^2)$ запишем в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^n (\partial_i A_i + A_i^2) = \sum_{i=1}^{10} S_i,$$

где

$$S_1 = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} \frac{k_\alpha(\alpha, \alpha)}{\operatorname{sh}^2(\alpha, z)} \sigma_\alpha,$$

$$\begin{aligned}
S_2 &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} \frac{k_\alpha^2(\alpha, \alpha)}{\text{sh}^2(\alpha, z)} \sigma_\alpha^2, \\
S_3 &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} k_\alpha^2(\alpha, \alpha) \sigma_\alpha^2, \\
S_4 &= \frac{1}{4} \sum_{\substack{\alpha \neq \pm \beta \\ \alpha, \beta \in R}} k_\alpha k_\beta(\alpha, \beta) \text{cth}(\alpha, z) \text{cth}(\beta, z) \sigma_\alpha \sigma_\beta, \\
S_5 &= \frac{1}{4} \sum_{\alpha, \beta \in R} k_\alpha k_\beta(\alpha, \beta) \text{cth}(\alpha, z) \sigma_\alpha \sigma_\beta \varepsilon_\beta, \\
S_6 &= \frac{1}{4} \sum_{\alpha, \beta \in R} k_\alpha k_\beta(\alpha, \beta) \text{cth}(\beta, z) \sigma_\alpha \varepsilon_\alpha \sigma_\beta, \\
S_7 &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} k_\alpha^2(\alpha, \alpha) \sigma_\alpha \varepsilon_\alpha \sigma_\alpha \varepsilon_\alpha, \\
S_8 &= \frac{1}{4} \sum_{\alpha \neq \pm \beta} k_\alpha k_\beta(\alpha, \beta) \sigma_\alpha \varepsilon_\alpha \sigma_\beta \varepsilon_\beta, \\
S_9 &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} k_\alpha \left[\sum_{i=1}^n (\alpha, e_i) \sigma_\alpha \varepsilon_\alpha e_i(\lambda) + \sum_{i=1}^n (\alpha, e_i) e_i(\lambda) \sigma_\alpha \varepsilon_\alpha \right], \\
S_{10} &= \sum_{i=1}^n e_i^2(\lambda).
\end{aligned}$$

В первой части доказательства было показано, что оператор S_{10} является оператором умножения на (λ, λ) . Так как $\sigma_\alpha \varepsilon_\alpha \sigma_\alpha \varepsilon_\alpha = \sigma_\alpha^2 \varepsilon_{s_\alpha \alpha} \varepsilon_\alpha = \sigma_\alpha^2 \varepsilon_{-\alpha} \varepsilon_\alpha = -\sigma_\alpha^2 \varepsilon_\alpha^2 = -\sigma_\alpha^2$, то мы видим, что S_7 уничтожается с S_3 .

Перепишем S_6 , переобозначив $\alpha \leftrightarrow \beta$,

$$\begin{aligned}
S_6 &= \frac{1}{4} \sum_{\alpha, \beta \in R} k_\alpha k_\beta(\alpha, \beta) \text{cth}(\alpha, z) \sigma_\beta \varepsilon_\beta \sigma_\alpha = \\
&= \frac{1}{4} \sum_{\alpha, \beta \in R} k_\alpha k_\beta(\alpha, \beta) \text{cth}(\alpha, z) \sigma_\alpha \sigma_{s_\alpha \beta} \varepsilon_{s_\alpha \beta}.
\end{aligned}$$

Здесь использовано соотношение $w \sigma_\alpha w^{-1} = \sigma_{w\alpha}$.

Переобозначив $s_\alpha \beta \rightarrow \beta$, получим

$$S_6 = \frac{1}{4} \sum_{\alpha, \beta \in R} k_\alpha k_{s_\alpha \beta}(\alpha, s_\alpha \beta) \text{cth}(\alpha, z) \sigma_\alpha \sigma_\beta \varepsilon_\beta.$$

Используя равенство $k_{s_\alpha \beta} = k_\beta$, будем иметь

$$S_6 = \frac{1}{4} \sum_{\alpha, \beta \in R} k_\alpha k_\beta(s_\alpha \alpha, \beta) \text{cth}(\alpha, z) \sigma_\alpha \sigma_\beta \varepsilon_\beta,$$

откуда в силу того, что $s_\alpha \cdot \alpha = -\alpha$, получаем $S_6 = -S_5$.

