Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Л. Антипин, О. Н. Гадомский, Обобщенная модель Дикке: переходы $\Delta M = \pm 2$, *ТМФ*, 1996, том 106, номер 1, 145–159

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1104>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 15:21:58

Е. Л. Антипин, О. Н. Гадомский

ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ ДИККЕ: ПЕРЕХОДЫ $\Delta M = \pm 2$

Построена теория двухатомных квантовых переходов с удвоением частоты излучаемых или поглощаемых фотонов в когерентных оптических процессах. Рассматриваются эффекты третьего порядка квантовой электродинамики, которые включают в себя виртуальный обмен фотонами и излучение (поглощение) реального фотона удвоенной частоты. В этих эффектах разделены две части взаимодействия, каждая из которых учитывает промежуточные состояния в спектре атомов либо с положительной, либо с отрицательной частотой. В соответствии с этим различаются электронная и позитронная поляризации среды, которые приводят к возникновению двух механизмов удвоения частоты, отличающихся физическими свойствами. Для описания когерентных процессов в данной статье в электрическом дипольном приближении разработана обобщенная модель Дикке для системы N двухуровневых атомов, в которой возможны квантовые переходы с $\Delta M = \pm 1, \pm 2$, где M – полуразность заселенностей резонансных уровней атомов. В рамках этой модели получена формула для интенсивности квантовых переходов с $\Delta M = \pm 2$.

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой статье предлагается обобщенная модель Дикке, которая учитывает наряду со взаимодействием атомов через общее поле излучения [1] также динамическое взаимодействие через поле виртуальных фотонов. Некоторые предварительные замечания о возможности такого обобщения были сделаны в книге [2], где учитывалась лишь часть резонансного взаимодействия атомов в поле излучения.

Будем рассматривать переходы в системе N двухуровневых атомов в оптической области спектра с $\Delta M = \pm 2$ (M – полуразность заселенностей), обусловленные учетом межатомного взаимодействия. В гамильтониане взаимодействия атомов с полем излучения учтем члены типа $R_{\pm}^2$, где операторы $R_{\pm}$ построены из операторов суммарного эффективного спина системы двухуровневых атомов. Изменение энергетических уровней отдельных атомов, вызванное межатомным взаимодействием, не будет приниматься во внимание, что соответствует приближению сильного поля [3], когда переходы, индуцированные внешним полем излучения, происходят значительно чаще, чем переходы, обусловленные взаимодействием между атомами.

При построении обобщенной модели Дикке мы будем использовать теорию резонансного взаимодействия атомов через поле виртуальных фотонов в поле реальных фотонов [4, 2], учитывая в спектре взаимодействующих атомов состояния с положительной и отрицательной энергией. Ранее [2, 5] на основе детального изучения парного взаимодействия двух водородоподобных атомов, находящихся на произвольном расстоянии друг от друга, для одноатомных переходов был разработан метод получения различных интегральных уравнений распространения фотонов в непрерывной оптической

среде. В этой работе будут рассмотрены двухатомные однофотонные переходы, когда различные пары атомов в системе N двухуровневых атомов могут одновременно изменять свои энергетические состояния с излучением или поглощением фотонов удвоенной энергии. При этом мы не будем учитывать эффекты прохождения фотонов и получим формулу для интенсивности спонтанного излучения фотонов удвоенной энергии в системе N атомов, находящейся в коллективном состоянии. Для определенности ограничимся только электрическими дипольными переходами, хотя наш подход можно легко обобщить на случай других типов квантовых переходов в спектре взаимодействующих атомов.

2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ АТОМОВ ЧЕРЕЗ ПОЛЕ ВИРТУАЛЬНЫХ ФОТОНОВ С ИЗЛУЧЕНИЕМ ИЛИ ПОГЛОЩЕНИЕМ РЕАЛЬНОГО ФОТОНА КАК ЭФФЕКТЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Рассмотрим следующую S -матрицу для системы $N = 2$ двух водородоподобных атомов, находящихся на произвольном расстоянии друг от друга:

$$S_{i \rightarrow j}^{(3)} = S_{mn,pr}^{(3)} - S_{nm,pr}^{(3)},$$

$$S_{mn,pr}^{(3)} = -ie^3 \int \bar{\Psi}_r(x'_1) \bar{\Psi}_p(x''_2) K_{12}^{(3)}(1, 2, 3) \Psi_m(x'_1) \Psi_n(x''_2) d^4x' d^4x'' d^4x''', \quad (2.1)$$

где e — заряд электрона, $\Psi_{n(m)}$ — волновые функции Дирака в начальных состояниях $n(m)$ атомных электронов, $\bar{\Psi}_{p(r)} = \Psi_{p(r)}^* \beta$, $\Psi_{p(r)}^*$ — сопряженная волновая функция конечных состояний $p(r)$, $\alpha_j = -i\beta\alpha_j$ ($j = 1, 2, 3$), $\gamma_4 = \beta$, α_j — матрицы Дирака, $x(\mathbf{r}, it)$, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор атомного электрона в атоме 1 либо 2.

