Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Антонов, С. В. Борисенок, В. И. Гирина, Ренормализационная группа в теории развитой турбулентности. Составные операторы канонической размерности восемь, *ТМФ*, 1996, том 106, номер 1, 92–101

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1100>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 15:17:04

Н.В. Антонов, С.В. Борисенок, В.И. Гирина
**РЕНОРМАЛИЗАЦИОННАЯ ГРУППА
В ТЕОРИИ РАЗВИТОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ.
СОСТАВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ
КАНОНИЧЕСКОЙ РАЗМЕРНОСТИ ВОСЕМЬ**

В рамках ренормгруппового подхода к стохастической теории развитой турбулентности рассматриваются ренормировка и критические размерности семейства галилеево-инвариантных скалярных составных операторов канонической размерности восемь.

1. ВВЕДЕНИЕ

В стохастической формулировке теории изотропной развитой турбулентности несжимаемой вязкой жидкости рассматривается уравнение Навье–Стокса с внешней случайной силой [1, 2]

$$\mathcal{D}_t \varphi_i - \nu_0 \Delta \varphi_i + \partial_i p - f_i = 0, \quad \mathcal{D}_t \equiv \partial_t + (\varphi \cdot \partial). \quad (1)$$

Здесь φ – поперечное (в силу условия несжимаемости $\partial_i \varphi_i = 0$) векторное поле скорости, p и f – давление и поперечная случайная сила в расчете на единицу массы (все эти величины зависят от $x \equiv t, \mathbf{x}$), ν_0 – коэффициент вязкости, Δ – лапласиан. Сила f считается гауссово-распределенной с нулевым средним и коррелятором

$$\langle f_i(x) f_j(x') \rangle = \frac{1}{(2\pi)^d} \delta(t - t') \int d\mathbf{k} P_{ij}(\mathbf{k}) d(k) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}, \quad (2)$$

в котором $P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ – поперечный проектор, d – размерность пространства $\mathbf{x}$, $d(k)$ – некоторая функция $k \equiv |\mathbf{k}|$ и параметров модели. Она может быть выбрана в виде

$$d(k) = D_0 k^{4-d-2\epsilon} h(m/k), \quad h(0) = 1, \quad D_0 \equiv g_0 \nu_0^3, \quad (3)$$

где g_0 – затравочная константа связи, h – произвольная достаточно гладкая функция, m – обратный внешний масштаб турбулентности, $\epsilon \geq 0$ – параметр, аналогичный $\epsilon = 4 - d$ в теории критических явлений, его логарифмическое значение $\epsilon = 0$, физическая область значений $\epsilon > 2$ (более подробно см., например, в [3]).

Задачей теории является проверка в рамках микромоделей (1)–(3) основных положений феноменологической теории Колмогорова–Обухова [1], т.е. независимости корреляционных функций скорости в инерционном интервале от m (первая гипотеза Колмогорова) и ν_0 (вторая гипотеза), изучение инфракрасных (ИК) поправок к колмогоровскому скейлингу и расчет детальных характеристик развитой турбулентности, включая

критические размерности и скейлинговые функции основных полей и составных операторов.

В работе [4] к задаче (1)–(3) был применен метод квантово-полевой ренормализационной группы (РГ). С его помощью в работе [3] независимость от вязкости была доказана для всей физической области $\epsilon > 2$. Для изучения зависимости корреляторов от m и проверки первой гипотезы нужно вычислять критические размерности составных операторов, входящих в операторные разложения различных корреляционных функций, в частности, $\langle \varphi \varphi \rangle$, см. [3]. Расчет критических размерностей составных операторов представляет и самостоятельный интерес, поскольку некоторые из них измеряются экспериментально [5, 6].

Использование функциональных уравнений Швингера и тождеств Уорда, выражающих галилееву инвариантность теории, существенно облегчает эту задачу и позволяет получить ряд точных результатов. Так, оказывается возможным точно определить критическую размерность поля скорости [4], скорости локальной диссипации энергии [7] и других операторов, входящих в законы сохранения импульса и энергии [8], степеней поля φ^n [3, 9] и всех операторов, построенных из поля скорости и его производных по времени [10], а также найти точные соотношения между их коэффициентами в операторном разложении произведения $\varphi \varphi$ [11].

Можно также показать, что ИК-асимптотика одновременного парного коррелятора скорости (и тем самым спектра пульсационной энергии) определяется критическими размерностями галилеево-инвариантных скалярных составных операторов [12]. На данный момент были детально изучены лишь такие операторы с канонической размерностью четыре и шесть, см. [7, 8, 10], имеются также некоторые недоказанные гипотезы относительно старших операторов [13]. В настоящей работе мы продолжим исследование [7–12] и рассмотрим инвариантные скалярные операторы следующего семейства с канонической размерностью восемь.

