Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Г. Корепанов, $SL(2)$ -решение уравнения пентагона и инварианты трехмерных многообразий, *ТМФ*, 2004, том 138, номер 1, 23–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf11>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 17:46:29

© 2004 г.

И. Г. Корепанов*

$SL(2)$ -РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕНТАГОНА И ИНВАРИАНТЫ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

На основе классического решения уравнения пентагона, полученного ранее автором и Е. В. Мартюшевым и связанного с плоской геометрией, инвариантной относительно группы $SL(2)$, построен алгебраический комплекс, отвечающий триангуляции трехмерного многообразия. Если этот комплекс является ациклическим (а это подтверждается примерами), то по нему строится инвариант многообразия.

Ключевые слова: уравнение пентагона, движения Пахнера, ациклические комплексы, кручение, инварианты многообразий.

1. ВВЕДЕНИЕ

Недавно были придуманы ациклические комплексы нового вида, которые можно сопоставить триангуляциям трехмерных и четырехмерных многообразий [1]–[3]. Элементам этих триангуляций сопоставлялись евклидовы метрические величины (такие как длины ребер, двугранные углы, координаты вершин в евклидовом пространстве). Для построения линейных пространств, входящих в комплекс, использовались бесконечно малые вариации этих величин. Результатом явилось построение инвариантов кусочно-линейных многообразий, выражающихся через кручение комплекса и объемы симплексов разных размерностей, входящих в триангуляцию.

В основе построения этих новых ациклических комплексов лежали алгебраические соотношения, соответствующие элементарным перестройкам триангуляции многообразия – движениям Пахнера, а именно движению типа $2 \rightarrow 3$ (два тетраэдра с общей гранью заменяются на три тетраэдра с общим ребром; мы называем такое соотношение *уравнением пентагона*) в трехмерном случае и движению типа $3 \rightarrow 3$ в четырехмерном. Далее комплекс строится таким образом, чтобы обеспечить построение инварианта *всех* движений Пахнера.

В трехмерном случае инвариант успешно проходит стандартный тест на различение линзовых пространств [4]. Более сложный четырехмерный случай требует дальнейших исследований.

В настоящей статье мы снова рассматриваем трехмерные многообразия, но вместо решения уравнения пентагона, связанного с евклидовыми величинами, используем $SL(2)$ -

* Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия. E-mail: kig@susu.ac.ru

решение, найденное в работе [5]. Мы сохраним это название, хотя в наших построениях появляется и бóльшая группа – группа аффинных движений плоскости, сохраняющих площадь.

В конструкцию ациклического комплекса естественно входят два представления фундаментальной группы $\pi_1(M)$ многообразия M . Чтобы пояснить это, вернемся к евклидову случаю. В работе [6] мы помещали вершины триангуляции многообразия M в трехмерное евклидово пространство, а в работе [4] мы помещали туда вершины триангуляции *универсальной накрывающей* многообразия M . Можно сказать, что каждая вершина триангуляции многообразия M размножалась в $\text{card}(\pi_1(M))$ своих копий, и переход от одной копии к другой определялся образом элемента из $\pi_1(M)$ в группе E_3 евклидовых движений трехмерного пространства относительно некоторого представления $f: \pi_1(M) \rightarrow E_3$. Кроме представления f , можно рассматривать и другие представления группы $\pi_1(M)$, а именно в линейных пространствах *дифференциалов*, из которых состоит наш алгебраический комплекс (строющийся для универсальной накрывающей). Начало работе с нетривиальными представлениями положено в заметке [7].

Аналогичные два вида представлений можно рассмотреть и для группы $SL(2)$. Опыт изучения евклидова случая показывает, что именно использование нетривиальных представлений приводит к наиболее интересным инвариантам многообразий. Тем не менее мы ограничимся здесь простейшим случаем, когда оба представления тривиальны. Инварианты, соответствующие нетривиальным представлениям, мы надеемся изучить в последующих работах.

План статьи таков. В разделе 2 мы приводим решение уравнения пентагона из работы [5] вместе с некоторыми новыми соображениями. В разделе 3 мы строим на этой основе алгебраический комплекс. В разделе 4 мы изучаем поведение кручения комплекса (в предположении ацикличности) при движениях Пахнера $2 \rightarrow 3$ и $1 \rightarrow 4$ и на этой основе предлагаем формулу для инварианта многообразия. В разделе 5 инвариант вычисляется для сферы S^3 и проективного пространства $\mathbb{R}P^3$ (причем комплексы действительно оказываются ациклическими). Заключительный раздел 6 посвящен обсуждению результатов статьи и планов дальнейших исследований.

