Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. П. Чубурин, Об уравнении Шредингера для плоской пленки с предельно периодической решеткой, *ТМФ*, 1996, том 106, номер 1, 133–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1103>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 04:59:39

Ю. П. Чубурин

ОБ УРАВНЕНИИ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ ПЛОСКОЙ ПЛЕНКИ С ПРЕДЕЛЬНО ПЕРИОДИЧЕСКОЙ РЕШЕТКОЙ

Для уравнения Шредингера с потенциалом, предельно периодическим по x_1, x_2 и убывающим при $|x_3| \rightarrow \infty$, строятся решения и описываются некоторые их свойства.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $V(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, — вещественная ограниченная функция (потенциал), периодическая по переменным x_j с периодами $T_j > 0$, $j = 1, 2$, и удовлетворяющая оценке

$$|V(x)| \leq C e^{-a|x_3|}, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (1)$$

где $C, a > 0$. Изучение оператора $H = -\Delta + V(x)$, действующего в $L^2(\mathbb{R}^3)$, сводится к изучению семейства операторов $H(k_{\parallel}) = -\Delta + V(x)$, определенных на блоховских по переменным x_1, x_2 функциях из $L^2(\Omega)$, где $\Omega = [0, T_1) \times [0, T_2) \times \mathbb{R}$; здесь

$$k_{\parallel} = (k_1, k_2) \in [-\pi/T_1, \pi/T_1) \times [-\pi/T_2, \pi/T_2) = \Omega^*$$

— (плоский) квазиимпульс. (Блоховской функцией по переменным x_1, x_2 называется функция, определенная на $\mathbb{R}^3$ и удовлетворяющая равенству

$$\psi(x_1 + n_1 T_1, x_2 + n_2 T_2, x_3) = \exp(i(k_1 n_1 T_1 + k_2 n_2 T_2)) \psi(x)$$

для всех $x \in \mathbb{R}^3$, $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$; а также сужение такой функции на Ω .) См. об этом [1, 2, 3].

В дальнейшем под H , $H(k_{\parallel})$ будет также пониматься соответствующее дифференциальное выражение. Через $\sigma(A)$ и $\sigma_{\text{ess}}(A)$ будем обозначать соответственно спектр и существенный спектр оператора A . Заметим, что $\sigma_{\text{ess}}(H(k_{\parallel})) = [k_{\parallel}^2, \infty)$ [2] и

$$\sigma(H) = \bigcup_{k_{\parallel} \in \Omega^*} \sigma(H(k_{\parallel}))$$

(см. [3, 2]). Следовательно, для любого $E \in \sigma(H) \cap (-\infty, 0)$ существует блоховское по x_1, x_2 решение уравнения Шредингера

$$H\psi = E\psi, \quad (2)$$

сужение которого на Ω принадлежит $L^2(\Omega)$ (и даже экспоненциально убывает при $|x_3| \rightarrow \infty$, см. ниже теорему 3). Далее, если $E > 0$, то для некоторого $k_{\parallel} \in \Omega^*$ имеем $E > k_{\parallel}^2$. Согласно [4, 5] для всех таких E за исключением, возможно, не более чем счетного множества точек $\mathcal{N}(k_{\parallel}) \subset (k_{\parallel}^2, \infty)$, не имеющего предельных точек в промежутке $[k_{\parallel}^2, \infty)$, существует ограниченное блоховское по x_1, x_2 решение уравнения (2), не стремящееся к нулю при $x_3 \rightarrow \pm\infty$ (последнее в силу того, что асимптотика решений представляет собой конечную сумму плоских волн). Итак, в силу вышесказанного, а также доказанной ниже леммы 5, для любого $E \in \sigma(H) \setminus \{0\}$ существует блоховское по x_1, x_2 решение уравнения (2), экспоненциально убывающее при $|x_3| \rightarrow \infty$, если $E < 0$, и ограниченное, если $E > 0$.

В настоящей работе речь пойдет о решениях уравнения (2) в случае предельно периодического по переменным x_1, x_2 и убывающего при $|x_3| \rightarrow \infty$ потенциала $V(x)$ (случай предельной периодичности по всем переменным см. в [6]). Заметим, что гамильтониан H можно рассматривать как оператор энергии электрона в плоской пленке с нарушенной (например, примесями) кристаллической структурой.

Будем говорить, что функция $V(x)$, определенная на $\mathbb{R}^3$, является предельно периодической по переменным x_1, x_2 , если существует последовательность периодических по x_1, x_2 непрерывных ограниченных функций $V_N(x)$, $N = 1, 2, \dots$, равномерно сходящаяся к $V(x)$. Подобно тому, как и в одномерном случае [7], можно доказать, что $V(x)$ является предельно периодической в том и только в том случае, если существует последовательность непрерывных ограниченных функций $W_N(x)$, $N = 1, 2, \dots$, периодических с периодами $T_j^{(N)} > 0$ по переменным x_j , $j = 1, 2$, таких, что

$$V(x) = \sum_{N=1}^{\infty} W_N(x), \quad (3)$$

причем ряд

$$\sum_{N=1}^{\infty} \|W_N\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$$

сходится и для всех N выполнено $T_j^{(N+1)}/T_j^{(N)} \in \mathbb{Z}$, $j = 1, 2$. При этом, если функции $V_N(x)$ удовлетворяют оценкам вида (1), то и $W_N(x)$ удовлетворяют оценкам того же вида. Заметим, что в данном случае $\lim_{|x_3| \rightarrow \infty} V(x) = 0$.

