Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. А. Тагиров, Общековариантная квантовая механика в римановом пространстве-времени III. Дираковская частица, *ТМФ*, 1996, том 106, номер 1, 122–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1102>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 10:25:55

Э.А. Тагиров

ОБЩЕКОВАРИАНТНАЯ КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ III. ДИРАКОВСКАЯ ЧАСТИЦА

Для дираковской частицы в общем римановом пространстве-времени в нормальной геодезической системе отсчета построен общековариантный аналог обычной нерелятивистской квантовой механики с релятивистскими поправками. Не только уравнение Паули с эрмитовым гамильтонианом и предгильбертова структура его решений, но и матричные элементы эрмитовых операторов импульса, (криволинейных) пространственных координат и спина выведены как общековариантная асимптотика по c^{-2} (c – скорость света) их естественных общерелятивистских прообразов. Показано, что гамильтониан уравнения Паули, порожденный уравнением Дирака, унитарно эквивалентен оператору энергии, порожденному тензором энергии-импульса общерелятивистской теории спинорного поля. Кратко обсуждаются коммутационные и иные свойства наблюдаемых, связанные с рассматриваемым изменением геометрического фона.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе аналог стандартной нерелятивистской квантовой механики в общем римановом пространстве V_4 , построенный в работах [1, 2] для бесспиновой частицы, развивается для случая частицы спина $1/2$, описываемой в (общей) релятивистской квантовой теории уравнением Дирака. Библиографию работ, имеющих отношение к проблеме построения квантовой механики в V_4 и опубликованных до 1985 г., можно найти в монографии [3]. Однако в них, как правило, рассматриваются частные случаи V_4 и не придается должного значения главной для квантовой механики проблеме наблюдаемых.

Подход, принятый в [1, 2], основан на асимптотическом переходе по c^{-2} (c – скорость света) в общерелятивистских уравнениях поля в V_4 и в инвариантных квадратичных формах по этому полю в виде интегралов по пространственноподобным гиперповерхностям. Этот переход совершается в общековариантной форме путем введения нормальной геодезической системы отсчета, т.е. единичного градиентного времениподобного геодезического векторного поля, определяемого нормальными некоторой конкретной пространственноподобной гиперповерхности. Каждой такой системе отсчета, конечно, соответствует некоторая нормальная система координат, однако описание в терминах системы отсчета позволяет единообразно в произвольных координатах учесть геометрию пространства-времени при формулировании теории и при рассмотрении конкретных физических систем, что представляет собой не только техническое удобство, но и играет важную эвристическую роль. Она особенно проявляется в той наиболее существенной

части предлагаемого исследования, которая касается построения квантово-механических операторов наблюдаемых. Мы не вводим их “руками” по аналогии со случаем отсутствия внешней гравитации, как это делается, например, в [3, 4], а получаем путем перехода к асимптотике по c^{-2} в выражениях для импульса, “средней координаты кванта поля” и спина в общерелятивистской теории рассматриваемого (т.е. здесь дираковского) поля. Таким образом, мы рассматриваем квантовую механику не как результат квантования классической механики, а как асимптотику по c^{-2} теории более высокого уровня, что, очевидно, более соответствует реальной физической картине мира.

Структура нерелятивистской квантовой механики, допускающая борновскую вероятностную интерпретацию решений асимптотических уравнений Шредингера и Паули, воспроизводится при этом в сколь угодно высоком порядке по c^{-2} , но с точки зрения учета внешней гравитации интерес представляют, конечно, первые не исчезающие поправки. В частности, мы приходим к квантово-механическим операторам (криволинейных) координат, импульса и спина, для которых коммутационные соотношения аналогичны стандартным только в пределе $c^{-1} = 0$, т.е. при учете релятивистских поправок возникает деформация стандартных соотношений Гейзенберга. Некоторые аспекты этого вопроса кратко обсуждаются в [5], но в целом он еще ожидает исследования.

К мотивации интереса к рассматриваемой проблеме, приведенной в работах [1–3], необходимо добавить еще следующее. Проблема квантования физических полей в V_4 , получившая значительное развитие начиная с работ [6, 7], обычно связана с построением систем квазиодночастичных волновых функций в пространственно-временных многообразиях с достаточно высокой симметрией, таких как пространства Шварцшильда или Робертсона–Уокера. При этом, можно сказать, используются нормальные системы отсчета, жестко связанные с симметрией, т.е. весьма ограниченный класс привилегированных систем отсчета. На самом же деле даже в пространстве-времени Минковского M_4 случаев общего положения являются системы отсчета, не связанные жестко с группой Пуанкаре. (Формулировке стандартной нерелятивистской квантовой механики неинерциальных системы отсчета в M_4 посвящена большая работа [8].)