2. $SL(2)$ -РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕНТАГОНА

На рис. 1 изображено движение Пахнера $2 \rightarrow 3$: смежные тетраэдры $EABC$ и $ABCD$, принадлежащие триангуляции трехмерного ориентируемого многообразия, заменяются тремя тетраэдрами $ABED$, $BCED$ и $CAED$. Сопоставим каждому ориентированному ребру вещественное число, например ребру AB число λ_{AB} , причем считаем, что для всех ребер

$$\lambda_{BA} = -\lambda_{AB}. \quad (1)$$

При необходимости можно расширить поле, которому принадлежат числа λ и связанные с ними величины, до поля комплексных чисел $\mathbb{C}$. С другой стороны, мы пока не рассматриваем интересный вопрос о том, что получится, если считать λ элементами поля *конечной характеристики*.

Рис. 1. Перестройка 2 $\rightarrow$ 3.

Каждой ориентированной двумерной грани сопоставим величину S , равную циркуляции величин λ , например для грани ABC по определению

$$S_{ABC} = \lambda_{AB} + \lambda_{BC} + \lambda_{CA}. \quad (2)$$

Сопоставим теперь числовые значения двугранным углам при ребрах тетраэдров. Рассмотрим ориентированный тетраэдр $BCED$ и в нем ориентированное ребро ED . Скажем, что *величина двугранного угла* при ребре ED по определению есть

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{S_{BDC} + S_{BEC}}{S_{BDE}S_{CDE}}. \quad (3)$$

Таким образом, α меняет знак как при изменении ориентации тетраэдра (без изменения ориентации ребра ED), так и при изменении ориентации ребра ED (без изменения ориентации тетраэдра).

Введем аналогичные величины для тетраэдров $CAED$ и $ABED$:

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{S_{CDA} + S_{CEA}}{S_{CDE}S_{ADE}}, \quad \gamma = \frac{1}{2} \frac{S_{ADB} + S_{AEB}}{S_{ADE}S_{BDE}}. \quad (4)$$

Примем теперь, что (если противоположное не оговорено явно) для всех тетраэдров в триангуляции нашего многообразия мы всегда выбираем *положительную* ориентацию, т.е. ориентация, определяемая порядком вершин тетраэдра, совпадает с фиксированной ориентацией всего многообразия. Положим по определению

$$\omega_{ED} = -\omega_{DE} = \alpha + \beta + \gamma. \quad (5)$$

С учетом предыдущего замечания эта величина однозначно определяется ориентированным ребром ED . Более того, это определение очевидным образом обобщается на случай, когда ребро ED является общим для более чем трех тетраэдров. По причинам, которые вскоре станут ясными, мы будем называть ω_{ED} *кривизной вокруг ребра ED* .

Вернемся к рис. 1. Имеет место формула

$$S_{ABC} = S_{ADE}S_{BDE}S_{CDE}\frac{\partial\omega_{ED}}{\partial\lambda_{ED}}, \quad (6)$$

где все величины вычисляются при значении λ_{ED} , при котором $\omega_{ED} = 0$. Соотношение (6) и есть решение уравнения пентагона, лежащее в основе наших дальнейших построений. В его левой части находится величина S_{ABC} , относящаяся именно к той грани, которая присутствует на левой диаграмме рис. 1 и отсутствует на правой, а обе величины в правой части (6) относятся к объектам, отсутствующим в левой части соотношения (6).

Справедливость соотношения (6) нетрудно проверить непосредственно. Соображения, приводящие к нему, можно найти в работе [5] (ср. формулу (15) этой работы).

Равенство $\omega_{ED} = 0$ равносильно билинейному соотношению

$$S_{ADB}S_{CDE} + S_{BDC}S_{ADE} + S_{CDA}S_{BDE} = 0, \quad (7)$$

которое переходит в себя при любой перестановке букв $A, \dots, E$. С другой стороны, соотношение (7) выполнено, если считать, что $A, \dots, E$ — это точки обыкновенной плоскости $\mathbb{R}^2$, а $S_{\dots}$ — ориентированные площади треугольников. Кроме билинейных соотношений, площади удовлетворяют, разумеется, и линейным соотношениям типа $S_{ABC} + S_{ACD} = S_{ABD} + S_{BCD}$, что согласуется с формулами типа (2).