Наконец, заметим, что если $V(x)$ – предельно периодический потенциал по x_1, x_2 ,

$$H = -\Delta + V(x), \quad H_N = -\Delta + \sum_{n=1}^N W_n(x),$$

то $\sigma(H)$ состоит из пределов всевозможных сходящихся последовательностей чисел $\lambda_N \in \sigma(H_N)$, $N = 1, 2, \dots$, и только из них. Это легко следует из наличия сильной резольвентной сходимости H_N к H (см [8]). В дальнейшем полагаем

$$V_N(x) = \sum_{n=1}^N W_n(x).$$

Введем в случае $T_j = T_j^{(N)}$, $j = 1, 2$, обозначения $\Omega_N = \Omega$, $\Omega_N^* = \Omega^*$. Оператор $H_N(k_{\parallel}) = -\Delta + V_N(x)$, где $k_{\parallel} \in \Omega_N^*$, действующий в $L^2(\Omega_N)$, можно также рассматривать в пространстве $L^2(\Omega_{N+M})$, $M > 0$. Соответственно вместо $k_{\parallel}$ следует брать

$$\tilde{k}_{\parallel} = k_{\parallel} \bmod (2\pi/T_{N+M}^{(1)}, 2\pi/T_{N+M}^{(2)}).$$

Вектор $\tilde{k}_{\parallel}$ будем называть образом $k_{\parallel}$ в Ω_{N+M}^* .

Заметим, что сформулированные ниже теоремы 1, 2 аналогичны теоремам 1, 2 работы [6]. Приведем другие в какой-то мере близкие утверждения: для теоремы 1 это результат статьи [9], в которой доказано существование решения уравнения Шредингера с квазипериодическим потенциалом в минимальной точке спектра; а для теоремы 2 результат [10] о существовании для широкого класса потенциалов полиномиально ограниченных решений уравнения Шредингера для плотного подмножества точек спектра.

2. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Предположим, что заданы периоды $T_j^{(N)} > 0$ такие, что $T_j^{(N+1)}/T_j^{(N)} \in \mathbb{Z}$ для всех N и $j = 1, 2$. Пусть, далее, $K_N \subset L^\infty(\Omega_N)$ – произвольные компактные множества, состоящие из непрерывных функций, для которых выполнены оценки вида (1) (с различными C, α); $N = 1, 2, \dots$.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что периодическая по x_j с периодами $T_j^{(1)}$, $j = 1, 2$, функция $U(x)$ удовлетворяет оценке вида (1), а также неравенству*

$$\alpha = \int_{\Omega_1} U(x) dx < 0.$$

Существуют числа $\varepsilon_N > 0$, $N = 1, 2, \dots$, такие, что если $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$, $W_1(x) = \varepsilon U(x)$, $\|W_N(x)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \varepsilon_N$ и $W_N(x) \in K_N$, $N = 2, 3, \dots$, а потенциал $V(x)$ имеет вид (3), то для $E = \min \sigma(H)$ существует ненулевое решение $\psi(x)$ уравнения Шредингера (2) в $\mathbb{R}^3$ такое, что $|\psi(x)|$ – предельно периодическая функция по переменным x_1, x_2 .

ТЕОРЕМА 2. *Существуют такие числа $\varepsilon_N > 0$, $N = 1, 2, \dots$, что если $\|W_N(x)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \varepsilon_N$ и $W_N(x) \in K_N$, $N = 1, 2, \dots$, то найдется плотное в множестве $\sigma(H) \cap (-\infty, 0)$ множество $X \subset \sigma(H)$ такое, что для любого $E \in X$ имеется ненулевое решение $\psi(x)$ уравнения (2), причем $|\psi(x)|$ – предельно периодическая функция по x_1, x_2 .*

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $V(x)$ – потенциал, удовлетворяющий неравенству (1), $\psi(x)$ – ограниченное решение уравнения Шредингера (2) с $E < 0$. Тогда справедлива оценка*

$$|\psi(x)| \leq C_1 e^{-a_1|x_3|}, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (4)$$

где $C_1, a_1 > 0$.

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть $V(x)$ – предельно периодический потенциал, удовлетворяющий оценке (1). Тогда все предельно периодические по модулю по переменным x_1, x_2 решения уравнения Шредингера (2) с $E < 0$ удовлетворяют оценке вида (4).*

Положим $\sqrt{V(x)} = \sqrt{|V(x)|} \operatorname{sgn} V(x)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть в выражении (3) функция $W_1(x)$ удовлетворяет оценке вида (1) (а в остальном произвольна), а функции $W_{N+1}(x)$, $N \geq 1$, выбираются удовлетворяющими оценке этого же вида (с различными C , a) и так, чтобы числа $\varepsilon_{N+1} = \varepsilon_{N+1}(V_N)$ в неравенствах

$$\begin{aligned} \left\| \sqrt{|V_{N+1}(x)|} - \sqrt{|V_N(x)|} \right\|_{L^\infty(\Omega_{N+1})} &\leq \varepsilon_{N+1}, \\ \left\| \sqrt{V_{N+1}(x)} - \sqrt{V_N(x)} \right\|_{L^2(\Omega_{N+1})} &\leq \varepsilon_{N+1} \end{aligned}$$

были достаточно малы. Тогда уравнение Шредингера (2) для почти всех $E > 0$ имеет не стремящееся к нулю при фиксированных x_1, x_2 и при $x_3 \rightarrow \pm\infty$ решение такое, что $|\psi(x)|$ — предельно периодическая функция по x_1, x_2 .