В п.2 приводятся необходимые сведения о квантово-полевой формулировке и ренормировке модели (1)–(3), подробное изложение можно найти в [3]. В п.3 обсуждается проблема определения ИК-асимптотики одновременного парного коррелятора и приводятся известные сведения о критических размерностях инвариантных операторов. В п.4 рассматривается ренормировка составного оператора квадрата скорости диссипации и показано, что он не является оператором с определенной критической размерностью, равной удвоенной размерности оператора диссипации, как ранее предполагалось [3, 13]. В п.5 с помощью уравнений Швингера явно построены три составных оператора, обладающих определенными критическими размерностями, причем сами размерности найдены точно.

2. КВАНТОВО-ПОЛЕВАЯ ФОРМУЛИРОВКА

Стохастическая задача (1)–(3) эквивалентна квантовой теории двух поперечных векторных полей $\Phi \equiv \varphi, \varphi'$ с функционалом действия [4]

$$S(\Phi) = \frac{1}{2} \varphi' D^f \varphi' + \varphi' [-D_t \varphi + \nu_0 \Delta \varphi], \quad (4)$$

в котором D^f – коррелятор (2) с функцией (3). Нужные суммирования по индексам полей и интегрирования по их аргументам $x = t, \mathbf{x}$ в (4) и аналогичных формулах ниже подразумеваются.

В модели (4) для каждой величины F можно ввести две независимые канонические размерности – импульсную d_F^k и частотную d_F^ω , а по ним – суммарную $d_F = d_F^k + 2d_F^\omega$ [7].

По определению $d_{\mathbf{x}}^k = d_t^\omega = -1$, $d_t^k = d_{\mathbf{x}}^\omega = 0$, а размерности прочих величин находятся из требования безразмерности (импульсной и частотной отдельно) всех членов действия (4). Сведения о размерностях приводятся в таблице (в нее включены и ренормированные параметры, которые появятся ниже).

F	φ	φ'	m, μ, Λ	ν, ν_0	g_0	g
d_F^k	-1	$d+1$	1	-2	2ϵ	0
d_F^ω	1	-1	0	1	0	0
d_F	1	$d-1$	1	0	2ϵ	0

Модель (4) логарифмична (суммарная размерность константы связи g_0 равна нулю) при $\epsilon = 0$, ультрафиолетовые (УФ) расходимости имеют вид полюсов по ϵ в корреляционных функциях полей $\Phi = \varphi, \varphi'$. Для их полного устранения при всех $d > 2$ достаточно одного контрчлена $\varphi' \Delta \varphi$ [4], что эквивалентно мультипликативной ренормировке вида

$$\nu_0 = \nu Z_\nu, \quad g_0 = g \mu^{2\epsilon} Z_g, \quad Z_g = Z_\nu^{-3}. \quad (5)$$

Здесь μ – ренормировочная масса в схеме минимальных вычитаний (MS), g, ν – ренормированные аналоги параметров g_0, ν_0 , $Z = Z(g, \epsilon, d)$ – константы ренормировки. Их связь в (5) – следствие отсутствия ренормировки вклада с D^f в (4); ренормировки полей и “массы” $m_0 = m$ не требуется. Ренормированное действие имеет вид

$$S_R(\Phi) = \frac{1}{2} \varphi' D^f \varphi' + \varphi' [-\mathcal{D}_t \varphi + \nu Z_\nu \Delta \varphi], \quad (6)$$

коррелятор D^f в (6) выражен через g, ν, μ , при этом $g_0 \nu_0^3 = g \nu^3 \mu^{2\epsilon}$ в силу (5). По константам ренормировки (5) находятся РГ-функции – β -функция $\beta \equiv \tilde{D}_\mu g$ и аномальная размерность $\gamma_\nu \equiv \tilde{D}_\mu \ln Z_\nu$, где $\tilde{D}_\mu \equiv \mu \frac{\partial}{\partial \mu}$ при фиксированных g_0, ν_0 . В однопетлевом приближении имеем [7]

$$\gamma_\nu(g) = ag + O(g^2), \quad a = \frac{(d-1)}{4(d+2)} \frac{S_d}{(2\pi)^d}, \quad (7)$$

где $S_d \equiv 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ – площадь поверхности единичной сферы в d -мерном пространстве. Уравнения РГ имеют ИК-устойчивую неподвижную точку $g_* = 3\epsilon/2a + O(\epsilon^2)$, в которой $\beta(g_*) \equiv 0$, $\beta'(g_*) > 0$. Вытекающее из (5) соотношение $\beta = g(-2\epsilon + 3\gamma_\nu)$ позволяет определить $\gamma_\nu^* \equiv \gamma_\nu(g_*) = 2\epsilon/3$ точно (без поправок ϵ^2, ϵ^3 и т.д.). Критические размерности простых полей и времени выражаются через единственную аномальную размерность γ_ν^* и также определяются точно: $\Delta_\varphi = 1 - 2\epsilon/3$, $\Delta_{\varphi'} = d - 1 + 2\epsilon/3$, $\Delta_t = -\Delta_\omega = -2 + 2\epsilon/3$ [4, 7].