Это мотивирует следующие построения. Пусть A, B, D и E — точки плоскости $\mathbb{R}^2$. Сразу скажем, что в этой плоскости нам не понадобится вычислять, например, расстояния между точками или углы (в евклидовом смысле), а понадобятся только *площади* фигур. Пусть даны площади всех треугольников с вершинами в этих точках. Тогда нетрудно найти, что

$$\overrightarrow{EB} = \frac{S_{EBA}\overrightarrow{ED} + S_{EDB}\overrightarrow{EA}}{S_{EDA}}, \quad (8)$$

где S_{EBA} — ориентированная площадь треугольника EBA и т. д.

Добавим еще точку C к нашим четырем точкам. Заменяя в (8) пару A, B сначала на B, C , а затем на C, A , получим еще два соотношения:

$$\overrightarrow{EC} = \frac{S_{ECB}\overrightarrow{ED} + S_{EDC}\overrightarrow{EB}}{S_{EDB}}, \quad (9)$$

$$\overrightarrow{EA} = \frac{S_{EAC}\overrightarrow{ED} + S_{EDA}\overrightarrow{EC}}{S_{EDC}}. \quad (10)$$

Посмотрим теперь на формулы (8)–(10) с другой точки зрения. Забудем временно о том, что $A, \dots, E$ — точки из $\mathbb{R}^2$, и будем считать эти буквы просто индексами, нумерующими несколько величин λ , на которые налагается лишь условие антисимметричности (1) и из которых строятся величины $S_{\dots}$ по формулам типа (2). Сами формулы (8)–(10) рассмотрим просто как линейные соотношения, которым должны удовлетворять некоторые ненулевые векторы $\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EC}$ и $\overrightarrow{ED}$, лежащие в $\mathbb{R}^2$.

Если выполнено равенство (7), то эти соотношения согласуются друг с другом. Мы, однако, не будем требовать выполнения (7), а вместо этого заменим в левой части (10) $\overrightarrow{EA}$ на $\overrightarrow{EA}_{\text{новое}}$ и выразим $\overrightarrow{EA}_{\text{новое}}$ через $\overrightarrow{ED}$ и $\overrightarrow{EA}$, подставляя выражения (9) и (8) для $\overrightarrow{EC}$ и $\overrightarrow{EB}$. После некоторых вычислений мы получим

$$\overrightarrow{EA}_{\text{новое}} = \overrightarrow{EA} + \omega_{ED} S_{EDA} \overrightarrow{ED}.$$

С точки зрения рис. 1 соотношение (8) относится к тетраэдру $ABED$, (9) – к тетраэдру $BCED$ и (10) – к $CAED$. Их последовательное применение, можно сказать, отвечает обходу вокруг ребра ED . А именно, мы видим, что этому обходу соответствует элемент группы $SL(2)$, определяемый следующим преобразованием (ненормированных) базисов в плоскости $\mathbb{R}^2$:

$$(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EA}) \rightarrow (\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EA} + \omega_{ED} S_{EDA} \overrightarrow{ED}). \quad (11)$$

Если в этой формуле снова считать E, D и A точками плоскости $\mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{ED}$ и $\overrightarrow{EA}$ – соединяющими их векторами, а S_{EDA} – площадью треугольника EDA , то преобразование (11) зависит только от вектора $\overrightarrow{ED}$ и числа ω_{ED} , но не зависит от вектора $\overrightarrow{EA}$.

3. ПОСТРОЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА

Алгебраический комплекс, который мы строим в этом разделе, имеет следующий вид:

$$0 \rightarrow \mathbb{R}^6 \xrightarrow{f_1} \mathbb{R}^{3\#} \text{ вершин} \xrightarrow{f_2} \mathbb{R}^{\#} \text{ ребер} \xrightarrow{f_3} \mathbb{R}^{\#} \text{ ребер} \xrightarrow{f_4} \mathbb{R}^{3\#} \text{ вершин} \xrightarrow{f_5} \mathbb{R}^6 \rightarrow 0. \quad (12)$$

Здесь $\#$ вершин – число вершин в симплицальном комплексе, а $\#$ ребер – число ребер. Базисы во всех пространствах фиксированы, и отображения отождествляются с матрицами. Перейдем к определению отображений f_i в последовательности (12).