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Согласно [11] оператор $H_1(k_\parallel) = -\Delta + W_1(x)$ имеет для $k_\parallel$ вне произвольно малой окрестности границы множества Ω_1^* и малых $\varepsilon > 0$ единственное собственное значение $E_\varepsilon(k_\parallel) < k_\parallel^2$ кратности единица, аналитически зависящее от $k_\parallel, \varepsilon$ и имеющее вид

$$E_\varepsilon(k_\parallel) = k_\parallel^2 - \frac{\varepsilon^2 \alpha^2}{4} + f(k_\parallel, \varepsilon), \quad (5)$$

где функция $f(k_\parallel, \varepsilon)$ удовлетворяет оценке

$$|f(k_\parallel, \varepsilon)| \leq C\varepsilon^3, \quad (6)$$

причем C не зависит от $k_\parallel$ в некоторой комплексной (в $\mathbb{C}^2$) окрестности нуля. Вследствие интегральной формулы Коши неравенства, аналогичные (6), справедливы в некоторой окрестности нуля для производных $\partial^{M_1+M_2} f(k_\parallel, \varepsilon) / \partial k_1^{M_1} \partial k_2^{M_2}$ любых порядков.

В силу (5), (6) очевидно, что функция $E_\varepsilon(k_\parallel)$ для малых ε имеет хотя бы один отрицательный минимум.

ЛЕММА 1. Минимум функции $E_\varepsilon(k_\parallel)$ для малых ε единствен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (5) и оценок вида (6) для производных функции $f(k_\parallel, \varepsilon)$ по k_1, k_2 отображение $(-1/2) \text{grad}_\parallel f(k_\parallel, \varepsilon)$, где $\text{grad}_\parallel = (\partial/\partial k_1, \partial/\partial k_2)$, для достаточно малых ε переводит множество

$$\mathcal{F}_\varepsilon = \{k_\parallel \in \Omega_1^* : E_\varepsilon(k_\parallel) \leq -\sigma\}$$

в себя и является сжимающим, где $\sigma > 0$ выбрано настолько малым, что $\mathcal{F}_\varepsilon$ содержит все точки (глобального) минимума функции $E_\varepsilon(k_\parallel)$, а также некоторую окрестность точки $k_\parallel = 0$. Вследствие принципа сжимающих отображений существует единственная стационарная точка функции $E_\varepsilon(k_\parallel)$ в $\mathcal{F}_\varepsilon$, поскольку такие точки согласно (5) определяются уравнением $k_\parallel = (-1/2) \text{grad}_\parallel f(k_\parallel, \varepsilon)$. Лемма доказана.

Заметим, что из упомянутых выше оценок для производных функции $f(k_{\parallel}, \varepsilon)$ по k_1, k_2 , а также из (5) вытекает равенство

$$\det \left(\frac{\partial^2 E_{\varepsilon}(k_{\parallel})}{\partial k_i \partial k_j} \right)_{i,j=1}^2 = 4 + O(\varepsilon^3),$$

причем в неравенстве $|O(\varepsilon^3)| \leq C\varepsilon^3$ константу C можно считать не зависящей от $k_{\parallel} \in \mathcal{F}_{\varepsilon}$.

Положим $R_N(k_{\parallel}, E) = (H_N(k_{\parallel}) - E)^{-1}$. Пусть K — компактное множество в $\mathbb{C} \setminus \sigma(H_N(k_{\parallel}))$.

ЛЕММА 2. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из

$$|k'_{\parallel} - k_{\parallel}| \leq \delta, \quad \|W_{N+1}(x)\|_{L^{\infty}(\Omega_{N+1})} \leq \delta$$

вытекают существование резольвенты $R_{N+1}(k'_{\parallel}, E)$ и неравенство

$$\|R_{N+1}(k'_{\parallel}, E) - R_N(k_{\parallel}, E)\| \leq \varepsilon \quad (7)$$

сразу для всех $E \in K$ (в неравенстве (7) оператор $R_N(k_{\parallel}, E)$ рассматривается в $L^2(\Omega_{N+1})$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью хорошо известного унитарного преобразования [3] перейдем к операторам

$$\tilde{H}_N(k_{\parallel}) = e^{-i(k_{\parallel}, x_{\parallel})} H_N(k_{\parallel}) e^{i(k_{\parallel}, x_{\parallel})} = -\Delta - 2i(k_{\parallel}, \text{grad}_{\parallel}) + k_{\parallel}^2 + V_N(x),$$

где $x_{\parallel} = (x_1, x_2)$, $\text{grad}_{\parallel} = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2)$. Резольвенту $\tilde{H}_N(k_{\parallel})$ обозначим через $\tilde{R}_N(k_{\parallel}, E)$. В силу резольвентного тождества имеем

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{N+1}(k'_{\parallel}, E) - \tilde{R}_N(k_{\parallel}, E) &= -\tilde{R}_{N+1}(k'_{\parallel}, E) \times \\ &\times \left(-2i(k'_{\parallel} - k_{\parallel}, \text{grad}_{\parallel}) + k_{\parallel}'^2 - k_{\parallel}^2 + W_{N+1}(x) \right) \tilde{R}_N(k_{\parallel}, E). \end{aligned} \quad (8)$$

Докажем равномерную по $E \in K$ ограниченность операторов $\text{grad}_{\parallel} \tilde{R}_N(k_{\parallel}, E)$ или эквивалентно операторов $\text{grad}_{\parallel} R_N(k_{\parallel}, E)$; данное утверждение вместе с равенством (8) докажет лемму. Вследствие равенства

$$R_N(k_{\parallel}, E) = R_0(k_{\parallel}, E) - R_0(k_{\parallel}, E) V_N(x) R_N(k_{\parallel}, E),$$