Под составным оператором $F(x)$ в дальнейшем понимается, как правило, локальный оператор, т.е. моном или полином, построенный из полей $\Phi = \varphi, \varphi'$ и их производных в одной точке $x = t, \mathbf{x}$. Из-за совпадения аргументов полей корреляционные функции с участием таких операторов содержат дополнительные УФ-расходимости, устраняемые дополнительной УФ-ренормировкой составных операторов. Операторы в общем случае ренормируются со смешиванием. Пусть $F_\alpha(x)$, $\alpha = 1, \dots, N$, – некоторый замкнутый

относительно ренормировки набор операторов. УФ-конечными являются корреляционные функции ренормированных операторов $F_\alpha^R(x) \equiv [F_\alpha(x)]_R$, связанных с исходным набором формулой матричной мультипликативной ренормировки

$$F_\alpha(x) = \sum_{\beta=1}^N Z_{\alpha\beta} F_\beta^R(x), \quad (8)$$

или в матричной форме $F = Z_F F^R$, где $Z_F = \{Z_{\alpha\beta}\} - N \times N$ -матрица констант ренормировки. По ней находятся матрица аномальных размерностей

$$\gamma_F = Z_F^{-1} \tilde{\mathcal{D}}_\mu Z_F \quad (9)$$

и матрица критических размерностей набора F_α [7]

$$\Delta_F = d_F^k + \Delta_\omega d_F^\omega + \gamma_F^* = d_F - \gamma_\nu^* d_F^\omega + \gamma_F^*. \quad (10)$$

Здесь d_F^k , d_F^ω , d_F – диагональные матрицы канонических размерностей операторов F_α (равных сумме соответствующих размерностей составляющих F полей и производных) и $\gamma_F^* \equiv \gamma_F(g_*)$ – матрица (9) в неподвижной точке РГ.

Критические размерности семейства $\{F_\alpha\}$ суть собственные числа матрицы (10). Определенными критическими размерностями обладают некоторые конкретные линейные комбинации ренормированных операторов – “базисные” операторы

$$F_\alpha^{\text{bas}} = \sum_{\beta=1}^N U_{\alpha\beta} F_\beta^R, \quad (11)$$

где матрица $U_F = \{U_{\alpha\beta}\}$ такова, что $\Delta'_F = U_F \Delta_F U_F^{-1} + m \partial_m U_F \cdot U_F^{-1}$ диагональна.

Пусть полный набор $\{F_\alpha\}$ разбит на два независимых поднабора $\{F_\beta\}$ и $\{F_\gamma\}$ таким образом, что любой оператор F_γ не примешивается к любому F_β . Тогда матрица Z_F является блочно-треугольной ($Z_{\beta\gamma} = 0$) и таковы же Δ_F и U_F . Следовательно, размерности $(\Delta')_\beta$ и соответствующие F_β^{bas} полностью определяются блоком $Z_{\beta\beta'}$, тогда как блок $Z_{\gamma\gamma'}$ определяет размерности $(\Delta')_\gamma$, но не операторы F_γ^{bas} (последние содержат примесь F_β , определяемую элементами $U_{\gamma\beta}$).

В дальнейшем будут рассматриваться галилеево-инвариантные скалярные операторы канонической размерности $d_F \leq 8$. Такой набор замкнут относительно ренормировки: тензорные операторы не примешиваются к скалярным, неинвариантные – к инвариантным [12], “старшие” с большим d_F – к “младшим”. Особую роль будут играть критические размерности операторов с ненулевым средним $\langle F \rangle$. Это позволяет, в частности, исключить из рассмотрения операторы–производные типа ∂F (поскольку $\langle \partial F \rangle = \partial \langle F \rangle = 0$ в силу трансляционной инвариантности), а также все операторы, содержащие хотя бы одно поле φ' (их средние исчезают из-за наличия в соответствующих диаграммах Фейнмана замкнутых циклов запаздывающих линий, ср. [7]). Нетривиальные (не сводящиеся к производным) операторы не примешиваются к операторам–производным, операторы без φ' не примешиваются к операторам с φ' (циклы). Таким образом, они являются “операторами типа F_β ” (см. выше), и, если интересоваться лишь критическими размерностями, их можно не рассматривать. Также при анализе операторов с $d_F = 8$ можно игнорировать “младшие” с $d_F = 4, 6$, при этом вычисления можно проводить прямо в “безмассовой теории” с $m = 0$ в (3) с использованием

известных формальных правил размерной регуляризации и схемы MS [14]. Это позволяет найти критические размерности нужных операторов, а соответствующие базисные операторы типа (11) построить с точностью до “вкладов типа F_β ”. Для исследования интересующей нас ИК-асимптотики парного коррелятора этого достаточно.