Поместим все вершины комплекса в двумерное координатное пространство $\mathbb{R}^2$, т.е. сопоставим каждой вершине A вещественные числа x_A и y_A . Представим себе, что величины x_A и y_A могут претерпевать бесконечно малые изменения dx_A и dy_A . Кроме того, сопоставим каждой вершине A еще одно вещественное число $\varkappa_A$, которое также может изменяться на $d\varkappa_A$. Мы представляем второе слева ненулевое пространство $\mathbb{R}^{3\#}$ вершин в последовательности (12) как состоящее из столбцов дифференциалов $(dx_A, dy_A, d\varkappa_A, dx_B, dy_B, d\varkappa_B, \dots)^T$ (верхний индекс T – знак матричного сопряжения).

Первое слева ненулевое пространство $\mathbb{R}^6$ есть прямая сумма пятимерной алгебры Ли бесконечно малых аффинных преобразований плоскости $\mathbb{R}^2$, сохраняющих площади, и одномерного пространства дифференциалов $d\varkappa$. Вектор в этом пространстве представляем как столбец

$$(dt_1, dt_2, dt_3, dx, dy, d\varkappa)^T, \quad (13)$$

что соответствует элементу $\begin{pmatrix} dt_3 & dt_1 \\ dt_2 & -dt_3 \end{pmatrix}$ алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$, сдвигу в $\mathbb{R}^2$ на вектор $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ и сдвигу параметра $\varkappa$ на $d\varkappa$. Отображение f_1 в последовательности (12) таково: вектору (13) соответствует в каждой вершине A вектор

$$\begin{pmatrix} dx_A \\ dy_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dt_3 & dt_1 \\ dt_2 & -dt_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \quad (14)$$

и

$$d\kappa_A = d\kappa + \frac{x_A dy - y_A dx}{2}. \quad (15)$$

Смысл формул (14) и (15) станет ясен при доказательстве того, что последовательность (12) есть комплекс.

Теперь сопоставим каждому ребру AB величину

$$\lambda_{AB} = S_{OAB} + \kappa_B - \kappa_A, \quad (16)$$

где S_{OAB} – (ориентированная) площадь треугольника OAB , O – начало координат. Левое из двух пространств $\mathbb{R}^\#$ ребер в последовательности (12) состоит из столбцов дифференциалов $d\lambda_{AB}$ для всех ребер. Отображение f_2 по определению получается дифференцированием равенства (16), т.е. $d\lambda_{AB}$, получаемое посредством f_2 из данных $dx\dots$, $dy\dots$ и $d\kappa\dots$, есть

$$d\lambda_{AB} = \frac{y_B}{2} dx_A - \frac{x_B}{2} dy_A - \frac{y_A}{2} dx_B + \frac{x_A}{2} dy_B + d\kappa_B - d\kappa_A. \quad (17)$$

Как показывает обсуждение в разделе 2, кривизны ω_{AB} вокруг всех ребер равны нулю, если все λ_{AB} получены из координат вершин по формуле (16) (очевидно, что добавление величин $\kappa\dots$ сохраняет равенство кривизн нулю). Введем в рассмотрение дифференциалы всех кривизн. Они будут образовывать правое из двух пространств $\mathbb{R}^\#$ ребер в последовательности (12). Матрица отображения f_3 по определению равна $(\partial\omega_a/\partial\lambda_b)$, где a нумерует ребра комплекса и в то же время строки этой матрицы, а b – ребра и столбцы. Частные производные вычисляются исходя из соотношения (5) или его обобщения на большее число тетраэдров, причем “углы” $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ вычисляются по формулам типа (3), (4), в которые подставляются величины $\lambda\dots$ согласно формулам (2) и (1).

Правое из двух пространств $\mathbb{R}^{3\#}$ вершин в последовательности (12) будет прямой суммой алгебр Ли $\mathfrak{sl}(2)$, по одной на каждую вершину комплекса. Отображение f_4 строится следующим образом. Рассмотрим, например, вершину E . Элемент $d\gamma_E \in \mathfrak{sl}(2)$, в который f_4 переводит данную конфигурацию величин $d\omega$ на ребрах комплекса, по определению равен сумме по всем ребрам, *начинающимся* в E , элементов этой алгебры Ли, соответствующих бесконечно малым преобразованиям базисов типа (11).