Наконец, хотя взаимодействие квантовых систем с постньютоновской гравитацией принято считать не представляющим физического интереса из-за его слабости, за исключением процессов в ранней космологии и, возможно, вблизи черных дыр, такое мнение, по-видимому, не вполне точно. Кривизна пространства-времени, пренебрежимо малая с точки зрения одной системы отсчета, может оказаться вполне ощутимой для квантовой системы (например, для атома водорода), для которой собственной является система отсчета, ультрарелятивистская по отношению к первой. Автор предполагает рассмотреть примеры такого рода в последующих работах.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 после сводки основных обозначений представлена исходная структура в пространстве биспинорных полей в V_4 , и на этой основе вводится общая процедура построения эрмитовых билинейных функционалов, рассматриваемых как общерелятивистские прообразы матричных элементов квантово-механических операторов наблюдаемых величин.

В разделе 3 осуществлен переход от уравнения Дирака к уравнению Паули для двухкомпонентных спиноров, в пространстве решений которого естественным образом индуцируется стандартная предгильбертова структура, что в сочетании с эрмитовостью гамильтониана по этой структуре служит основанием для борновской вероятностной интерпретации этих решений. При этом возникает нормальная гамильтонова система отсчета, выбором которой осуществляется $1 + 3$ -разбиение V_4 и определяется вид га-

мильтониана и других объектов теории.

В разделе 4 получено асимптотическое представление билинейного функционала, являющегося прообразом матричного элемента проекции импульса на заданное векторное поле. Отсюда получается выражение для квантово-механических операторов энергии и импульса в любом приближении по c^{-2} в виде 2×2 -матрицы, элементы которой являются “пространственными” дифференциальными операторами. Оператор энергии при этом унитарно-эквивалентен гамильтониану уравнения Паули в любом порядке по c^{-2} .

В разделах 5 и 6 таким же образом получены асимптотические выражения для операторов произвольных (криволинейных) координат и проекций спина на пространственноподобные тетрадные векторы. В заключительном разделе 7 кратко обсуждаются некоторые результаты и их возможное развитие и применение.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ИСХОДНАЯ ОБЩЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ СТРУКТУРА

Перечислим основные из используемых далее обозначений: $g_{\alpha\beta}(x)$, $x \in V_4$, $\alpha, \beta, \gamma, \dots = 0, 1, 2, 3$, – метрический тензор сигнатуры 2 рассматриваемого V_4 (пространственно-временные векторы и тензоры мы определяем через их компоненты, однако подчеркнем сразу, что *все локальные и интегральные физические величины будут здесь соответственно скалярами и инвариантами*, как и должно быть с наблюдательной точки зрения, поскольку по физическому смыслу они суть показания приборов, которые, конечно, не зависят от способа арифметизации пространства-времени); $h_{(\beta)}^\alpha(x)$ – *векторные поля ортонормированной тетрады*, обозначаемые индексами в скобках, которые поднимаются и опускаются свертыванием с $\eta_{(\alpha\beta)} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ (напомним, что $h_{(\beta)}^\alpha h_{(\gamma)}^\beta = \delta_\gamma^\alpha$, $h_{(\beta)}^{(\alpha)} h_{(\gamma)}^\beta = \delta_{(\gamma)}^{(\alpha)}$); пространственноподобные тетрадные векторы обозначаются латинскими индексами $i, j, k, \dots = 1, 2, 3$ (конечно, в скобках); два или более соседних тетрадных индекса будем заключать в пару общих скобок; например, $\varepsilon_{(ijk)}$ – полностью антисимметричный символ Леви-Чивита, $\varepsilon_{(123)} = 1$; по индексам в фигурных или квадратных скобках проводится соответственно симметризация или антисимметризация; $\gamma^{(\alpha)}$ и $\sigma^{(i)}$ – соответственно обычные матрицы Дирака и Паули; ∇_α – ковариантная производная, а $\tilde{\nabla}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_\alpha - (ie/\hbar c)A_\alpha(x)$, т.е. для полноты включено также взаимодействие с внешним электромагнитным полем; используется также краткое обозначение типа $\partial_{(\alpha)} \stackrel{\text{def}}{=} h_{(\alpha)}^\beta \partial_\beta$ для всех видов дифференцирования; $L^\alpha(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} A^\beta \nabla_\beta B^\alpha - B^\beta \nabla_\beta A^\alpha$ – производная Ли для векторных полей $A^\alpha(x)$ и $B^\alpha(x)$.

Наряду с использованием c^{-1} в качестве параметра асимптотики будем также пользоваться там, где это удобно, комптоновской полудлиной волны $\lambda = \hbar/2mc$.

Введем теперь исходную структуру в пространстве биспинорных полей $\Psi(x)$, $x \in V_4$, включающую:

1. Уравнение Дирака на $\Psi(x)$ с массой покоя кванта этого поля m :

$$i\gamma^\alpha(x)\tilde{\nabla}_\alpha\Psi + \frac{mc}{\hbar}\Psi = 0, \quad (1)$$

где биспинорная связность Γ_α в ковариантной производной $\tilde{\nabla}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\partial}_\alpha - \Gamma_\alpha$ определяется, как обычно, уравнением

$$\nabla_\alpha\gamma_\beta - \Gamma_\alpha\gamma_\beta + \gamma_\beta\Gamma_\alpha = 0.$$

2. Пространственноподобную гиперповерхность

$$\Sigma = \{x \in V_4, \Sigma(x) = \text{const}, \quad \partial^\alpha \Sigma \partial_\alpha \Sigma > 0\},$$

которая в этой работе предполагается полной в V_4 , хотя особый интерес, как и особую сложность, представляют именно случаи с горизонтом.