3. ПРОБЛЕМА АСИМПТОТИКИ $m \rightarrow 0$. “ОПАСНЫЕ” ОПЕРАТОРЫ

Пусть $G(k)$ – одновременный парный коррелятор поля скорости в импульсном представлении, т.е.

$$\langle \varphi_i(t, \mathbf{x}) \varphi_j(t, \mathbf{x}') \rangle = (2\pi)^{-d} \int d\mathbf{k} P_{ij}(\mathbf{k}) G(k) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}. \quad (12)$$

Уравнения РГ позволяют получить для него следующее асимптотическое представление в ИК-области $m, k \ll \Lambda$, где Λ – обратный внутренний масштаб турбулентности (диссипационная длина):

$$G(k) = D_0^{2/3} k^{-d+2\Delta_\varphi} \xi(m/k), \quad (13)$$

причем $D_0 = \text{const}$ при $0 < \epsilon < 2$ и $D_0 \simeq m^{2\epsilon-4}$ при $\epsilon > 2$ [3]. Инерционному интервалу отвечает дополнительное условие $u \equiv m/k \ll 1$. Асимптотика скейлинговой функции $\xi(u)$ при $u \rightarrow 0$ находится с помощью операторного разложения Вильсона и имеет вид (см. [3])

$$\xi(u) = \sum_F C_F(u^2) u^{\Delta_F} \quad (14)$$

с аналитическими по u^2 коэффициентами C_F . Суммирование в (14) идет по всем совместным с симметрией задачи (точнее см. ниже) ренормированным локальным составным операторам, Δ_F – их критические размерности. В силу (10) $\Delta_F = d_F + O(\epsilon)$, поэтому при асимптотически малых ϵ нетривиальные операторы с $d_F, \Delta_F > 0$ определяют лишь исчезающие при $u \rightarrow 0$ ИК-поправки к главному члену, порождаемому простейшим оператором $\Delta_F = 0$. С ростом ϵ в теории появляются “опасные” операторы с $\Delta_F < 0$, порождающие в (14) сингулярности при $u \rightarrow 0$.

В разложение (14) для одновременного коррелятора дают вклад только галилеево-инвариантные скалярные операторы с ненулевым средним. Подчеркнем, что под галилеевой инвариантностью здесь понимается инвариантность относительно преобразований с произвольно зависящим от времени параметром [4, 8], накладывающих более жесткие ограничения. Инвариантными в этом смысле являются лишь операторы, построенные из инвариантных сомножителей $\partial_i \varphi_k$ и φ'_i и их ковариантных производных ∂_k и $\mathcal{D}_t \equiv \partial_t + (\varphi \partial)$. Операторы с участием φ' и производные вида ∂F имеют нулевое среднее и не дают вклада в (14).

Для малых d_F таких операторов сравнительно немного: нужных операторов с $d_F = 2$ не существует, для $d_F = 4$ есть лишь один (с точностью до добавок вида ∂F) оператор скорости локальной диссипации энергии [1]

$$E(x) = \nu_0 (\partial_i \varphi_j + \partial_j \varphi_i)^2 / 2 \quad (15)$$

с точно известной размерностью $\Delta_E = 4 - 2\epsilon$ [7, 8], для $d_F = 6$ – два независимых монома вида

$$\partial_i \varphi_s \cdot \partial_i \varphi_j \cdot \partial_s \varphi_j, \quad \Delta \varphi_i \cdot \Delta \varphi_i \quad (16)$$

с размерностями $\Delta_1 = 6 - 2\epsilon$ (точный ответ), $\Delta_2 = 6 - 8\epsilon/7 + O(\epsilon^2)$ (однопетлевое приближение для $d = 3$), см. [10].

При $0 < \epsilon < 2$ опасных среди операторов (15), (16) нет, что подтверждает в этой области первую гипотезу Колмогорова (конечность при $m \rightarrow 0$). При переходе через границу $\epsilon = 2$ физической области $\epsilon > 2$ оператор диссипации (15) становится опасным ($\Delta_E = 4 - 2\epsilon < 0$). Если предположить, что в некотором интервале $\epsilon \geq 2$ вблизи границы $\epsilon = 2$ других опасных операторов нет (для операторов (16) это так), то именно $E(x)$ будет определять главный член асимптотики (14) при $m \rightarrow 0$.