Оператор

$$K_{12}^{(3)}(1, 2, 3) = \hat{A}(x'_1) S_c^e(x'_1, x''_1) \gamma_{\mu_1}'' D^c(x''_1 - x''_2) \gamma_{\mu_2}''' +$$

$$+ \gamma_{\mu_1}' S_c^e(x'_1, x''_1) \hat{A}(x''_1) \gamma_{\mu_2}''' D^c(x'_1 - x''_2) \quad (2.2)$$

построен с помощью фотонного D^c и электронного S_c^e пропагаторов [6]:

$$D^c(x''_1 - x''_2) = -\frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{\mathbf{k}'^2 - \omega^2/c^2} e^{i\mathbf{k}'(\mathbf{r}_1'' - \mathbf{r}_2'')} d\mathbf{k}' d\omega, \quad (2.3)$$

$$S_c^e(x'_1, x''_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(t'_1 - t''_1)} \sum_{l \pm} \frac{\Psi_l(\mathbf{r}'_1) \bar{\Psi}_l(\mathbf{r}''_1)}{\omega_l(1 - i0) + \omega}, \quad (2.4)$$

здесь $\mathbf{k}'$ — волновой вектор виртуальных фотонов с частотой ω , $\hat{A} = \sum \gamma_\mu A_\mu$, $\mu = 1, 2, 3, 4$, и оператор векторного потенциала

$$A_\mu(x''_1) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V_R \omega_{\mathbf{k}}}} e_{\mu\mathbf{k}}^\lambda (c_{k\lambda} e^{ikx''_1} + c_{k\lambda}^+ e^{-ikx''_1}), \quad (2.5)$$

V_R – объем квантования электромагнитного поля; $e_{\mu \mathbf{k}}^{\lambda}$ – единичные векторы поляризации реальных фотонов, $\lambda = 1, 2$; k, ω – волновой вектор и частота реальных фотонов; $c_{\mathbf{k}\lambda}, c_{\mathbf{k}\lambda}^+$ – операторы уничтожения и рождения реальных фотонов моды $\mathbf{k}\lambda$.

Диаграммы Фейнмана, соответствующие S -матрице (2.1), изображены на рисунке. Штриховые индексы в операторе (2.2) и волновых функциях, а также индексы 1 и 2 определяют области интегрирования в атомах 1 и 2 по координатам и времени; суммирование в (2.4) проводится по промежуточным состояниям в спектре взаимодействующих электронов с положительными и отрицательными частотами.

Выделяя в волновых функциях временные множители после интегрирования по времени, мы можем перейти к матрице эффективной энергии взаимодействия двух атомных электронов по формуле

$$S_{mn,pr}^{(3)} = -2\pi U_{mn,pr}^{(3)} \delta(\omega + \omega_p - \omega_m + \omega_r - \omega_n),$$

где $\omega_{p(r)}, \omega_{m(n)}$ – частоты конечных и начальных состояний электронов, соответственно,

$$\begin{aligned} U_{mn,pr}^{(3)} = & \frac{ie^3}{4\pi} \int \Psi_r^*(\mathbf{r}') \Psi_p^*(\mathbf{r}'') \sum_{l_{\pm}} \left\{ \gamma'_4 \gamma'_\delta A'_\delta \frac{\Psi_l(\mathbf{r}') \Psi_l^*(\mathbf{r}'')}{\omega_l(1-i0) - \omega - \omega_r} \times \right. \\ & \times \frac{1 - \alpha'' \alpha'''}{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''} \exp\{i|\omega_p - \omega_n| |\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''\} \} + \\ & + \frac{1 - \alpha' \alpha'''}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}'''} \exp\{i|\omega_p - \omega_n| |\mathbf{r}' - \mathbf{r}'''\} \left. \frac{\Psi_l(\mathbf{r}') \Psi_l^*(\mathbf{r}'')}{\omega_l(1-i0) + \omega - \omega_m} \gamma''_4 \gamma''_\delta A''_\delta \right\} \times \\ & \times \Psi_m(\mathbf{r}'') \Psi_n(\mathbf{r}''') d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' d\mathbf{r}''', \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $\delta = 1, 2, 3$, $\Psi_{m(n)}$ – координатные волновые функции электронов.