3. Сохраняющийся на решениях уравнения (1), т.е. не зависящий от выбора Σ , билинейный функционал (“скалярное произведение”)

$$\{\Psi_1, \Psi_2\}_\Sigma = \int_\Sigma d\sigma^\alpha(x) \bar{\Psi}_1 \gamma_\alpha(x) \Psi_2, \quad (2)$$

где $d\sigma^\alpha(x)$ есть нормальный элемент Σ , а $\bar{\Psi}$ – дираковское сопряжение Ψ .

4. Вещественный квадратичный по Ψ и линейный по векторному полю V^α локальный функционал

$$P_V(\Psi; \Sigma) = \int_\Sigma d\sigma^\alpha V^\beta T_{\alpha\beta}, \quad (3)$$

где $T_{\alpha\beta}$ – (метрический) тензор энергии-импульса поля Ψ . Если конкретное решение Ψ уравнения Дирака описывает в каком-либо смысле квантовое движение частицы, то этот функционал естественно рассматривать как *среднее значение проекции импульса частицы на векторное поле V^α* .

5. Три вещественных квадратичных локальных функционала

$$Q^A(\Psi; \Sigma) = \int_\Sigma d\sigma^\alpha q^A(x) \bar{\Psi} \gamma_\alpha \Psi, \quad A, B, \dots = 1, 2, 3, \quad (4)$$

где $q^A(x)$ – три скалярные функции, удовлетворяющие условиям

$$d\sigma^\alpha \partial_\alpha q^A = 0, \quad \text{rank } \|\partial_\alpha q^A\| = 3, \quad (5)$$

в силу чего они определяют точку на Σ . Результаты работы [2] и анализ, проведенный Полубариновым [9] для случая декартовых координат (в плоском пространстве-времени), дают основание для того, чтобы рассматривать $Q^A(\Psi; \Sigma)$ как *среднее значение (криволинейной) координаты частицы на Σ* в тех случаях, когда $\Psi(x)$ соответствует одночастичному состоянию.

6. Три вещественных квадратичных локальных функционала *средних проекций спина на пространственноподобные тетрадные векторы $h_{(i)}^\alpha$* :

$$S_{(i)}(\Psi; \Sigma) = \frac{\hbar}{4} \int_\Sigma d\sigma^\alpha \bar{\Psi}_1 (\gamma_\alpha \Sigma^{\beta\delta} + \Sigma^{\beta\delta} \gamma_\alpha) \varepsilon_{(ijk)} h_\beta^{(j)} h_\delta^{(k)} \Psi_2, \quad (6)$$

где $\Sigma^{\beta\delta} = (1/2)(\gamma^\beta \gamma^\delta - \gamma^\delta \gamma^\beta)$.

При переходе к асимптотике по c^{-2} (см. раздел 4), уравнение Дирака (1) естественно приведет к уравнению Паули для нерелятивистских спинорных волновых функций $\psi(x)$ с поправками по c^{-2} любого порядка, а “скалярное произведение” (2), вообще говоря знаконеопределенное, преобразуется в положительно-определенное “стандартное” скалярное произведение в пространстве этих волновых функций, т.е.

$$\{\Psi_1, \Psi_2\}_\Sigma = (\psi_1, \psi_2)_\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Sigma d\sigma(x) \psi_1^\dagger \psi_2 \quad (7)$$

в асимптотическом смысле (крестом обозначено эрмитово сопряжение).

Однако асимптотическое приближение функционалов $P_V(\Psi; \Sigma)$, $Q^A(\Psi; \Sigma)$ и $S_{(i)}(\Psi; \Sigma)$ определит при этом лишь диагональные матричные элементы соответствующих наблюдаемых. Для определения общерелятивистских прообразов недиагональных матричных элементов наблюдаемых воспользуемся тем фактом, что всякий вещественный по Ψ квадратичный функционал $Z(\Psi; \Sigma)$ единственным образом определяет эрмитов билинейный функционал $Z(\Psi_1, \Psi_2; \Sigma)$ через процедуру *поляризации*:

$$4Z(\Psi_1, \Psi_2; \Sigma) = Z(\Psi_1 + \Psi_2; \Sigma) - Z(\Psi_1 - \Psi_2; \Sigma) - iZ(\Psi_1 + i\Psi_2; \Sigma) + iZ(\Psi_1 - i\Psi_2; \Sigma). \quad (8)$$