В работе [3] высказывалось предположение, что при $\epsilon = 2$ вместе с $E(x)$ становятся опасными и все его степени, суммирование их вкладов в (14) могло бы привести к обоснованию первой гипотезы и при $\epsilon \geq 2$. Так, в частности, будет, если для их размерностей выполняется точное соотношение [13]

$$\Delta[E^n] = n\Delta[E] = n(4 - 2\epsilon), \quad (17)$$

как это имеет место для степеней самого поля φ [3, 9].

Попытка доказательства соотношения (17) предпринималась в работе [13]. Однако в используемых в [13] уравнениях движения для операторов $E^n(x)$ не учитываются вклады случайной силы, что приводит к потере части диаграмм теории возмущений (на эту ошибку указывалось в последующей работе [14]). Кроме того, в [13] вообще не обсуждалась возможность смешивания операторов при ренормировке. Поэтому доказательство [13] нельзя считать удовлетворительным, а равенство (17) – доказанным.

4. РЕНОРМИРОВКА ОПЕРАТОРОВ $\partial\varphi \cdot \partial\varphi \cdot \partial\varphi \cdot \partial\varphi$

В отличие от систем составных операторов с $d_F \leq 6$, семейство с $d_F = 8$ весьма многочисленно (даже при учете дополнительного условия галилеевой инвариантности). Расчет соответствующих матриц Z_F и U_F в соотношениях (8) и (11) уже в простейшем однопетлевом приближении требует большого объема чрезвычайно громоздких вычислений. Однако особого смысла в такой работе и нет, поскольку большая величина реального значения $\epsilon \geq 2$ не позволяет рассчитывать на надежные количественные результаты в низших порядках ϵ -разложения. Поэтому практическую ценность имеют лишь точные результаты типа полученных в [4, 7, 8] или гипотетического равенства (17).

Точное значение $\Delta_E = 4 - 2\epsilon$ критической размерности оператора диссипации (15) является следствием его УФ-конечности [7, 8]. Если оператор $E^2(x)$ также является УФ-конечным, то он автоматически будет оператором типа (11) с определенной, и притом точно известной, критической размерностью $2\Delta_E$ в согласии с (17).

Для проверки конечности оператора $E^2(x)$ рассмотрим поднабор инвариантных скаляров с $d_F = 8$, имеющих вид $\partial\varphi \cdot \partial\varphi \cdot \partial\varphi \cdot \partial\varphi$. Все они получаются из тензора

$$F_{mnpq}^{ijkl} = \partial_i \varphi_m \partial_j \varphi_n \partial_k \varphi_p \partial_l \varphi_q \quad (18)$$

путем всевозможных сверток по векторным индексам:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_{lijk}^{ijkl}, & F_2 &= F_{jilk}^{ijkl}, & F_3 &= F_{jjll}^{iikk}, & F_4 &= F_{jill}^{jjkk}, \\ F_5 &= F_{jkll}^{iijk}, & F_6 &= F_{klkl}^{iijj}, & F_7 &= F_{jklk}^{iijj}. \end{aligned} \quad (19)$$

Независимых (с точностью до вкладов производных) среди них шесть, поскольку, как легко проверить, $3F_2 - 6F_1 = \partial_i \{ -6\varphi_k F_{spi}^{ksp} + 3\varphi_k F_{pis}^{skp} + 2\varphi_i F_{kps}^{skp} \}$, где обозначения аналогичны (18).

Для дальнейшего удобно ввести две линейные комбинации мономов (19) вида

$$\overline{F}_{11} = F_2 + F_3 + 2F_4, \quad \overline{F}_2 = F_1 + F_5 + F_6 + F_7. \quad (20)$$

Они выделены тем, что в однопетлевом приближении мономы (19) примешиваются к операторам (20) в тех же линейных комбинациях $\overline{F}_\alpha$, т.е. формулы ренормировки (8) для них принимают вид

$$\overline{F}_\alpha = \sum_{\beta=1,2} \overline{Z}_{\alpha\beta} [\overline{F}_\beta]_R + \dots \quad (\alpha = 1, 2), \quad (21)$$

где многоточие обозначает вклады операторов, не имеющих вида $(\partial\varphi)^4$ (это вытекает из специфических свойств симметрии однопетлевых диаграмм, которые, по-видимому, не сохраняются при переходе к старшим порядкам). Для УФ-конечности оператора $E^2(x) = \nu_0^2 \overline{F}_1(x)$ необходимо выполнение условий

$$\overline{Z}_{11} = Z_\nu^{-2}, \quad \overline{Z}_{12} = 0, \quad (22)$$

где в однопетлевом приближении $Z_\nu = 1 - ag/2\epsilon$ с a из (7). Мы не будем обсуждать детали довольно громоздких вычислений (примеры подобных расчетов для $d_F = 6$ см. в [10]) и приведем лишь результат (однопетлевое приближение)

$$\overline{Z}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{g}{4\epsilon} \cdot \frac{1}{d(d+2)(d+4)(d+6)} a_{\alpha\beta} + O(g^2), \quad (23)$$