Применяя оператор S_9 к $[w]$, имеем для $\alpha \in R$

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{i=1}^n (\alpha, e_i) \sigma_\alpha \varepsilon_\alpha e_i(\lambda) + \sum_{i=1}^n (\alpha, e_i) e_i(\lambda) \sigma_\alpha \varepsilon_\alpha \right) [w] = \\
 &= \sum_{i=1}^n (\alpha, e_i) (w\lambda, e_i) \sigma_\alpha \varepsilon_\alpha [w] + \sum_{i=1}^n (\alpha, e_i) (s_\alpha w\lambda, e_i) \text{sign} \varepsilon_\alpha(w) [s_\alpha w] = \\
 &= (\alpha, w\lambda) \sigma_\alpha \varepsilon_\alpha [w] + (\alpha, s_\alpha w\lambda) \text{sign} \varepsilon_\alpha(w) \sigma_\alpha [w] = \\
 &= (\alpha, w\lambda) \sigma_\alpha \varepsilon_\alpha [w] + (s_\alpha \alpha, w\lambda) \sigma_\alpha \varepsilon_\alpha [w] = \\
 &= ((\alpha, w\lambda) - (\alpha, w\lambda)) \sigma_\alpha \varepsilon_\alpha [w] = 0,
 \end{aligned}$$

где по определению

$$\text{sign} \varepsilon_\alpha(w) = \begin{cases} 1 & \text{при } w^{-1}\alpha \in R^+, \\ -1 & \text{при } w^{-1}\alpha \in R^-, \end{cases}$$

что дает $\varepsilon_\alpha(w) = \text{sign} \varepsilon_\alpha(w) [w]$. Следовательно, $S_9 = 0$.

Запишем S_4 в следующем виде:

$$S_4 = \frac{1}{4} \sum_{w \in W} w \sum_{\substack{\alpha \neq \pm\beta \\ s_\alpha s_\beta = w}} k_\alpha k_\beta (\alpha, \beta) \text{cth}(\alpha, z) \text{cth}(\beta, z).$$

Легко убедиться в том, что если w не есть вращение, то внутренняя сумма равна нулю. Перепишем S_8 в следующем виде (использовано переобозначение $\alpha \leftrightarrow \beta$):

$$\begin{aligned}
 S_8 &= \frac{1}{4} \sum_{\alpha \neq \pm\beta} k_\alpha k_\beta (\alpha, \beta) \sigma_\beta \sigma_{s_\beta \alpha} \varepsilon_{s_\beta \alpha} \varepsilon_\alpha = \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{\alpha \neq \pm\beta} k_\alpha k_\beta (\alpha, \beta) \sigma_\alpha \sigma_{s_\alpha \beta} \varepsilon_{s_\alpha \beta} \varepsilon_\alpha,
 \end{aligned}$$

или после переобозначения $s_\alpha \beta \rightarrow \beta$ в виде

$$S_8 = \frac{1}{4} \sum_{\alpha \neq \pm\beta} k_\alpha k_{s_\alpha \beta} (\alpha, s_\alpha \beta) \sigma_\alpha \sigma_\beta \varepsilon_\beta \varepsilon_\alpha.$$

Далее, используя равенства $\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta = \varepsilon_\beta \varepsilon_\alpha$, $k_{s_\alpha \beta} = k_\beta$, $(\alpha, s_\alpha \beta) = (s_\alpha \alpha, \beta)$, $s_\alpha \alpha = -\alpha$, получаем

$$S_8 = \frac{1}{4} \sum_{\substack{\alpha \neq \pm\beta \\ \alpha, \beta \in R}} k_\alpha k_\beta (s_\alpha \alpha, \beta) \sigma_\alpha \sigma_\beta \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta = -\frac{1}{4} \sum_{\substack{w \in W \\ s_\alpha s_\beta = w}} w \sum_{\alpha \neq \pm\beta} k_\alpha k_\beta (\alpha, \beta) \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta.$$

Как показано в работе Мацуо [1, предложение 3.3.1], имеет место следующее обобщение тождества Данкла:

$$\sum_{\substack{\alpha \neq \pm \beta \\ s_\alpha, s_\beta = w}} k_\alpha k_\beta(\alpha, \beta) \operatorname{cth}(\alpha, z) \operatorname{cth}(\beta, z) = \sum_{\substack{\alpha \neq \pm \beta \\ s_\alpha, s_\beta = w}} k_\alpha k_\beta(\alpha, \beta),$$

т.к. как форма $B(\alpha, \beta) = k_\alpha k_\beta(\alpha, \beta)$ удовлетворяет условиям, при которых это тождество выполняется. Мацуо также показал, что

$$\sum_{\substack{\alpha \neq \pm \beta \\ s_\alpha, s_\beta = w}} k_\alpha k_\beta(\alpha, \beta) \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta = \sum_{\substack{\alpha \neq \pm \beta \\ s_\alpha, s_\beta = w}} k_\alpha k_\beta(\alpha, \beta)$$