где $R_0(k_{\parallel}, E)$ — резольвента оператора $H_0(k_{\parallel}) = -\Delta$, достаточно доказать равномерную ограниченность операторов $\text{grad}_{\parallel} R_0(k_{\parallel}, E)$. Имеем

$$R_0(k_{\parallel}, E) \psi(x) = \sum_{n_{\parallel} \in \mathbb{Z}^2} \exp(i(k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel}, x_{\parallel})) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ip_3 x_3} \hat{\psi}_{n_{\parallel}}(p_3) dp_3}{-E + (k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel})^2 + p_3^2}, \quad (9)$$

где

$$\hat{\psi}_{n_{\parallel}}(p_3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{(0,1)^2} \exp(-i(k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel}, x_{\parallel})) \psi(x) dx_{\parallel} \right) e^{ip_3 x_3} dx_3.$$

Требуемая оценка легко получается после дифференцирования ряда (9) с использованием равенства Парсеваля и изометричности преобразования Фурье (ср. ниже доказательство леммы 5).

ЛЕММА 3. Пусть $\psi_N(x) \in L^2(\Omega_{N+1})$ – собственная функция единичной нормы оператора $H_N(k_{\parallel})$ (рассматриваемого в $L^2(\Omega_{N+1})$), отвечающая собственному значению $E_N(k_{\parallel}) < k_{\parallel}^2$ кратности единица. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если

$$|k'_{\parallel} - k_{\parallel}| \leq \delta, \quad \|W_{N+1}(x)\|_{L^\infty(\Omega_{N+1})} \leq \delta,$$

то у оператора $H_{N+1}(k'_{\parallel})$ существует собственная функция $\psi_{N+1}(x) \in L^2(\Omega_{N+1})$ единичной нормы, отвечающая собственному значению $E_{N+1}(k'_{\parallel})$ кратности единица, причем справедливы неравенства

$$|E_{N+1}(k'_{\parallel}) - E_N(k_{\parallel})| \leq \varepsilon, \\ \|\psi_{N+1}(x) - \psi_N(x)\|_{L^2(\Omega_{N+1})} \leq \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из леммы 2 и стандартных рассуждений теории возмущений, использующих формулу Рисса – см., например, [3].

ЛЕММА 4. В условиях леммы 3 имеет место также неравенство

$$\|\psi_{N+1}(x) - \psi_N(x)\|_{L^\infty(\Omega_{N+1})} \leq \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\Gamma_{N+1}(x-y, k_{\parallel}, E)$ ядро резольвенты $R_0(k_{\parallel}, E)$ оператора $H_0(k_{\parallel})$, рассматриваемого в $L^2(\Omega_{N+1})$. Заметим, что при фиксированном y ядро аналитически зависит от $k_{\parallel}, E$ как $L^2(\Omega_{N+1})$ -значная функция (см. [4]). Имеем

$$\psi_{N+1}(x) = \int_{\Omega_{N+1}} \Gamma_{N+1}(x-y, k'_{\parallel}, E_{N+1}(k'_{\parallel})) V_{N+1}(y) \psi_{N+1}(y) dy, \\ \psi_N(x) = \int_{\Omega_{N+1}} \Gamma_{N+1}(x-y, k_{\parallel}, E_N(k_{\parallel})) V_N(y) \psi_N(y) dy.$$

Нужное неравенство легко получается из приведенных соотношений с помощью леммы 3 и неравенства Коши–Буняковского.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1, 2 вполне аналогичны доказательствам соответствующих теорем в [6] с использованием сформулированных выше в данном разделе утверждений (лемма 1 относится лишь к теореме 1). В теореме 2 также надо использовать факт конечности числа собственных значений операторов $H_N(k_{\parallel})$, меньших $k_{\parallel}^2$ [5], и то обстоятельство, что они неявно задаются нулями аналитической функции аргументов $k_{\parallel}, E$ [4].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Обозначим через

$$G(x - y, E) = \exp\left(-\sqrt{|E|}|x - y|\right) / 4\pi|x - y|$$

ядро резольвенты оператора $-\Delta$ в $L^2(\mathbb{R}^3)$. Пусть для простоты $T_1 = T_2 = 1$. Имеем

$$\psi(x) = - \int_{\mathbb{R}^3} G(x - y, E) V(y) \psi(y) dy,$$

откуда

$$\begin{aligned} |\psi(x)| &\leq C \int_{\mathbb{R}^3} G(x - y, E) e^{-a|y_3|} dy = \\ &= C \int_{\Omega} \left(\sum_{n_{\parallel} \in \mathbb{Z}^2} G(x - y - (n_{\parallel}, 0), E) \right) e^{-a|y_3|} dy = \\ &= C \int_{\Omega} \Gamma(x - y, 0, E) e^{-a|y_3|} dy, \end{aligned}$$

где $\Omega = [0, 1) \times \mathbb{R}$, $\Gamma(x - y, 0, E)$ – ядро резольвенты оператора $H_0(k_{\parallel}) = -\Delta$ в $L^2(\Omega)$ для $k_{\parallel} = 0$ (см. [4]). Нужная оценка вытекает после применения неравенства Коши–Буняковского из результатов [2] (оценка доказывается с помощью равенства Парсеваля и замены ряда по $n_{\parallel}$ на интеграл – см. также [4]). Теорема доказана.