Эрмитовость $Z(\Psi_1, \Psi_2; \Sigma)$ означает, что

$$Z(\Psi_1, \Psi_2; \Sigma) = \overline{Z(\Psi_2, \Psi_1; \Sigma)}. \quad (9)$$

Важно отметить, что сам функционал $Z(\Psi_1, \Psi_2; \Sigma)$, вообще говоря, не является матричным элементом какого-либо локального оператора по (обще)релятивистскому “скалярному произведению” $\{\cdot, \cdot\}_\Sigma$. Например, $P_V(\Psi_1, \Psi_2; \Sigma)$ – поляризация функционала $P_V(\Psi; \Sigma)$ – может быть представлен в виде такого матричного элемента только в случае, когда V^α – векторное поле Киллинга. Однако, если функционал $Z(\Psi_1, \Psi_2; \Sigma)$ локален и эрмитов, то, как мы увидим ниже, асимптотически он может быть представлен в виде матричного элемента по скалярному произведению $(\cdot, \cdot)_\Sigma$ некоторого эрмитова оператора $\hat{z}(x)$ в пространстве двухкомпонентных спиноров $\psi(x)$, т.е. будет иметь место асимптотическое соотношение

$$Z(\Psi_1, \Psi_2; \Sigma) = (\psi_1, \hat{z}(x)\psi_2)_\Sigma. \quad (10)$$

Эрмитово сопряжение $\hat{z}(x)$ определяется естественным образом:

$$(\psi_1, \hat{z}(x)^\dagger \psi_2)_\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{z}(x)\psi_1, \psi_2)_\Sigma. \quad (11)$$

3. УРАВНЕНИЕ ПАУЛИ В НОРМАЛЬНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА

Для перехода к асимптотическим по c^{-2} решениям общерелятивистских волновых уравнений в [1, 2] и в настоящей работе мы пользуемся обобщением метода, который для случая внешнего электромагнитного поля в M_4 был применен в работе [10]. Приведем сразу общее выражение для асимптотического решения уравнения Дирака (1), более последовательный вывод которого содержится в [9]:

$$\Psi(x) = \exp\left(-\frac{mc}{\hbar}S(x)\right) \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ -i\lambda G(x) \end{pmatrix} \cdot K(x)\psi(x) \quad (12)$$

($\mathbf{I}$ – единичная матрица 2×2), где спинор $\psi(x)$ в силу уравнения Дирака будет удовлетворять уравнению

$$i\hbar\tilde{T}\psi = K^{-1} \cdot \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\tilde{D} \cdot G \cdot K - i\hbar[\tilde{T}, K]\right) \psi \stackrel{\text{def}}{=} H\psi, \quad (13)$$

$$\tilde{T} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\tau^\alpha \tilde{\partial}_\alpha + \frac{1}{2} \nabla_\alpha \tau^\alpha \right) \cdot \mathbf{I} + \frac{i}{4} \Omega_\alpha^{(ij)} \varepsilon_{(ijk)} \sigma^{(k)} \tau^\alpha, \quad (14)$$

$$\tau_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} c \partial_\alpha S, \quad (15)$$

$$\Omega_\beta^{(\alpha\delta)} \stackrel{\text{def}}{=} h^{(\alpha)\mu} \nabla_\beta h_\mu^{(\delta)} \quad (\text{коэффициенты вращения Риччи}),$$

$$\tilde{D} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma^{(i)} \left(h_{(i)}^\alpha \tilde{\partial}_\alpha + \frac{1}{2} \nabla_\alpha h_{(i)}^\alpha \right) - \frac{i}{4} \Omega_\alpha^{(ij)} \varepsilon_{(ijk)} h^{(k)\alpha} \cdot \mathbf{I}, \quad (16)$$

при выполнении следующих условий и уравнений на вещественную функцию $S(x)$ и дифференциальные операторы $G(x)$ и $K(x)$ в пространстве спиноров ψ :

$$\partial_\alpha S \partial^\alpha S = 1 \quad (17)$$

(уравнение Гамильтона–Якоби для геодезических в V_4);

$$\tau^\alpha \partial_\alpha \arg(K\psi) = o(1) \quad (18)$$

(условие адиабатичности фазы предэкспоненциальной части Ψ);

$$G = \tilde{D} - \frac{i\lambda}{c} [\tilde{T}, G] + \lambda^2 G \cdot \tilde{D} \cdot G, \quad (19)$$

$$K^\dagger \cdot (\mathbf{I} + \lambda^2 G^\dagger \cdot G) \cdot K = \mathbf{I}, \quad (20)$$

причем с учетом уравнения (17) во всех соотношениях (13)–(16) принято, что

$$h_\alpha^{(0)} = \partial_\alpha S. \quad (21)$$

Важно отметить, что на решениях уравнения (13) асимптотические дифференциальные операторы $H, [\tilde{T}, \tilde{D}], G, K$ содержат только производные вдоль пространственноподобной гиперповерхности $S(x) = \text{const}$.

Уравнение (20), определяющее оператор $K(x)$ с точностью до умножения на унитарный оператор справа, обеспечивает удовлетворение равенства (7) при $\Sigma \equiv S = \{x \in V_4; S(x) = \text{const}\}$.