(см. [1, предложение 1.1]). Поэтому в силу последних двух равенств имеем $S_4 + S_8 = 0$. В итоге получаем

$$\Delta \Phi = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} \frac{k_\alpha^2(\alpha, \alpha)}{\operatorname{sh}^2(\alpha, z)} \Phi - \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} \frac{k_\alpha(\alpha, \alpha)}{\operatorname{sh}^2(\alpha, z)} \sigma_\alpha \Phi + (\lambda, \lambda) \Phi. \quad (6)$$

Применяя к правой и левой частям равенства (6) оператор аугментации ε , получим

$$\Delta \varphi = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} \frac{(k_\alpha^2 - k_\alpha)(\alpha, \alpha)}{\operatorname{sh}^2(\alpha, z)} \varphi + (\lambda, \lambda) \varphi,$$

т.е.

$$L_S \varphi = -(\lambda, \lambda) \varphi.$$

Теорема доказана.

4. В этом разделе будет доказана основная лемма, обобщающая основную лемму Веселова–Фельдера из работы [4] на случай произвольной системы корней. Эта лемма используется при доказательстве формулы восстановления решения уравнения КЗ в рациональном случае.

Разложим по базису $\{[w], w \in W\}$ пространства $\mathbb{C}[W]$ решение уравнения КЗ вида (1) или (3):

$$\Phi(z) = \sum_{w \in W} \Phi_w(z) w.$$

Уравнение КЗ вида (1) для компонент $\Phi_w(z)$ записывается в следующем виде:

$$\partial_\eta \Phi_w(z) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} \frac{k_\alpha(\alpha, \eta)}{(\alpha, z)} \Phi_{s_\alpha w}(z) + (w\lambda, \eta) \Phi_w(z), \quad (7)$$

а соответствующее уравнение вида (3) – в виде

$$\begin{aligned} \partial_\eta \Phi_w(z) = & \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} k_\alpha(\alpha, \eta) \operatorname{cth}(\alpha, z) \Phi_{s_\alpha w}(z) - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} k_\alpha(\alpha, \eta) \operatorname{sign} \varepsilon_\alpha(w) \Phi_{s_\alpha w}(z) + (w\lambda, \eta) \Phi_w(z). \end{aligned} \quad (8)$$

Учитывая, что $\text{sign } \varepsilon_\alpha(s_\alpha w) = -\text{sign } \varepsilon_\alpha(w)$ и суммируя по w обе части уравнений (7) и (8), получаем

$$\partial_\eta \varphi = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} \frac{k_\alpha(\alpha, \eta)}{(\alpha, z)} \varphi + \sum_{w \in W} (w\lambda, \eta) \Phi_w, \quad (9)$$

$$\partial_\eta \varphi = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} k_\alpha(\alpha, \eta) \text{cth}(\alpha, z) \varphi + \sum_{w \in W} (w\lambda + {}^w\rho, \eta) \Phi_w, \quad (10)$$

где

$${}^w\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} k_\alpha \text{sign } \varepsilon_\alpha(w) \alpha.$$

Заметим, что при $w = 1$ получаем стандартный показатель

$${}^1\rho = \sum_{\alpha \in R^+} k_\alpha \alpha,$$

используемый в теории представлений алгебр Ли. Имеем, кроме того, соотношение

$$s_\alpha {}^w\rho = s_\alpha {}^{s_\alpha w}\rho.$$

Определим оператор $\hat{\sigma}_\alpha f(z) = f(s_\alpha^{-1}z) = f(s_\alpha z)$. Обозначим через ∇_η оператор Данкла:

$$\nabla_\eta = \partial_\eta - \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} \frac{k_\alpha(\alpha, \eta)}{(\alpha, z)} \hat{\sigma}_\alpha. \quad (11)$$

Следующая лемма обобщает лемму Веселова–Фельдера на произвольную систему корней и является модификацией леммы 4.4.1 из работы Мацуо [1].