Пусть, например, мы рассматриваем ребро ED , координаты которого

$$\begin{pmatrix} x_{ED} \\ y_{ED} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_D - x_E \\ y_D - y_E \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Из формулы (11), в которой мы заменяем ω_{ED} на $d\omega_{ED}$, а вместо самого преобразования из группы $SL(2)$ рассматриваем его дифференциал (т.е. вычитаем единичную матрицу), после несложного вычисления находим, что получается следующий элемент алгебры $\mathfrak{sl}(2)$:

$$\frac{1}{2} d\omega_{ED} \begin{pmatrix} -x_{ED} y_{ED} & x_{ED}^2 \\ -y_{ED}^2 & x_{ED} y_{ED} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Для построения алгебраического комплекса нам нужна только структура векторного пространства, поэтому мы будем отождествлять выражение (19) с вектором-столбцом

$$d\gamma_{ED} = \frac{d\omega_{ED}}{2} \begin{pmatrix} x_{ED}^2 \\ x_{ED}y_{ED} \\ y_{ED}^2 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Суммируя по всем точкам D , соединенным ребрами с вершиной E , получим три компоненты вектора $d\gamma \in \mathbb{R}^{3\# \text{ вершин}}$, соответствующие вершине E :

$$\begin{aligned} (d\gamma_E)_1 &= \sum_D x_{ED}^2 \frac{d\omega_{ED}}{2}, \\ (d\gamma_E)_2 &= \sum_D x_{ED} y_{ED} \frac{d\omega_{ED}}{2}, \\ (d\gamma_E)_3 &= \sum_D y_{ED}^2 \frac{d\omega_{ED}}{2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Осталось построить правое пространство $\mathbb{R}^6$ и отображение f_5 . Пространство будет состоять из векторов-столбцов с компонентами $d\beta_1, \dots, d\beta_6$. По определению величины $d\beta$, получающиеся посредством f_5 из данных $d\gamma$, суть (суммы берутся по всем вершинам A комплекса)

$$\begin{aligned} d\beta_1 &= \sum_A (d\gamma_A)_1, & d\beta_2 &= \sum_A (d\gamma_A)_2, & d\beta_3 &= \sum_A (d\gamma_A)_3, \\ d\beta_4 &= \sum_A (y_A (d\gamma_A)_1 - x_A (d\gamma_A)_2), \\ d\beta_5 &= \sum_A (y_A (d\gamma_A)_2 - x_A (d\gamma_A)_3), \\ d\beta_6 &= \sum_A (y_A^2 (d\gamma_A)_1 - 2x_A y_A (d\gamma_A)_2 + x_A^2 (d\gamma_A)_3). \end{aligned} \quad (22)$$

Последовательность (12) построена. Мы будем также использовать для линейных пространств, входящих в нее, более удобные обозначения в стиле работ [2] и [3] и записывать ее в следующем виде:

$$0 \rightarrow (\mathfrak{sl}(2) \text{ и сдвиги}) \xrightarrow{f_1} \begin{pmatrix} dx_A \\ dy_A \\ d\kappa_A \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2} (d\lambda_{AB}) \xrightarrow{f_3} (d\omega_{AB}) \xrightarrow{f_4} (d\gamma_A) \xrightarrow{f_5} (d\beta) \rightarrow 0. \quad (23)$$

Здесь слово “сдвиги” в самом левом ненулевом пространстве означает “глобальные сдвиги” dx, dy и $d\kappa$, действующие в соответствии с формулами (14) и (15); следующее пространство состоит из дифференциалов $dx_A, dy_A, d\kappa_A$ для каждой вершины A и т.д.

Докажем, что последовательность (23) является комплексом, т.е. композиция любых двух последовательных отображений равна нулю. Начнем с композиции $f_2 \circ f_1$. Подставим в (17) выражения (14) и (15) для dx_A, dy_A и $d\kappa_A$, а также аналогичные выражения

для dx_B , dy_B и $d\kappa_B$. Прямое вычисление показывает, что мы получим $d\lambda_{AB} = 0$. Мы видим, что добавка к $d\kappa$ в правой части (15) подобрана таким образом, чтобы скомпенсировать изменение площади треугольника OAB , когда вершины A и B сдвигаются на вектор $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$, а начало координат O остается на месте.

Равенство $f_3 \circ f_2 = 0$ очевидно из геометрических соображений: если площади всех треугольников определяются их координатами (иначе говоря, все треугольники можно разместить в $\mathbb{R}^2$), то все кривизны равны нулю.