Таким образом, в пространстве решений уравнения (13), которое уместно называть *уравнением Паули* в V_4 , индуцируется естественное обобщение стандартной, вероятно интерпретируемой по Борну нормы волновых функций. При этом имеем

$$H = H^\dagger. \quad (22)$$

Отметим, что вместо уравнения (17) можно было бы наложить на $S(x)$ уравнение Гамильтона–Якоби для более сложной негеодезической гамильтоновой динамики или, иначе говоря, ввести негеодезическую нормальную систему отсчета; однако отклонения от геодезичности должны быть при этом не более $O(c^{-1})$. Гамильтониан H при этом, конечно, изменится.

Приведем теперь выражение для H с точностью до $O(c^{-2})$:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\tilde{D}^2 + \lambda^2 \tilde{D}^4 + \frac{i\hbar\lambda}{2c} [[\tilde{T}, \tilde{D}], \tilde{D}] + O(c^{-4}) \right), \quad (23)$$

причем

$$\begin{aligned}\tilde{D}^2 = & \left(\tilde{\Delta}_S + \frac{1}{4}R - \frac{1}{4}\nabla^\beta h^{(i)\alpha}\nabla_\alpha h_{(i)\beta} - \frac{1}{4}(\Omega_\alpha^{(ij)}\varepsilon_{(ijk)}h^{(k)\alpha})^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2c^2}\left(\tau^\alpha\nabla_\alpha\nabla_\beta\tau^\beta - \frac{1}{2}(\nabla_\alpha\tau^\alpha)^2\right)\right) \cdot \mathbf{I} + \\ & + i\sigma_{(k)}\varepsilon^{(ijk)}\left(\frac{ie}{\hbar c}F_{(ij)} - \nabla_{(i)}h_{(j)}^\beta\tilde{\partial}_\beta - \frac{1}{2}\partial_{(i)}\nabla_\beta h_{(j)}^\beta\right),\end{aligned}\quad (24)$$

где $\tilde{\Delta}_S$ – лапласиан на S , R – скалярная кривизна V_4 , $F^{(ij)}$ – проекция тензора электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$ на пространственные тетрадные векторы $h_{(i)}^\alpha$. Что касается слагаемого $[\tilde{T}, \tilde{D}]$, то после простых преобразований имеем

$$\begin{aligned}[\tilde{T}, \tilde{D}] = & \sigma_{(i)}\left((\nabla^{(i)}\tau^\alpha)\tilde{\partial}_\alpha + \frac{1}{2}\nabla_\alpha(\nabla^{(i)}\tau^\alpha) - \frac{ie}{\hbar}F_{(0i)} - \frac{1}{2}\nabla_{(j)}(\tau^\alpha\Omega_\alpha^{(ij)})\right) + \\ & + \frac{i}{2}\varepsilon_{(ijk)}\nabla_\alpha(h^{(k)[\alpha}\tau^{\mu]}\Omega_\mu^{(ij)}) \cdot \mathbf{I}.\end{aligned}\quad (25)$$

Возвращаясь к уравнению (19), заметим, что $[\tilde{T}, G] = 0$, если

$$[\tilde{T}, \tilde{D}] = 0. \quad (26)$$

Тогда G можно формально записать в замкнутом виде:

$$G = \frac{\lambda^{-2}}{2}\left(\mathbf{I} - (\mathbf{I} - 4\lambda^2\tilde{D}^2)^{\frac{1}{2}}\right)\tilde{D}^{-1}. \quad (27)$$

Из (24) можно увидеть, что равенство (26) имеет место, только когда удовлетворены следующие условия: $\nabla_\alpha\tau^\beta = 0$ (т.е. V_4 статическое), $\tau^\alpha F_{\alpha\beta} = 0$ (т.е. в системе отсчета τ^α электрическое поле отсутствует).

4. ОПЕРАТОР ИМПУЛЬСА И ЭНЕРГИИ

Для определения оператора проекции 4-импульса на заданное достаточно гладкое векторное поле $V^\alpha(x)$ в соответствии с процедурой, описанной в разделе 2, подставим (метрический) тензор энергии-импульса поля Ψ

$$T_{\mu\nu} = \frac{i\hbar}{2}(\overline{\Psi}\gamma_\nu\tilde{\nabla}_\mu\Psi - \overline{\tilde{\nabla}_\mu\Psi}\gamma_\nu\Psi) + \frac{i\hbar}{4}\nabla^\alpha(\overline{\Psi}\gamma_{[\nu}\gamma_\mu\gamma_{\alpha]}\Psi) \quad (28)$$

в соотношение (3). Предполагая, что Ψ удовлетворяет уравнению Дирака (1) и вычитая из подынтегральной части дивергенцию антисимметричного тензора, приходим к следующему выражению:

$$\begin{aligned}P_V(\Psi; \Sigma) = & i\hbar\int_\Sigma d\sigma^\nu\left(\overline{\Psi}\gamma_\nu\left(V^\mu\tilde{\nabla}_\mu + \frac{1}{2}\nabla_\mu V^\mu\right)\Psi + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4}\nabla^\alpha V^\beta\overline{\Psi}\gamma_{[\nu}\gamma_\alpha\gamma_{\beta]}\Psi - \frac{1}{2}\nabla_{\{\mu}V_{\nu\}}\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi\right).\end{aligned}\quad (29)$$