где обозначено:

$$\begin{aligned} a_{11} &= d^4 + 9d^3 - 14d^2 - 48d + 144, & a_{12} &= 2d(2d^2 + 3d + 6), \\ a_{21} &= 4(2d^3 + 15d^2 + 84d + 36), & a_{22} &= 2(d^4 + 6d^3 - 29d^2 - 54d). \end{aligned} \quad (24)$$

Из сравнения (23), (24) с (22) ясно, что оператор $E^2(x)$ в отличие от самого $E(x)$ не является УФ-конечным и, более того, не является оператором типа (11) с определенной критической размерностью из-за примеси $\overline{F}_2$ (и, возможно, других операторов, не имеющих вида $(\partial\varphi)^4$).

Результат (23) не позволяет, однако, найти критические размерности, связанные с мономами (19), поскольку для этого необходимо учесть их смешивание с остальными операторами семейства $d_F = 8$. В следующем разделе мы явно построим три оператора с $d_F = 8$, обладающие определенными (и притом точно известными) критическими размерностями.

5. УРАВНЕНИЯ ШВИНГЕРА. ТОЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ $d_F = 8$

Точные результаты для критических размерностей некоторых составных операторов можно получить с помощью уравнений Швингера для соответствующих производящих функционалов, см. работы [7, 8, 10]. Производящий функционал связанных корреляционных функций составного оператора $F(x)$ и любого числа полей $\Phi = \varphi, \varphi'$ в ренормированной теории имеет вид

$$\langle F \rangle_A = \frac{\int D\Phi F(x) e^{S_R(\Phi) + A\Phi}}{\int D\Phi e^{S_R(\Phi) + A\Phi}}, \quad (25)$$

где S_R – ренормированное действие (6), $A \equiv A_\varphi, A_{\varphi'}$ – источники полей $\Phi = \varphi, \varphi'$ и обозначено

$$A\Phi = \int dx \{ A_\varphi(x) \varphi(x) + A_{\varphi'}(x) \varphi'(x) \}. \quad (26)$$

Уравнения Швингера в широком смысле слова суть утверждения о равенстве нулю функционального интеграла от полной вариационной производной по переменной интегрирования, см., например, [16]. В данном случае рассмотрим равенство вида

$$0 = \int D\Phi \frac{\delta}{\delta \varphi'_i(x)} \{F(x) e^{S_R + A\Phi}\}, \quad (27)$$

где $F(x)$ – некоторый локальный оператор, не содержащий поля φ' . В обозначениях (25) равенство (27) можно переписать в виде

$$\langle F(x) V_i(x) \rangle_A = -A_{\varphi'}(x) \langle F(x) \rangle_A, \quad (28)$$

где

$$V_i \equiv \frac{\delta S_R(\Phi)}{\delta \varphi'_i(x)} = (D^f \varphi')_i - \mathcal{D}_t \varphi_i + \nu Z_\nu \Delta \varphi_i - \partial_i p \quad (29)$$

и $p(x)$ – нелокальный оператор, имеющий смысл давления,

$$p(x) = -\Delta^{-1} \partial_i \varphi_k \cdot \partial_k \varphi_i, \quad (30)$$

где Δ^{-1} – функция Грина оператора Лапласа. Этот вклад возникает в (29) при сворачивании с поперечным проектором результата формального дифференцирования по φ' , необходимого в силу поперечности φ' .

Если $F(x)$ – некоторый УФ-конечный оператор типа (11) с определенной критической размерностью Δ_F , то такими же свойствами обладает функционал в правой части равенства (28) и, следовательно, оператор под знаком $\langle \dots \rangle_A$ в его левой части, т.е. это УФ-конечный составной оператор с определенной, и притом известной, размерностью $\Delta_F + \Delta[A_{\varphi'}]$. Размерность источника $\Delta[A_{\varphi'}] = 3 - 4\epsilon/3$ определяется требованием критической безразмерности формы (26) и связана с $\Delta_{\varphi'}$ “теневым” соотношением $\Delta_{\varphi'} + \Delta[A_{\varphi'}] - d + \Delta_t = 0$.