Равенство $f_4 \circ f_3 = 0$ также следует из геометрических соображений. Представим себе вершину E и исходящие из нее ребра. Любой замкнутой траектории, не пересекающей ребра, соответствует определенное преобразование базиса в плоскости $\mathbb{R}^2$. В самом деле, как демонстрируют формулы (8) и (9), система координат в $\mathbb{R}^2$ однозначно продолжается при переходе от данного тетраэдра к смежному (имеющему с ним общую двумерную грань), но при условии ненулевых кривизн мы можем получить новую систему координат, возвратившись в исходный тетраэдр (что демонстрирует формула (11)). Если, однако, траекторию можно стянуть в точку так, чтобы она не пересекала при этом ребра, мы должны получить систему координат, совпадающую с исходной. Для случая инфинитезимальных кривизн $d\omega$ это значит, что сумма элементов алгебры $\mathfrak{sl}(2)$ вида (19) по всем вершинам D , связанным ребрами с E , будет равна нулю при любых $d\lambda$. Таким образом, правые части выражений (21) будут равны нулю, что и требовалось.

Осталось проверить, что $f_5 \circ f_4 = 0$. Подставляем выражения (21) в формулы (22), учитываем соотношения типа (18) и получаем нуль. Это очевидно для первых трех выражений в (22): в силу равенства $d\omega_{AB} = -d\omega_{BA}$ кривизна каждого ребра дает взаимно противоположные вклады на двух его концах, при суммировании получается нуль. Сложнее объяснить это для остальных равенств в (22); приходится просто сказать, что эти выражения были специально подобраны так, чтобы получились нули.

4. ПОВЕДЕНИЕ КРУЧЕНИЯ ПРИ ПЕРЕСТРОЙКАХ 2 → 3 И 1 → 4 И ФОРМУЛА ДЛЯ ИНВАРИАНТА

Есть основания считать (см. раздел 5), что по крайней мере во многих интересных случаях комплекс (23) является ациклическим, т.е. образы отображений в точности совпадают с ядрами следующих отображений. Если это так, то можно определить *кручение* τ комплекса (23) как произведение некоторых миноров матриц отображений $f_1, \dots, f_5$, берущихся в чередующихся степенях $+1$ и -1 . Напомним, что базисы во всех пространствах фиксированы. Часть базисных векторов каждого пространства соответствует строкам минора левого (от этого пространства) отображения, а оставшаяся часть — столбцам минора правого отображения.

Мы выберем показатели степеней $+1$ для отображений с нечетными номерами и -1 для отображений с четными номерами:

$$\tau = \frac{\text{minor } f_1 \cdot \text{minor } f_3 \cdot \text{minor } f_5}{\text{minor } f_2 \cdot \text{minor } f_4}. \quad (24)$$

Рассмотрим теперь локальную перестройку симплицеального комплекса типа $2 \rightarrow 3$, изображенную на рис. 1. Новое ребро DE добавляет по одному новому базисному вектору в пространства $(d\lambda_{AB})$ и $(d\omega_{AB})$. Мы включим соответствующие столбец и строку в минор отображения f_3 (таким образом, остальные миноры в (24) не меняются). Соображения, основанные на треугольности матриц и аналогичные приведенным в разделе 3 работы [6], показывают, что при этом минор отображения f_3 умножается на $\partial\omega_{ED}/\partial\lambda_{ED}$. С учетом формулы (6) это показывает, что величина

$$\tau \prod_{\substack{\text{по всем} \\ \text{двумерным граням}}} S \quad (25)$$

не меняется при перестройке $2 \rightarrow 3$.

Отметим, что мы определяем и кручение, и наш будущий инвариант *с точностью до знака*. Это избавляет нас от необходимости заботиться об ориентации двумерных граней комплекса.

Рассмотрим теперь перестройку типа $1 \rightarrow 4$: внутри тетраэдра $ABCD$ добавляется новая вершина E . Как и при перестройке $2 \rightarrow 3$, мы добавим строку и столбец, соответствующие ребру ED , к минору отображения f_3 . К минору отображения f_2 добавляем строки, соответствующие трем оставшимся ребрам — EA , EB и EC , и столбцы, соответствующие dx_E , dy_E и $d\kappa_E$. Аналогично добавляем к минору отображения f_4 столбцы, соответствующие EA , EB и EC , и три строки, соответствующие трем компонентам $d\gamma_E$. Снова соображения, связанные с треугольностью матриц, показывают, что миноры отображений f_2 и f_4 просто умножаются на миноры размера 3×3 , соответствующие новым строкам и столбцам. Первый из этих миноров размера 3×3 вычисляется с помощью формулы (17) и оказывается равным $S_{ABC}/2$, а второй вычисляется с помощью формул (21) и оказывается равным $S_{EAB}S_{EBC}S_{ECA}$ (в обоих случаях с точностью до знаков), так что все кручение (с учетом также минора отображения f_3 , который ведет себя как при перестройке $2 \rightarrow 3$) умножается на $2 \prod_{\text{по новым граням}} S^{-1}$.