Обозначим через $\Gamma(x - y, k_{\parallel}, E + i0)$ естественное продолжение ядра резольвенты оператора $H_0(k_{\parallel})$, действующего в $L^2(\Omega)$, в точку спектра

$$E \in (k_{\parallel}^2, \infty) \setminus \left\{ (k_{\parallel} + 2\pi(n_1/T_1, n_2/T_2))^2 : n_{\parallel} \in \mathbb{Z}^2 \right\}$$

(в точках $E = (k_{\parallel} + 2\pi(n_1/T_1, n_2/T_2))^2$ функция $\Gamma(x - y, k_{\parallel}, E + i0)$ не определена). О возможности такого продолжения см. [4], а также приведенные ниже рассуждения. Пусть потенциал $V(x)$ удовлетворяет оценке (1). Рассмотрим модифицированное уравнение Липмана–Швингера [12] для блоховских функций

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) - \int_{\Omega_N} \sqrt{V(x)} \Gamma_N(x - y, k_{\parallel}, E + i0) \sqrt{V(y)} \varphi(y) dy, \quad (10)$$

где $\varphi_0(x) = \sqrt{|V(x)|} \exp\left(i((k_{\parallel}, \sqrt{E - k_{\parallel}^2}), x)\right)$; решение $\varphi(x)$ ищется в классе $L^2(\Omega_N)$ (соответствующее решение $\psi(x)$ уравнения Липмана–Швингера связано с $\varphi(x)$ равенством $\varphi(x) = \sqrt{|V(x)|} \psi(x)$). Под множеством $\mathcal{N}(k_{\parallel})$, о котором шла речь во введении, следует понимать объединение множества точек $E > k_{\parallel}^2$, для которых уравнение (10) с $\varphi_0(x) = 0$ имеет ненулевое решение (при этом множество пар $(k_{\parallel}, E)$ для таких E локально есть множество нулей аналитической функции – см. [4] – и, следовательно, замкнуто) с множеством точек $E = (k_{\parallel} + 2\pi(n_1/T_1, n_2/T_2))^2$, где $n_{\parallel} = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$. Заметим, что точки E , в которых имеется ненулевое решение уравнения (10) с $\varphi_0(x) = 0$, являются собственными значениями (с помощью формулы Грина можно доказать, что коэффициенты при плоских волнах, дающих асимптотику соответствующих решений

уравнения Шредингера – см. [4] – обращаются в нуль, и, таким образом, решение принадлежит $L^2(\Omega_N)$. Примеры таких собственных значений легко построить, беря потенциал, зависящий только от x_3 .

Обозначим через $\mathcal{M}(k_{\parallel})$ объединение $\mathcal{N}(k_{\parallel})$ и собственных значений дискретного спектра $E_{\nu}(k_{\parallel}) < k_{\parallel}^2$, $\nu = 1, 2, \dots$. Согласно [4] и теореме Фредгольма для $E \in (k_{\parallel}^2, \infty) \setminus \mathcal{M}(k_{\parallel})$ уравнение (10) имеет единственное решение.

При доказательстве следующего утверждения для простоты записи полагаем $T_1^{(N)} = T_2^{(N)} = 1$, $\Gamma_N(x, k_{\parallel}, E) = \Gamma(x, k_{\parallel}, E)$.

ЛЕММА 5. (ср. периодический случай [3]). *Множество $\Omega^* \times \mathcal{M}(k_{\parallel})$ не содержит подмножеств вида $\{(k_1^{(n)}, k_2, E)\}_{n=1}^{\infty}$, где $\{k_1^{(n)}\} \subset [-\pi, \pi)$ – сходящаяся последовательность с пределом $k_1^* \neq 0$ (в частности, у собственных значений нет участков постоянства по k_1).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $E \neq (k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel})^2$, $n_{\parallel} \in \mathbb{Z}^2$. Для малых по модулю s, ε существует аналитическое продолжение по переменным $k_1 + is$, $E + i\varepsilon$ $L^2(\Omega \times \Omega)$ -значной функции

$$\sqrt{|V(x)|} \Gamma(x - y, k_{\parallel}, E + i0) \sqrt{V(y)};$$

это легко усмотреть из вида ядер резольвент, приведенных (в более общем случае) в [13].

Рассмотрим область в $\mathbb{C}$ вида $\omega = (\alpha, \beta) + i(-\delta, \infty)$, где (α, β) содержит k_1^* , причем $[\alpha, \beta] \cap \{0\} = \emptyset$, а $\delta > 0$ достаточно мало. Положим

$$\tilde{H}(k_{\parallel}) = e^{-i(k_{\parallel}, x_{\parallel})} H(k_{\parallel}) e^{i(k_{\parallel}, x_{\parallel})}$$

(см. доказательство леммы 2) и обозначим через $\tilde{R}_0(k_{\parallel}, E)$ резольвенту оператора $\tilde{H}_0(k_{\parallel})$. Для доказательства леммы достаточно доказать, что для операторнозначной функции

$$\sqrt{|V(x)|} \tilde{R}_0(k_{\parallel}, E + i0) \sqrt{V(x)} \quad (11)$$

с ядром

$$e^{-i(k_{\parallel}, x_{\parallel})} \sqrt{|V(x)|} \Gamma(x - y, k_{\parallel}, E + i0) \sqrt{V(y)} e^{i(k_{\parallel}, y_{\parallel})} \quad (12)$$

имеется аналитическое продолжение по $k_1 + is$ в область ω , причем выполнено условие

$$\left\| \sqrt{|V(x)|} \tilde{R}_0(k_1 + i(s, 0), E + i0) \sqrt{V(x)} \right\| \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Действительно, в этом случае совокупность точек $k_1 + is \in \omega$, для которых при фиксированных k_2, E

$$\begin{aligned} \ker \left\{ 1 + \sqrt{|V(x)|} \tilde{R}_0(k_{\parallel} + i(s, 0), E + i0) \sqrt{V(x)} \right\} = \\ = \ker \left\{ 1 + \sqrt{|V(x)|} R_0(k_{\parallel} + i(s, 0), E + i0) \sqrt{V(x)} \right\} \neq \{0\}, \end{aligned} \quad (14)$$

не совпадает с ω и в силу аналитической теоремы Фредгольма [8] не имеет предельных точек, что и докажет лемму.