После поляризации $P_V(\Psi; \Sigma)$ и подстановки выражения (12) в $P_V(\Psi_1, \Psi_2; S)$ прямыми, но довольно длинными вычислениями из асимптотического соотношения

$$P_V(\Psi_1, \Psi_2; S) = (\psi_1, \hat{p}(x; V) \psi_2) \quad (30)$$

получим скалярный эрмитов оператор проекции импульса на заданное векторное поле V^α :

$$\begin{aligned} \hat{p}(x; V) = & K^\dagger \cdot \left(p_S(x; V) + \lambda^2 G^\dagger \cdot (p_S(x; V) - 2mc^2 V^{(0)}) \cdot G - \right. \\ & \left. - i\lambda^2 (p_T(x; V) \cdot G - G^\dagger \cdot p_T(x; V)) \right) \cdot K, \end{aligned} \quad (31)$$

где эрмитовы операторы $p_S(x; V)$, $p_T(x; V)$ определены следующими формулами:

$$p_T(x; V) \stackrel{\text{def}}{=} -i\hbar \left(V^{(0)} \tilde{D} + \frac{1}{2} \sigma^{(i)} \nabla_{(i)} V^{(0)} \right), \quad (32)$$

$$p_S(x; V) \stackrel{\text{def}}{=} i\hbar \left(\left(V_S^\alpha \tilde{\partial}_\alpha + \frac{1}{2} \nabla_\alpha V_S^\alpha \right) \cdot \mathbf{I} - \frac{i}{4} L^{(j)}(V_S, h^{(i)}) \varepsilon_{(ijk)} \sigma^{(k)} \right), \quad (33)$$

причем

$$V_S^\alpha(x) \stackrel{\text{def}}{=} h_{(i)}^\alpha h_\beta^{(i)} V^\beta, \quad (34)$$

т.е. это проекция V^α на гиперповерхность S .

Ввиду громоздкости выражения (30) в сочетании с (31), (32) рассмотрим два важных частных выбора векторного поля $V^\alpha(x)$: когда поле $V^\alpha(x)$ касательно к S , т.е. $V^\alpha = V_S^\alpha$ и соответственно $V^{(0)} = 0$ и когда $V^\alpha = c^{-1} \tau^\alpha$, т.е. $V_S^\alpha = 0$.

В первом случае с учетом (18) и (20) получаем

$$\hat{p}(x; V)|_{V=V_S} = K^\dagger \cdot (p_S(x; V) - \lambda^2 G^\dagger \cdot p_S(x; V) \cdot G) \cdot K = \quad (35)$$

$$= p_S(x; V) + \lambda^2 [\tilde{D}, [\tilde{D}, p_S(x; V)]] + O(c^{-4}). \quad (36)$$

Рассмотрим коммутационные свойства полученного оператора. Когда два векторных поля $V^\alpha(x)$ и $W^\beta(x)$ касательны к S , имеем

$$\begin{aligned} [\hat{p}_S(x; V), \hat{p}_S(x; W)] = & K^\dagger \cdot (\mathbf{I} + \lambda^2 G^\dagger \cdot G)^{-1} \cdot ([p_S(x; V), p_S(x; W)] + \\ & + \lambda^2 [G^\dagger \cdot G, p_S(x; V - W)] \cdot \lambda^2 G^\dagger \cdot G) \cdot K = \end{aligned} \quad (37)$$

$$= [p_S(x; V), p_S(x; W)] + O(c^{-2}). \quad (38)$$

Мы не будем выписывать довольно длинное явное выражение для $[p_S(x; V), p_S(x; W)]$, но отметим, что этот коммутатор равен нулю, если

$$L(V, W) = 0, \quad L(V, h^{(i)}) = 0, \quad L(W, h^{(i)}) = 0, \quad V^\alpha W^\beta F_{\alpha\beta} = 0. \quad (39)$$

Эти условия означают, что поля $V^\alpha(x)$ и $W^\beta(x)$ образуют координатный базис на двумерном подмногообразии в S и что на этом подмногообразии тетрадные векторы можно выбрать постоянными (это, очевидно, ограничение на геометрию V_4), а электромагнитные силы отсутствуют. Легко видеть, что в таком случае $[\hat{p}_S(x; V), \hat{p}_S(x; W)] = 0$.

Отсюда следует вывод, что три независимых взаимно коммутирующих оператора пространственных проекций 4-импульса существуют в пространственно плоских пространствах Робертсона – Уокера.

Вопрос о том, являются ли условия (38) необходимыми для коммутативности $\hat{p}_S(x; V)$ и $\hat{p}_S(x; W)$, нуждается в дополнительном исследовании.