Все это показывает, что величина

$$I_{SL(2)}(M) = \tau \prod_{\substack{\text{по всем} \\ \text{граням}}} S \cdot 2^{-\# \text{ вершин} - 1} \quad (26)$$

инвариантна относительно всех движений Пахнера и может быть сопоставлена самому многообразию M . Минус единица добавлена к показателю числа 2, чтобы инвариант оказался равным единице для сферы S^3 (см. ниже п. 5.1).

5. ПРИМЕРЫ

5.1. Сфера S^3 . Рассмотрим триангуляцию сферы, состоящую из двух тетраэдров, каждый из которых имеет вершины A , B , C и D . Этим вершинам нужно приписать координаты в плоскости $\mathbb{R}^2$ (от которых, разумеется, наш инвариант не будет зависеть); например, можно взять $A(0, 0)$, $B(x_B, 0)$, $C(0, y_C)$, $D(x_D, y_D)$.

Как и в евклидовом случае (см. раздел 6 работы [6]), отображение $f_3: (d\lambda) \rightarrow (d\omega)$ есть тождественный ноль, так как каждая кривизна ω вокруг любого из шести ребер складывается из двух взаимно противоположных слагаемых. Поэтому $\text{minor } f_3 = 1$ (как определитель матрицы размера 0×0). Для вычисления миноров отображений f_1 и f_2 нужно выбрать в пространстве величин $\begin{pmatrix} dx_A \\ dy_A \\ dz_A \end{pmatrix}$ шесть базисных дифференциалов для строк минора f_1 (вычисления делаются очень просто, если в качестве базисных дифференциалов взять $dx_A, dy_A, dz_A, dx_B, dy_B$ и dx_C) и оставшиеся шесть базисных дифференциалов использовать для столбцов минора f_2 . В результате получаем

$$\frac{\text{minor } f_1}{\text{minor } f_2} = \pm 8. \quad (27)$$

Аналогичны, но чуть более сложны вычисления в правой части последовательности. Их результат следующий:

$$\frac{\text{minor } f_5}{\text{minor } f_4} = \pm \frac{4}{S_{ABC}S_{ABD}S_{ACD}S_{BCD}}. \quad (28)$$

Подставляя правые части соотношений (27), (28) в формулу (24) и затем в (26), находим, как и предполагалось,

$$I_{SL(2)}(S^3) = 1$$

(знак $\pm$ опускаем).

5.2. Проективное пространство $\mathbb{RP}^3$. Выберем ту же триангуляцию, что и в разделе 6 работы [6], где мы рассматривали евклидов случай. Именно, по-прежнему мы будем иметь четыре вершины A, B, C и D , но теперь получим 12 ребер, 16 двумерных граней и 8 тетраэдров (см. рис. 2). Например, вместо одного ребра AB , которое мы рассматривали в п. 5.1, теперь у нас имеется два ребра b и b' , и т.д. Заметим, что одинаково обозначенные на рис. 2 ребра, например два ребра f , отождествляются, но f и f' — это разные ребра.

Несмотря на все эти различия, формулы (27) и (28) остаются справедливыми и для пространства $\mathbb{RP}^3$. Следует только уточнить, что для строк минора f_2 мы задействуем шесть “штрихованных” дифференциалов $d\lambda$, т.е. $d\lambda_{b'}, \dots, d\lambda_{f'}$ вместо $d\lambda_{AB}, \dots, d\lambda_{CD}$, которые использовались для построения аналогичного минора в п. 5.1. Аналогично для столбцов минора f_4 мы задействуем “штрихованные” дифференциалы $d\omega$.

“Нештрихованные” $d\lambda$ и $d\omega$ остаются для построения минора отображения f_3 , состоящего из частных производных шести величин $\omega_b, \omega_c, \omega_d, \omega_h, \omega_g, \omega_f$ по переменным $\lambda_b, \lambda_c, \lambda_d, \lambda_h, \lambda_g, \lambda_f$. Этот минор размера 6×6 равен произведению шести своих элементов, а именно

$$\frac{\partial \omega_b}{\partial \lambda_f}, \frac{\partial \omega_f}{\partial \lambda_b}, \frac{\partial \omega_c}{\partial \lambda_g}, \frac{\partial \omega_g}{\partial \lambda_c}, \frac{\partial \omega_d}{\partial \lambda_h} \text{ и } \frac{\partial \omega_h}{\partial \lambda_d}, \quad (29)$$

тогда как остальные его элементы равны нулю. Причина этого в том, что в эти остальные элементы входят пары взаимно противоположных слагаемых, отвечающих тетраэдрам с противоположной ориентацией (мы, по существу, повторяем аргументацию из

Рис. 2. Триангуляция $\mathbb{R}P^3$.