Осталось доказать (13); из полученных при этом оценок и теоремы Вейерштрасса (в векторном варианте) об аналитичности ряда, составленного из аналитических функций, будет следовать возможность аналитического продолжения операторнозначной функции (11) для произвольных $s > 0$. Пусть $s > |\varepsilon/k_1| > 0$, $\varphi(x) \in L^2(\Omega)$ и $\psi(x) = \sqrt{V(x)} e^{i(k_{\parallel}, x_{\parallel})} \varphi(x)$. Оценим, пользуясь (9),

$$\begin{aligned} & \left\| \sqrt{|V(x)|} \tilde{R}_0(k_{\parallel} + i(s, 0), E + i\varepsilon) \sqrt{V(x)} \varphi(x) \right\|_{L^2(\Omega)} = \\ & = \left\| \sqrt{|V(x)|} \sum_{n_{\parallel} \in \mathbb{Z}^2} \exp(i(2\pi n_{\parallel}, x_{\parallel})) \times \right. \\ & \quad \times \left. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ip_3 x_3} \hat{\psi}_{n_{\parallel}}(p_3) dp_3}{-E - i\varepsilon + (k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel})^2 + p_3^2 - s^2 + 2is(k_1 + 2\pi n_1)} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ & \leq \frac{C_1}{(s - |\varepsilon/2k_1|)^2} \sum_{n_{\parallel} \in \mathbb{Z}^2} \|\hat{\psi}_{n_{\parallel}}(p_3)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \frac{4C_1}{|s|^2} \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

равномерно по всем достаточно малым ε , что позволяет перейти в полученном неравенстве к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, используя при этом ядро вида (12) – см. начало доказательства. Отсюда сразу следует (13). Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ – ограниченное множество такое, что для некоторого $\sigma_0 > 0$ и всех $E \in A$ и $n_{\parallel} \in \mathbb{Z}^2$ выполнено неравенство

$$|E - (k_{\parallel} + 2\pi(n_1/T_1^{N+1}, n_2/T_2^{N+1}))^2| \geq \sigma_0.$$

Пусть, далее, потенциал $V_N(x)$ фиксирован. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если

$$\begin{aligned} & \left\| \sqrt{V_{N+1}(x)} \right\|_{L^\infty(\Omega_{N+1})} \left\| \sqrt{V_{N+1}(x)} - \sqrt{V_N(x)} \right\|_{L^2(\Omega_{N+1})} \leq \delta, \\ & \left\| \sqrt{|V_{N+1}(x)|} - \sqrt{|V_N(x)|} \right\|_{L^2(\Omega_{N+1})} \leq \delta, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} & \left\| \sqrt{|V_{N+1}(x)|} \Gamma_{N+1}(x - y, k_{\parallel}, E + i0) \sqrt{V_{N+1}(y)} - \right. \\ & \quad \left. - \sqrt{|V_N(x)|} \Gamma_{N+1}(x - y, k_{\parallel}, E + i0) \sqrt{V_N(y)} \right\|_{L^2(\Omega_{N+1} \times \Omega_{N+1})} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

равномерно по $E \in A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\Gamma_{N+1}(x, k_{\parallel}, E + i0) = \Gamma_{N+1}^{(1)}(x, k_{\parallel}, E + i0) + \Gamma_{N+1}^{(2)}(x, k_{\parallel}, E),$$

причем нормы

$$\|\Gamma_{N+1}^{(1)}(x, k_{\parallel}, E + i0)\|_{L^{\infty}(\Omega_{N+1})}, \quad \|\Gamma_{N+1}^{(2)}(x, k_{\parallel}, E)\|_{L^2(\Omega_{N+1})}$$

ограничены равномерно по $E \in A$ (см. [4]). Требуемое неравенство получается с помощью простых оценок, использующих приведенное утверждение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Через $\mathcal{M}_N(k_{\parallel})$ будем обозначать множество $\mathcal{M}(k_{\parallel})$ для оператора $H_N(k_{\parallel})$. Для простоты обозначений образы $\tilde{k}_{\parallel} \in \Omega_{N+1}^*$, $\tilde{\tilde{k}}_{\parallel} \in \Omega_{N+2}^*$ и т.д. точки $k_{\parallel} \in \Omega_N^*$ будем обозначать той же буквой. Выберем точку $k_{\parallel}^{(1)} = (k_1^{(1)}, k_2^{(1)}) \in \Omega_1^*$ так, чтобы у нее, а также у всех ее образов в Ω_N^* , $N \geq 2$, выполнялось условие $k_1^{(1)} \neq 0$; выберем также отрезок $\Delta_1^{(1)} = [a_1, b_1] \subset ((k_{\parallel}^{(1)})^2, \infty)$. Пусть $\Delta_1^{(1)} \cap \mathcal{M}_1(k_{\parallel}^{(1)}) = \{E_i^{(1)}\}_{i=1}^{n_1}$. С помощью леммы 5 легко доказать от противного, что существует точка $k_{\parallel}^{(2)} \in \Omega_1^*$, сколь угодно близкая к $k_{\parallel}^{(1)}$, в частности, такая, что $(k_{\parallel}^{(2)})^2 < a_1$, для которой выполнено условие $\mathcal{M}_1(k_{\parallel}^{(2)}) \cap \{E_i^{(1)}\}_{i=1}^{n_1} = \emptyset$; при этом можно считать, что для нее и всех ее образов $k_1^{(2)} \neq 0$. Выберем (достаточно малое) $\varepsilon > 0$, а также множество $\Delta_1^{(2)}$, полученное из $\Delta_1^{(1)}$ выбрасыванием открытых интервалов, содержащих точки $E_i^{(1)}$, $i = 1, \dots, n_1$, таких, что при этом $\mu(\Delta_1^{(1)} \setminus \Delta_1^{(2)}) < \varepsilon_1$, где $\mu(X)$ — мера Лебега множества X , и далее множество

$$\Delta_2^{(1)} \subset ((k_{\parallel}^{(2)})^2, \infty) \setminus \mathcal{M}_1(k_{\parallel}^{(2)}),$$