Пусть теперь $V^\alpha = c^{-1}\tau^\alpha$, т.е. $V^{(0)} = 1$, $V_S = 0$. После очевидных преобразований имеем

$$\hat{p}_{\tau/c} = -\frac{\hbar^2}{2mc} K^\dagger \cdot (\tilde{D} \cdot G - G^\dagger \cdot \tilde{D} + G^\dagger \cdot G) \cdot K. \quad (40)$$

Подставив выражение (18) для G в третье слагаемое правой части и используя уравнение (20), легко получить, что

$$c\hat{p}_{\tau/c} = H + K^{-1} \cdot ([i\hbar\tilde{T}, K] + \lambda^2 (\mathbf{I} + \lambda^2 G^\dagger \cdot G)^{-1} \cdot G^\dagger \cdot [i\hbar\tilde{T}, G] \cdot K) = H + O(c^{-2}). \quad (41)$$

Более того, поскольку оператор K определяется уравнением (20) с точностью до умножения справа на унитарный оператор, этот произвол может быть использован для того, чтобы равенство

$$c\hat{p}_{\tau/c} = H \quad (42)$$

(асимптотически) выполнялось *в любом порядке по c^{-2}* . Этот важный факт, свидетельствующий о внутренней согласованности рассматриваемого подхода, доказывается точно так же, как аналогичное утверждение для бесспинового случая в работе [2].

5. ОПЕРАТОР ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КООРДИНАТЫ

После поляризации квадратичного функционала $Q^A(\Psi; \Sigma)$, определенного формулой (4), и подстановки выражения (12) нетрудно получить, что

$$Q^A(\Psi_1, \Psi_2; \Sigma) = (\psi_1, \hat{q}^A(x)\psi_2), \quad (43)$$

где

$$\hat{q}^A(x) = K^\dagger \cdot \left(q^A(x)\mathbf{I} + \frac{\lambda^2}{2} G^\dagger \cdot q^A(x) \cdot G \right) \cdot K = \quad (44)$$

$$= q^A(x)\mathbf{I} + K^{-1} \cdot [q^A(x), K] + \lambda^2 K^\dagger \cdot G^\dagger \cdot [q^A(x), G] \cdot K. \quad (45)$$

Выбирая решение уравнения (20) так, что $K = K^\dagger = (\mathbf{I} + \lambda^2 G^\dagger \cdot G)^{-\frac{1}{2}}$, получим

$$\begin{aligned} \hat{q}^A(x) &= q^A(x)\mathbf{I} + \frac{\lambda^2}{2} [\tilde{D}, [\tilde{D}, q^A]] + O(c^{-4}) = q^A(x)\mathbf{I} - \\ &- \frac{\lambda^2}{2} (\partial^{(i)} \partial_{(i)} q^A + \sigma_{(k)} \varepsilon^{(ijk)} (\partial_{(i)} \partial_{(j)} q^A + \partial_{(j)} q^A \tilde{D}_{(i)})) + O(c^{-4}), \quad (46) \\ \tilde{D}_{(i)} &\stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\partial}_{(i)} + \frac{1}{2} \nabla_\alpha h_{(i)}^\alpha. \end{aligned}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае операторы $\hat{q}^1, \hat{q}^2, \hat{q}^3$ коммутируют лишь в пределе $c^{-1} = 0$, тогда как в бесспиновом случае они коммутируют с точностью до $O(c^{-4})$ (см. [2]).

Более детальное рассмотрение полученных операторов координаты для дираковской частицы и их сравнение с результатами иных подходов к их определению (когда такое сравнение возможно) будут представлены в отдельной работе. Напомним только (см. [2]), что в бесспиновом случае для декартовых координат известные операторы Ньютона–Вигнера совпадают с введенными нами, но взятыми в ином, не интерпретируемом по Борну представлении.

6. ОПЕРАТОРЫ ПРОЕКЦИИ СПИНА НА ВЕКТОРЫ ТЕТРАДЫ

По аналогии с операторами координаты, отправляясь от равенства (6), можно получить операторы $\hat{S}_{(i)}(x)$ проекций спина на пространственноподобные тетрадные векторы $h_{(i)}^\alpha$:

$$\hat{S}_{(i)}(x) = \frac{\hbar}{2}(\sigma_{(i)} \cdot \mathbf{I} + \lambda^2 G^\dagger \cdot \sigma_{(i)} \cdot G). \quad (47)$$

Снова в представлении, где $K = K^\dagger$, после простых вычислений имеем

$$\begin{aligned} \hat{S}^{(i)} &= \frac{\hbar}{2} K^\dagger \cdot \left(\sigma^{(i)} \mathbf{I} + \frac{\lambda}{2} G^\dagger \cdot \sigma^{(i)} \cdot G \right) \cdot K = \\ &= \frac{\hbar}{2} \left(\sigma^{(i)} \mathbf{I} + \frac{\lambda^2}{2} [\tilde{D}, [\tilde{D}, \sigma^{(i)}]] \right) + O(c^{-4}) = \\ &= \frac{\hbar}{2} \left(\sigma^{(i)} \mathbf{I} + \lambda^2 \left(2\sigma^{(i)} \tilde{D}^{(j)} \cdot \tilde{D}_{(j)} - \sigma^{(j)} (\tilde{D}^{(i)} \cdot \tilde{D}_{(j)} + \tilde{D}^{(j)} \cdot \tilde{D}_{(i)}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \varepsilon^{(ijk)} \left(2i\tilde{D}_{(j)} \cdot \tilde{D}_{(i)} + \frac{1}{4} \sigma_{(k)} \partial_{(j)} \Omega_\alpha^{(pr)} \varepsilon_{(prs)} h^{(s)\alpha} \right) \right) \right) + O(c^{-4}). \end{aligned} \quad (48)$$