ЛЕММА 1. Пусть $\tilde{\nabla}_\eta$ – ограничение оператора (11) Данкла на подпространство W -инвариантных функций. Тогда для соответствующих решений

$$\Phi(z) = \sum_{w \in W} \Phi_w(z)[w]$$

рационального уравнения КЗ типа (1) имеет место равенство

$$\tilde{\nabla}_\eta^m \varphi = \sum_{w \in W} (w\lambda, \eta)^m \Phi_w, \quad (12)$$

$$\text{где } \varphi = \sum_{w \in W} \Phi_w.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в работе [4], проведем доказательство по индукции. Для $m = 0$ равенство очевидно. Предположим, что оно справедливо для $m = n$, т.е.

$$\tilde{\nabla}_\eta^n \varphi = \sum (w\lambda, \eta)^n \Phi_w.$$

По индукции легко доказать, что

$$\hat{\sigma}_\alpha \tilde{\nabla}_\eta^n(\varphi) = \tilde{\nabla}_{s_\alpha \eta}^n(\varphi).$$

Поэтому имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_\eta^{n+1} &= \partial_\eta \tilde{\nabla}_\eta^n \varphi - \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} k_\alpha \frac{(\alpha, \eta)}{(\alpha, z)} \tilde{\nabla}_{s_\alpha \eta}^n(\varphi) = \\ &= \sum_{w \in W} (w\lambda, \eta)^n \partial_\eta \Phi_w - \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} k_\alpha \frac{(\alpha, \eta)}{(\alpha, z)} \sum_{w \in W} (w\lambda, s_\alpha \eta)^n \Phi_w = \\ &= \sum_{w \in W} (w\lambda, \eta)^n \left(\frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} k_\alpha \frac{(\alpha, \eta)}{(\alpha, z)} \Phi_{s_\alpha w} + (w\lambda, \eta) \Phi_w \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} k_\alpha \frac{(\alpha, \eta)}{(\alpha, z)} \sum_{w \in W} (w\lambda, \eta)^n \Phi_w = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} k_\alpha \frac{(\alpha, \eta)}{(\alpha, z)} \sum_{w \in W} (s_\alpha w\lambda, \eta)^n \Phi_w + \sum_{w \in W} (w\lambda, \eta)^{n+1} \Phi_w - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} k_\alpha \frac{(\alpha, \eta)}{(\alpha, z)} (w\lambda, s_\alpha \eta)^n \Phi_w = \\ &= \sum_{w \in W} (w\lambda, \eta)^{n+1} \Phi_w, \end{aligned}$$

причем использовано соотношение $(s_\alpha w\lambda, \eta) = (w\lambda, s_\alpha \eta)$.

Лемма доказана.

В тригонометрическом случае оператор Данкла имеет вид

$$\nabla_\eta = \partial_\eta - \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} k_\alpha(\alpha, \eta) \operatorname{cth}(\alpha, z) \hat{\sigma}_\alpha.$$

Через $\tilde{\nabla}_\eta$, как и выше, обозначается его ограничение на W -инвариантные функции.

ЛЕММА 2. Для W -инвариантного решения уравнения КЗ типа (3) имеет место равенство

$$\tilde{\nabla}_\eta^m(\varphi) = \sum_{w \in W} \mathcal{P}_m(x) \Phi_w,$$

где $x = (w\lambda + {}^w\rho, \eta)$ и $\mathcal{P}_m(x)$ – многочлен степени m от x следующего вида:

$$\mathcal{P}_m(x) = x^m + \sum_{k=1}^m a_k(\eta, \lambda, w) x^{m-k}.$$

5. Определим многочлены от переменных ξ , η и λ :

$$\mathcal{P}(\xi, \lambda, \eta) = \prod_{w \in W} (\xi - w\lambda, \eta),$$

$$\mathcal{P}_{w_0}(\xi, \lambda, \eta) = \prod_{\substack{w \neq w_0 \\ w \in W}} (\xi - w\lambda, \eta) = \frac{\mathcal{P}(\xi, \lambda, \eta)}{(\xi - w_0\lambda, \eta)}.$$

Обозначим (ξ, η) через x . Получим

$$\mathcal{P}(x, \lambda, \eta) = \prod_{w \in W} (x - (w\lambda, \eta)),$$

$$\mathcal{P}_{w_0}(x, \lambda, \eta) = \prod_{\substack{w \neq w_0 \\ w \in W}} (x - (w\lambda, \eta)).$$

Определим оператор

$$\mathcal{P}_{w_0}(\nabla, \lambda, \eta) = \prod_{\substack{w \neq w_0 \\ w \in W}} (\nabla_\eta - (w\lambda, \eta)),$$