состоящее из конечного числа замкнутых промежутков, выбранных так, чтобы выполнялось включение $\Delta_1^{(1)} \subset \Delta_1^{(2)} \cup \Delta_2^{(1)}$. Для $k_{\parallel} = k_{\parallel}^{(1)}$, $E \in \Delta_1^{(2)}$, а также для $k_{\parallel} = k_{\parallel}^{(2)}$, $E \in \Delta_2^{(1)}$ существуют решения $\varphi(x)$ уравнения (10) в случае $V(x) = V_1(x)$ и $N = 1$ (см. начало доказательства). В Ω_2 эти решения удовлетворяют уравнению (10) для $V(x) = V_1(x)$ и $N = 2$; действительно, интегралы в правой части уравнений приводятся к одному и тому же интегралу по $\mathbb{R}^3$. Выберем теперь некоторую точку $k_{\parallel}^{(3)} \in \Omega_2^*$ с тем, чтобы $k_1^{(3)} \neq 0$ для всех образов, и множество $\Delta_3^{(1)} = [a_2, a_1] \cup [b_1, b_2]$, где

$$a_2 \in ((k_{\parallel}^{(3)})^2, \min\{1/2, a_1\}), \quad b_2 > \max\{b_1, 2\}.$$

Заметим, что множество $\mathcal{M}_1(k_{\parallel})$ при рассмотрении оператора $H_1(k_{\parallel})$ в $L^2(\Omega_2)$ увеличивается. Как и выше, для ε_1 и (достаточно малых) $\varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$ строим множества $\Delta_1^{(3)}$, $\Delta_2^{(2)}$, $\Delta_3^{(2)}$, полученные соответственно из множеств $\Delta_1^{(2)}$, $\Delta_2^{(1)}$, $\Delta_3^{(1)}$ выбрасыванием интервалов, содержащих точки, соответственно $\mathcal{M}_1(k_{\parallel}^{(1)})$, $\mathcal{M}_1(k_{\parallel}^{(2)})$, $\mathcal{M}_1(k_{\parallel}^{(3)})$ (здесь $k_{\parallel}^{(j)} \in \Omega_2^*$, $j = 1, 2, 3$), столь малых, чтобы выполнялись неравенства

$$\mu(\Delta_1^{(1)} \setminus \Delta_1^{(3)}) < \varepsilon_1, \quad \mu(\Delta_2^{(1)} \setminus \Delta_2^{(2)}) < \varepsilon_2, \quad \mu(\Delta_3^{(1)} \setminus \Delta_3^{(2)}) < \varepsilon_3,$$

а также одновременно с этим строим множества $\Delta_4^{(1)}, \Delta_5^{(1)}, \Delta_6^{(1)}$, состоящие из конечного числа замкнутых отрезков, не пересекающихся соответственно с множествами $\mathcal{M}_1(k_{\parallel}^{(4)}), \mathcal{M}_1(k_{\parallel}^{(5)}), \mathcal{M}_1(k_{\parallel}^{(6)})$ для некоторых точек $k_{\parallel}^{(4)}, k_{\parallel}^{(5)}, k_{\parallel}^{(6)}$ из Ω_2^* с ненулевой первой координатой для всех образов и достаточно близких к точкам соответственно $k_{\parallel}^{(1)}, k_{\parallel}^{(2)}, k_{\parallel}^{(3)}$, и такие, что

$$\Delta_1^{(2)} \subset \Delta_1^{(3)} \cup \Delta_4^{(1)}, \quad \Delta_2^{(1)} \subset \Delta_2^{(2)} \cup \Delta_5^{(1)}, \quad \Delta_3^{(1)} \subset \Delta_3^{(2)} \cup \Delta_6^{(1)}.$$

Рассмотрим в Ω_2 уравнение (10) для $N = 2$ и $V(x) = V_1(x)$, а также $V(x) = V_2(x)$; соответствующие интегральные операторы в правой части (10), действующие на функции $\varphi \in L^2(\Omega_2)$, обозначим через K_1 и K_2 . В силу леммы 6 для достаточно малых (в смысле этой леммы) $W_2(x)$ норма $\|K_1 - K_2\|$ как угодно мала. По построению для точек $k_{\parallel}^{(i)}$, $i = 1, \dots, 6$, и для E из соответствующих множеств $\Delta_1^{(3)}, \Delta_2^{(2)}, \Delta_3^{(1)}, \Delta_4^{(1)}, \Delta_5^{(1)}$ и $\Delta_6^{(1)}$ существует ограниченный обратный оператор $(1 - K_1)^{-1}$, а значит, существует $(1 - K_2)^{-1}$, причем норма

$$\|(1 - K_2)^{-1} - (1 - K_1)^{-1}\|$$

сколь угодно мала в случае, если функция $W_2(x)$ достаточно мала. Следовательно, норма

$$\|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\|_{L^2(\Omega)}, \quad (15)$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ — решения рассматриваемых уравнений, также сколь угодно мала. Для соответствующих функциям $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ решений $\psi_1(x), \psi_2(x)$ уравнений Липмана–Швингера норму $\|\psi_1(x) - \psi_2(x)\|_{L^\infty(\Omega)}$ также можно сделать сколь угодно малой; это получается с помощью простых оценок из вида данных уравнений, малости величины (15) и условия теоремы с использованием сформулированных в доказательстве леммы 6 утверждений.