Последняя формула отражает зависимость формального определения спина от внешнего поля и от характера движения и ориентации любого измеряющего устройства, если принимается во внимание релятивистское происхождение нерелятивистской квантовой механики.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, здесь представлен последовательный подход к получению в общем римановом пространстве-времени V_4 квантово-механического уравнения Паули и операторов наблюдаемых в представлении, в котором волновые функции имеют вероятностное толкование по Борну, а операторы наблюдаемых и гамильтониан уравнения Паули эрмитовы. По существу, это один из возможных видов квантования и, по-видимому, ранее не рассмотренный. Этот способ, примененный здесь для выделения нерелятивистского содержания общерелятивистской квантовой теории, может быть, по-видимому, использован также и для выделения ее квазиклассического содержания, т.е. асимптотики по $\hbar$.

Представленный здесь материал готов для полуклассического учета эйнштейновской гравитации в (криволинейном) координатном представлении в нулевом порядке по c^{-2} в нормальных геодезических (невращающихся свободно падающих) системах отсчета. Обобщение на другие гамильтоновы системы отсчета, которые, однако, в определенном смысле близки к рассмотренным, не представляется принципиально затруднительным.

Алгебраические свойства операторов $\hat{q}$, $\hat{p}$, $\hat{s}$ существенно отличаются от привычных в плоском пространстве, хотя принцип соответствия, конечно, удовлетворяется. При

этом, такое явление как “дрожание” (Zitterbewegung) координаты и спина электрона, толкуемое обычно как сугубо теоретический парадокс, приводит при наличии внешних полей, судя по работе [12], к реальным физическим эффектам.

Еще одна возможность приложений представленных здесь и в работах [1, 2] результатов состоит в том, чтобы использовать в асимптотическом смысле полную систему решений (12) уравнения Дирака или аналогичную систему для уравнения Клейна–Гордона для построения представления Фока в теории канонически квантованного поля Ψ . При этом возникает асимптотическая по c^{-2} общековариантная квантовая теория поля, в которой имеется корпускулярная интерпретация фоковских состояний через борновскую вероятностную интерпретацию волновых функций ψ .

Автор признателен М.И.Широкову и ныне покойному А.Б.Говоркову за дружественные обсуждения рассмотренных здесь вопросов.

Список литературы

- [1] Тагиров Э.А. // ТМФ. 1990. Т. 84. №3. С. 419–430.
- [2] Тагиров Э.А. // ТМФ. 1992. Т. 90. №3. С. 412–423.
- [3] Горбачевич А.К. Квантовая механика в общей теории относительности. Минск: Изд-во БГУ, 1985.
- [4] Хриплович И.Б. // ЖЭТФ. 1989. Т. 96. №3. С. 385–390.
- [5] Тагиров Э.А. // Сообщения ОИЯИ, Е2-94-477. 1994.
- [6] Chernikov N.A., Tagirov E.A. // Ann. Inst. Henri Poincaré. 1968. V. A9. №2. P. 109–141.
- [7] Parker L. // Phys. Rev. 1969. V. 183. №5. P. 1057–1067.
- [8] Schmutzer E., Plebanski J. // Fortsch. d. Physik. 1977. Bd. 25. S. 79.
- [9] Тагиров Э.А. // Сообщения ОИЯИ, Е2-94-323. 1994.
- [10] Полубаринов И.В. // Сообщения ОИЯИ, Р2-8371. 1974.
- [11] Stephani H. // Ann. d. Physik. 1965. Bd. 15. S. 12.
- [12] Barut A.O., Thacker W.D. // Phys. Rev. 1985. V. D31. P. 2079–2085.

Объединенный институт ядерных исследований
Лаборатория теоретической физики
им. Н.Н.Боголюбова

Поступила в редакцию
15.XII.1994 г.

Е.А. Tagirov

GENERAL-COVARIANT QUANTUM MECHANICS IN RIEMANNIAN SPACE-TIME III. DIRAC'S PARTICLE

A general covariant analog of the standard non-relativistic Quantum Mechanics with relativistic corrections in normal geodesic frames in the general Riemannian space-time is constructed for the Dirac particle. Not only the Pauli equation with hermitean hamiltonian and the pre-Hilbert structure of space of its solutions but also the matrix elements of hermitean operators of momentum, (curvilinear) spatial coordinates and spin of the particle are deduced as general-covariant asymptotic approximation in c^{-2} , c being the velocity of light, to their naturally determined general-relativistic pre-images. It is shown that the hamiltonian in the Pauli equation originated by the Dirac equation is unitary equivalent to the operator of energy, originated by the metric energy-momentum tensor of the spinor field. Commutation and other properties of the observables connected with the considered change of geometrical background of Quantum Mechanics are briefly discussed.