где ∇_η – оператор Данкла (1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Назовем элемент $\lambda \in \mathbb{C}^n$ регулярным, если $(\lambda, \alpha) \neq 0$ для всех $\alpha \in R$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Назовем элемент $\eta \in \mathbb{R}^n$ типичным, если $(\eta, w_1\lambda - w_2\lambda) \neq 0$ для всех $w_1, w_2 \in W$, $w_1 \neq w_2$.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. Для W -инвариантных собственных функций оператора Калоджеро типа (3) с собственным значением $-(\lambda, \lambda)$ решение $\Phi(z) = \sum_w \Phi_w \cdot [w]$ уравнения КЗ типа (1) для любых регулярных $\lambda \in \mathbb{C}^n$ и любых типичных η можно восстановить по формуле

$$\Phi_{w_0} = \left(\frac{\tilde{\mathcal{P}}_{w_0}(\nabla, \lambda, \eta)}{\mathcal{P}_{w_0}(w\lambda, \lambda, \eta)} \right) (\varphi),$$

где $\tilde{\mathcal{P}}$ – ограничение $\mathcal{P}(\nabla, \lambda, \eta)$ на W -инвариантные функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1 имеем

$$\tilde{\nabla}_\eta^m(\varphi) = \sum_{w \in W} (w\lambda, \eta)^m \Phi_w,$$

что влечет для оператора $\tilde{\mathcal{P}}_{w_0}(\nabla_\eta, \lambda, \eta)$ равенство

$$\tilde{\mathcal{P}}_{w_0}(\nabla_\eta, \lambda, \eta)(\varphi) = \sum_{s \in W} \mathcal{P}_{w_0}(s\lambda, \lambda, \eta) \Phi_s.$$

Так как для $s \neq w_0$, $s \in W$

$$\mathcal{P}_{w_0}(s\lambda, \lambda, \eta) = \prod_{t \neq w_0} (s\lambda - t\lambda, \eta) = 0,$$

то мы имеем

$$\mathcal{P}_{w_0}(\nabla_\eta, \lambda, \eta)(\varphi) = \mathcal{P}_{w_0}(w_0\lambda, \lambda, \eta)\Phi_{w_0},$$

что дает указанную выше формулу восстановления.

Для тригонометрического случая, по-видимому, также верна формула восстановления, однако в этом случае вычисление “ведущего” члена

$$\sum_{s \in W} \mathcal{P}_{w_0}(s\lambda, \lambda, \eta)\Phi_s$$

несколько более сложно и будет опубликовано позже.

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждения предложения 1, теоремы 1, леммы 1 и теоремы 2 в рациональном случае имеют силу для произвольных групп Кокстера, порожденных отражениями, а не только для групп Вейля. Это вытекает из справедливости тождества Данкля для всех групп Кокстера. Авторы выражают благодарность рецензенту, указавшему авторам на это обстоятельство.

Работа частично поддержана грантом Международного научного фонда M3C000.

Список литературы

- [1] *Matsuo A.* // Invent. Math. 1992. V. 110. № 1. P. 95–121.
- [2] *Cherednik I.* // Adv. in Math. 1994. V. 106. № 1. P. 65–95.
- [3] *Felder G., Veselov A.* // Commun. Math. Phys. 1994. V. 160. № 2. P. 259–274.
- [4] *Веселов А.П.* // ТМФ. 1994. Т. 98. № 3. С. 524–535.
- [5] *Dunkl Ch.F.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. V. 311. № 1. P. 167–183.
- [6] *Date E., Jimbo M., Matsuo A., Miwa T.* Hypergeometric-type integrals and $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ Knizhnik–Zamolodchikov equation: Preprint RIMS, 1989.
- [7] *Matsuo A.* // Commun. Math. Phys. 1990. V. 134. № 1. P. 65–77.

ВИНИТИ

Коломенский педагогический
институт

Поступила в редакцию

22.II.1995 г.

V. A. Golubeva, V. P. Leksin

ON RECONSTRUCTION OF VESELOV–FELDER FORMULA IN THE THEORY OF CALOGERO–SUTHERLAND OPERATORS

A. Matsuo and I. Cherednik proposed the nice construction connecting the solutions of the generalized Knizhnik–Zamolodchikov (KZ) equations with the eigenfunctions of the Calogero–Sutherland operators associated with the same root system. A. Veselov and G. Felder simplified the arguments of the paper of A. Matsuo and I. Cherednik for rational KZ equations and obtained for the root system A_{n-1} the reconstruction formula that permits to get the solution of KZ equation in terms of the eigenfunctions of Calogero operator. In this paper for any reduced irreducible root system the direct proof of the Matsuo–Cherednik assertion on the connection of the solutions of KZ equations with the eigenfunctions of Calogero–Sutherland operators is given, and the reconstruction formula of Felder–Veselov is extended to these root systems.