Построение продолжается по индукции. На $(N + 1)$ -м шаге из полученных на N -м шаге для $k_{\parallel}^{(i)} \in \Omega_N^*$ сегментов выбрасываем интервалы, содержащие точки из $\mathcal{M}_N(k_{\parallel}^{(i)})$, где $k_{\parallel}^{(i)} \in \Omega_{N+1}^*$, и добавляем новые сегменты, отвечающие одновременно добавляемым точкам $\bar{k}_{\parallel}^{(j)}$, закрывающие полученные щели и не содержащие точек из $\mathcal{M}_N(\bar{k}_{\parallel}^{(j)})$. Затем решаем уравнение Липмана–Швингера для данных $k_{\parallel}^{(i)}, \bar{k}_{\parallel}^{(j)}$ и E из соответствующих сегментов для $V(x) = V_N(x)$ и $V(x) = V_{N+1}(x)$ с тем, чтобы найденные решения отличались достаточно мало по норме $L^\infty(\Omega_{N+1})$ (в том числе решения для $V(x) = V_{N+1}(x)$ от решений, найденных на предыдущем шаге). Далее добавляем новые сегменты вида $[a_{N+1}, a_N], [b_N, b_{N+1}]$ вместе с точкой $k'_{\parallel} \in \Omega_{N+1}^*$, где

$$a_{N+1} \in \left((k'_{\parallel})^2, \min\{1/N + 1, a_N\} \right), \quad b_{N+1} > \max\{b_N, N + 1\};$$

при этом заботимся о том, чтобы мера объединения выброшенных на данном и всех предыдущих шагах интервалов из произвольного участвующего в построении и возникшего M -м по счету объединения сегментов, отвечающих одной точке, была меньше некоторого $\varepsilon = \varepsilon^{(M+1)} \rightarrow 0$ при $M \rightarrow \infty$. Пусть, далее, N_0 — шаг в построении, на котором впервые ищется решение $\psi_{N_0}(x)$ уравнения Липмана–Швингера для точки $k_{\parallel}^{(N_0)} \in \Omega_{N_0}^*$ и

соответствующего набора сегментов. Для данной точки $k_{\parallel}^{(N_0)}$ (и ее образов) и соответствующих E (множество таких E от шага к шагу уменьшается) требуется выполнение неравенства

$$\|\psi_{N_0}(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} > \sum_{N=N_0}^{\infty} \|\psi_{N+1}(x) - \psi_N(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)},$$

чего можно добиться (для всех таких точек одновременно) последовательным выбором достаточно малых $W_N(x)$, $N > N_0$. Это обеспечивает нетривиальность решения

$$\psi(x) = \psi_{N_0}(x) + \sum_{N=N_0}^{\infty} (\psi_{N+1}(x) - \psi_N(x))$$

“предельного” уравнения Шредингера (2), а также то, что $\psi(x)$ не стремится к нулю при $x_3 \rightarrow \pm\infty$. Предельная периодичность функции $|\psi(x)|$ вытекает из периодичности функций $\psi_N(x)$. Из процедуры построения и условия $\lim_{M \rightarrow \infty} \varepsilon^{(M)} = 0$ следует, что для любого появившегося на каком-либо шаге сегмента мера множества точек, принадлежащих ему, для которых имеется решение уравнения (2), равна длине отрезка. Объединение всех таких сегментов совпадает с $(0, \infty)$, и тем самым теорема доказана.

Список литературы

- [1] *Davies E. B.* // Proc. Cambr. Philos. Soc. 1977. V. 82. P. 327.
- [2] *Чубурин Ю. П.* О рассеянии на кристаллической пленке: Препринт. Свердловск: ФТИ УНЦ АН СССР, 1985.
- [3] *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 4. М.: Мир, 1982.
- [4] *Чубурин Ю. П.* // ТМФ. 1987. Т. 72. № 1. С. 120.
- [5] *Вольф Г. В., Чубурин Ю. П., Рубцова Л. А.* // Поверхность. 1991. № 10. С. 81.
- [6] *Чубурин Ю. П.* // ТМФ. 1995. Т. 102. № 1. С. 74.
- [7] *Avron J., Simon B.* // Commun. Math. Phys. 1981. V. 82. P. 101.
- [8] *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 1. М.: Мир, 1977.
- [9] *Козлов С. М.* // Тр. Моск. матем. об-ва. 1983. Т. 46. С. 99.
- [10] *Simon B.* // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. V. 7. P. 447.
- [11] *Чубурин Ю. П.* // Матем. заметки. 1992. Т. 52. Вып. 2. С. 138.
- [12] *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 3. М.: Мир, 1982.
- [13] *Чубурин Ю. П.* // ТМФ. 1994. Т. 98. № 1. С. 38.

Физико-технический институт
Удмуртского научного центра
Уральского отделения
Российской академии наук

Поступила в редакцию
21.III.1995 г.

Yu. P. Chuburin

ON SCHRODINGER EQUATION FOR THE PLANE FILM WITH THE LIMIT PERIODIC LATTICE

The solutions of the Schrodinger equation with the potential that is limit periodic in x_1, x_2 and that decreases when $|x_3| \rightarrow \infty$ are constructed and some of their properties are described.