раздела 6 работы [6]). Сами же производные (29) являются суммами двух одинаковых слагаемых, отвечающих двум тетраэдрам с одинаковой ориентацией. Производная такого типа для одного тетраэдра приведена в работе [5] (см. формулу (10) в указанной работе). Заменяя обозначения этой формулы на обозначения настоящей работы, умножая на 2 и игнорируя возможный знак минус, получим, например, что

$$\frac{\partial \omega_b}{\partial \lambda_f} = \frac{2}{S_{ABC} S_{ABD}}$$

(это также несложно вывести из формул типа (3), (4)).

Минор отображения f_3 будет иметь вид

$$\text{minor } f_3 = \frac{64}{S_{ABC}^3 S_{ABD}^3 S_{ACD}^3 S_{BCD}^3},$$

откуда получим

$$I_{SL(2)}(\mathbb{R}P^3) = 64. \quad (30)$$

6. ОБСУЖДЕНИЕ

Результат (30) подтверждает предположение, высказанное в конце работы [5]: в случае тривиальных представлений фундаментальной группы евклидов и $SL(2)$ -инварианты дают один и тот же результат (евклидов инвариант для $\mathbb{R}P^3$, вычисленный в работе [6], равен $1/8$, но это значение было получено потому, что там использовалось несколько другое определение, аналогичное принятому в настоящей работе определению в степени $(-1/2)$).

В настоящей работе, используя терминологию статьи [5], мы глобализовали “локальное” уравнение пентагона, т.е. показали, как его использовать для изучения не только локальной перестройки $2 \rightarrow 3$, но и всего многообразия. Эта глобализация оказалась труднее, чем ожидалось при написании работы [5]. Напомним, что в евклидовом случае алгебраический комплекс, аналогичный (23), был симметричным относительно своей середины в следующем смысле: матрицы отображений, равноотстоящих от концов комплекса, получались друг из друга транспонированием (см. разделы работ [2] и [3], посвященные трехмерному случаю). Для комплекса (23) не только это свойство не выполнено, но даже не удалось пока найти какой-либо его аналог. По-видимому, геометрический и алгебраический смысл последовательности (23) выявлен пока не полностью.

По-видимому, можно доказать точность последовательности (23) в некоторых случаях для произвольных многообразий, используя идеи, аналогичные идеям раздела 2 работы [2]. Но есть и другой путь: рассматривать симплициальный комплекс, соответствующий *универсальной накрывающей* многообразия, строить по нему алгебраический комплекс типа (23), а затем брать подкомплексы алгебраического комплекса. Они должны соответствовать различным представлениям фундаментальной группы (о которых говорилось во введении). Не исключено, что это может помочь и при доказательстве ацикличности, и для построения новых инвариантов многообразий. Начало такой деятельности в евклидовом случае положено в работе [7].

Наконец, весьма интригующим является вопрос о возможности существования квантовых соотношений, из которых наше решение уравнения пентагона получается в квазиклассическом пределе. Этот вопрос мотивирован тем, что в евклидовом случае наше решение уравнения пентагона [6] может быть получено предельным переходом из квантовых $6j$ -символов. Отметим, однако, что и в евклидовом случае аналогичный вопрос остается открытым для многообразий размерности больше трех.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-01-00059).

Список литературы

- [1] И. Г. Корепанов. ТМФ. 2002. Т. 131. № 3. С. 377–388.
- [2] И. Г. Корепанов. ТМФ. 2002. Т. 133. № 1. С. 24–35.
- [3] И. Г. Корепанов. ТМФ. 2003. Т. 135. № 2. С. 179–195.
- [4] I. G. Korepanov, E. V. Martyushev. J. Nonlin. Math. Phys. 2002. V. 9. № 1. P. 86–98.
- [5] И. Г. Корепанов, Е. В. Мартюшев. ТМФ. 2001. Т. 129. № 1. С. 14–19.
- [6] I. G. Korepanov. J. Nonlin. Math. Phys. 2001. V. 8. № 2. P. 196–210.
- [7] Е. В. Мартюшев. Известия Челябинского научного центра УрО (Уральского отделения) РАН. 2003. № 2(19). С. 1–5; http://csc.ac.ru/news/2003_2.

Поступила в редакцию 23.XII.2002 г.