Выбирая в качестве F в (28) векторный оператор с $d_F = 5$ и сворачивая его по векторному индексу с множителем V_i , получаем скалярный оператор из интересующего нас семейства $d_F = 8$. Используя результаты работ [7–12], можно показать, что с мономами $\varphi_i \varphi^4$ и $\varphi_i E$, где E – оператор (15), связаны базисные операторы типа (11) с точно известными критическими размерностями $5 - 10\epsilon/3$ и $5 - 8\epsilon/3$, соответственно. Их подстановка в (28) порождает скалярные операторы с размерностями $8 - 14\epsilon/3$, $8 - 4\epsilon$. Однако они не являются галилеево-инвариантными и даже локальными (в частности, из-за вклада давления в V_i). Нам удалось найти три векторных оператора, которые при подстановке в (28) порождают в его правой части объекты нужного типа. Это моном $\Delta^2 \varphi_i$ с размерностью $4 + \Delta_\varphi = 5 - 2\epsilon$ и два базисных оператора, связанных с мономами

$$\Delta \mathcal{D}_t \varphi_i, \quad \partial_s \partial_m (\varphi_i \partial_s \varphi_m), \quad (31)$$

оба с размерностью $5 - 4\epsilon/3$. Первый из них извлекается из результатов работы [8] и имеет вид $[\Delta \mathcal{D}_t \varphi_i]^{\text{bas}} = \Delta[\mathcal{D}_t \varphi_i - \nu_0 \Delta \varphi_i]$, второй может быть построен с помощью соотношений [12], выражающих перестановочность галилеева преобразования и ренормировочной процедуры, и имеет вид $\partial_s \partial_m (\varphi_i \partial_s \varphi_m) + \text{const } \Delta^2 \varphi_i$, где константа должна вычисляться по теории возмущений.

Поясним причину исчезновения нелокальных и неинвариантных вкладов в произведении $F_i V_i$ в (28) на примере простейшего из них оператора $\Delta^2 \varphi_i$.

Вклад случайной силы имеет в этом случае вид

$$\Delta^2 \varphi_i (D^f \varphi')_i \equiv \Delta^2 \varphi_i(x) \int dy D_{ij}^f(x-y) \varphi'_j(y). \quad (32)$$

Он не ренормируется и не примешивается к другим операторам из-за присутствия в диаграммах замкнутых циклов запаздывающих линий (см. аналогичный пример в [7]) и поэтому может быть исключен из рассмотрения (формально – это УФ-конечный оператор с той же размерностью, что и у правой части (28), поэтому его можно перенести в правую часть (28) без изменения ее свойств).

В силу поперечности поля скорости вклад давления является полной производной:

$$\Delta^2 \varphi_i \cdot \partial_i p = \partial_i (\Delta^2 \varphi_i \cdot p). \quad (33)$$

Этот оператор не примешивается к входящим в $V_i F_i$ локальным вкладам (в соответствии с общими свойствами УФ-расходимостей УФ-контрчлены к локальным операторам всегда локальны), но и они не могут к нему примешиваться (нетривиальные операторы не примешиваются к производной). Поэтому вклад (33) также полностью отщепляется и может быть опущен. Вклад с $\mathcal{D}_t$ представляется в виде суммы инвариантного вклада и неинвариантной производной, которая по тем же причинам может не учитываться:

$$\Delta^2 \varphi_i \cdot \mathcal{D}_t \varphi_i = -\partial_s \Delta \varphi_i \cdot \partial_s \mathcal{D}_t \varphi_i + \partial_s (\partial_s \Delta \varphi_i \cdot \mathcal{D}_t \varphi_i). \quad (34)$$

Отметим, что оператор $\partial_s \mathcal{D}_t \varphi_i = \mathcal{D}_t \partial_s \varphi_i + \partial_s \varphi_k \partial_k \varphi_i$ инвариантен относительно преобразований Галилея с зависящим от времени параметром [4, 8], в отличие от самой ковариантной производной $\mathcal{D}_t \varphi_i$. Таким образом, искомый инвариантный локальный скаляр находится явно с точностью до возможной примеси локальных производных, не дающих вклада в асимптотику (14) и потому несущественных. Он имеет вид

$$\partial_s \Delta \varphi_i \cdot \partial_s \mathcal{D}_t \varphi_i + \nu Z_\nu \Delta^2 \varphi_i \cdot \Delta \varphi_i + \text{производные}. \quad (35)$$

Аналогично, хотя и несколько сложнее, доказываются нужные свойства операторов $F_i V_i$, построенных с помощью (28) по ассоциированным с мономами (31) векторным операторам. Вклад давления при этом не исчезает, но оказывается (с точностью до производных) локальным. Например,

$$\Delta \mathcal{D}_t \varphi_i \cdot \partial_i p \cong -\partial_i \mathcal{D}_t \varphi_i \cdot \Delta p = (\partial_i \varphi_k \cdot \partial_k \varphi_i)^2, \quad (36)$$

где $\cong$ обозначает равенство с точностью до производных и использованы соотношения

$$\Delta p = -\partial_i \mathcal{D}_t \varphi_i = -\partial_i \varphi_k \cdot \partial_k \varphi_i,$$

вытекающие из равенства (30) и поперечности φ_i .

Таким образом, использование уравнений Швингера позволяет доказать существование трех составных операторов нужного типа с точно известными критическими размерностями $8-2\epsilon$, $8-8\epsilon/3$, $8-8\epsilon/3$ и построить их явно (с точностью до несущественных вкладов производных). Они порождают в (14) расходящиеся при $m \rightarrow 0$ (“опасные”) вклады только при $\epsilon > 4$ (первый) и $\epsilon > 3$ (остальные). Скаляры с $d_F = 8$, которые становились бы опасными при $\epsilon = 2$ вместе с $E(x)$, не обнаружены. Конечно, существование таких операторов нельзя полностью исключить, но с учетом изложенных выше соображений оно маловероятно.

С другой стороны, аргументы [17] указывают, что таких операторов должно быть бесконечно много, хотя их размерности не обязательно имеют простой вид (17) и они могут появиться, в принципе, лишь в семействах с очень большими d_F . Таким образом, вопрос исследования асимптотики $m \rightarrow 0$ и обоснования первой гипотезы Колмогорова в рамках метода РГ и операторного разложения остается открытым.

Авторы выражают признательность Л.Ц. Аджемяну за внимание к работе и полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 93-02-14515), а также Международного научного фонда (ISF) и Правительства Российской Федерации (грант R 63300).

Н.В. Антонов получал финансовую поддержку Ассоциации INTAS в рамках исследовательской программы Международного центра фундаментальной физики в Москве (грант INTAS № 93-2492).

Список литературы

- [1] Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Т.2. М.: Наука, 1967.
- [2] McComb W.D. The Physics of Fluid Turbulence. Oxford: Clarendon, 1990.
- [3] Аджемян Л.Ц., Антонов Н.В., Васильев А.Н. // ЖЭТФ. 1989. Т. 95. Вып.4. С. 1272–1288.
- [4] De Dominicis C., Martin P.C. // Phys.Rev. 1979. V. A29. №1. P. 419–422.
- [5] Antonia R.A., Satyaprakash B.R., Hussain A. // J. Fluid Mech. 1982. V. 119. №1. P. 55–89; Anselmet F., Gagne Y., Hopfinger E., Antonia R.A. // J. Fluid Mech. 1984. V. 140. №1. P. 63–89; Antonia R.A., Hopfinger E., Gagne Y., Anselmet F. // Phys.Rev. 1984. V. A30. №5. P. 2704–2707.
- [6] Кузнецов В.Р., Сабельников В.А. Турбулентность и горение. М.: Наука, 1986; Кузнецов В.Р., Прасковский А.А., Сабельников В.А. // Изв. АН СССР. Сер.МЖГ. 1988. №6. С. 51–59.
- [7] Аджемян Л.Ц., Васильев А.Н., Письмак Ю.М. // ТМФ. 1983. V. 57. №2. P. 268–281.
- [8] Аджемян Л.Ц., Васильев А.Н., Гнатич М. // ТМФ. 1988. Т. 74. №2. С. 180–191.
- [9] Антонов Н.В. // Зап.научн.сем. ЛОМИ. 1988. Т. 169. С. 18–28.
- [10] Аджемян Л.Ц., Антонов Н.В., Ким Т.Л. // ТМФ. 1994. Т. 100. №3. С. 382–401.
- [11] Антонов Н.В. // Зап.научн.сем. ЛОМИ. 1991. Т. 189. С. 15–23.
- [12] Антонов Н.В. // Вестник СПбУ. Сер.Физ., Хим. 1992. Вып.3 (№18). С. 3–9; Вып.4 (№25). С. 6–11.
- [13] Yakhot V., She Z.-S., Orszag S.A. // Phys.Fluids. 1989. V. A1(2). P. 289–293.
- [14] Коллинз Дж. Перенормировка. М.: Мир, 1988.
- [15] Yakhot V., Smith L.M. // J. Sci. Comp. 1992. V. 7. №1. P. 35–60.
- [16] Васильев А.Н. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1976.
- [17] Аджемян Л.Ц., Антонов Н.В., Васильев А.Н., Перекалин М.М. // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1995. V. 224; Антонов Н.В., Васильев А.Н. Ренормализационная группа в теории развитой турбулентности. Проблема обоснования гипотез Колмогорова для составных операторов. (Направлено в ЖЭТФ.)

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступила в редакцию
20.III.1995 г.

N.V. Antonov, S.V. Borisenok, V.I. Girina RENORMALIZATION GROUP IN THE THEORY OF FULLY DEVELOPED TURBULENCE. COMPOSITE OPERATORS OF CANONICAL DIMENSION EIGHT

Within the framework of renormalization group approach to the stochastic theory of fully developed turbulence we consider renormalization and critical dimensions of the family of Galilean invariant scalar composite operators of canonical dimension eight.