Предположим, что координаты $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$ относятся к первому атому, а координата $\mathbf{r}'''$ – ко второму. В случае, когда расстояние между неподвижными ядрами атомов является произвольным, мы можем заменить фактор запаздывания в (2.6) на соответствующий оператор аналогично тому, как это было сделано нами в [2, 4] для эффектов второго порядка квантовой электродинамики взаимодействия двух атомных электронов через поле виртуальных фотонов. Используя уравнения Дирака для двух атомных электронов с операторами Гамильтона H', H'', H''' , запишем следующее преобразование:

$$\begin{aligned} & \frac{1 - \alpha''_1 \alpha''_2}{|\mathbf{r}''_1 - \mathbf{r}''_2|} \exp \left\{ \frac{i}{c} |\omega_p - \omega_n| |\mathbf{r}''_1 - \mathbf{r}''_2| \right\} \rightarrow \exp \left\{ \frac{i}{c} |\omega_p - \omega_n| a \right\} \times \\ & \times \left\{ \frac{1 - \alpha''_1 \alpha''_2}{|\mathbf{r}''_1 - \mathbf{r}''_2|} \pm \frac{i}{c} [H''', f_1] + \frac{1}{2c^2} [H'', [H''', f_2]] - \frac{1}{2c^2} (\omega - \omega_2 + \omega_l) [H''', f_2] \right\}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 - \frac{a}{|\mathbf{r}_1'' - \mathbf{r}_2''|}, \quad f_2 = |\mathbf{r}_1'' - \mathbf{r}_2''| + \frac{a^2}{|\mathbf{r}_1'' - \mathbf{r}_2''|} - 2a, \\ H''' &= c\alpha''' \mathbf{p}''' + \gamma_4''' mc^2 - Ze^2/\xi''', \\ H'' &= c\alpha'' \mathbf{p}'' + \gamma_4'' mc^2 - Ze^2/\xi'', \end{aligned} \quad (2.8)$$

m – масса электрона; ξ'' , ξ''' – смещения атомных электронов относительно своих неподвижных ядер; c – скорость света в вакууме; Ze – заряд ядра; $\mathbf{p}''$, $\mathbf{p}'''$ – операторы импульса электронов; a – межъядерное расстояние.

Таким же образом мы можем преобразовать другой фактор запаздывания в матрице (2.6). Опуская теперь штриховые индексы, получим вместо (2.6) следующую матрицу:

$$\begin{aligned} U_{mn,pr}^{(3)} &= \frac{ie^3}{4\pi} \exp \left\{ \frac{i}{c} |\omega_p - \omega_n| a \right\} \int \Psi_r^*(\xi_1) \Psi_p^*(\xi_2) \times \\ &\times \sum_{l_{\pm}} \left\{ \gamma_{41} \gamma_{\delta 1} A_{\delta 1} \frac{\Psi_l(\xi_1) \Psi_l^*(\xi_1)}{\omega_l(1-i0) - \omega - \omega_r} \mathcal{B} + \right. \\ &\left. + \mathcal{B} \frac{\Psi_l(\xi_1) \Psi_l^*(\xi_1)}{\omega_l(1-i0) + \omega - \omega_m} \gamma_{41} \gamma_{\delta 1} A_{\delta 1} \right\} \Psi_m(\xi_1) \Psi_n(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $\mathcal{B}$ – обобщенный брейтовский оператор:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \frac{1}{r} \pm \frac{a(\alpha_2 \mathbf{n}_{12})}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{(\alpha_1 \alpha_2) + (\alpha_1 \mathbf{n}_{12})(\alpha_2 \mathbf{n}_{12})}{r} - \\ &- \frac{a^2}{2} \frac{(\alpha_1 \alpha_2) - 3(\alpha_1 \mathbf{n}_{12})(\alpha_2 \mathbf{n}_{12})}{r^3}, \quad \mathbf{n}_{12} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/r, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где r – расстояние между электронами атомов 1 и 2. Оператор $\mathcal{B}$ учитывает дополнительное запаздывание во взаимодействии двух атомных электронов, находящихся на произвольном расстоянии друг от друга. При $a \rightarrow 0$ оператор $\mathcal{B}$ переходит в известный оператор Брейта [6].

Матрица (2.10) может быть представлена в виде оператора, если учесть, что для промежуточных состояний l_{-} с отрицательными частотами знаменатели в (2.10) порядка $2mc^2$ и энергии электронов мало отличаются от энергии покоя mc^2 . Введем следующий проекционный оператор:

$$\Lambda_{-} = \frac{mc^2 - H_1}{2mc^2} = \frac{1}{2} \left(1 - \gamma_{41} - \frac{\alpha_1 \mathbf{p}_1}{mc} \right). \quad (2.11)$$

Тогда получим из (2.10)

$$U^{(3)-} = \frac{ie^3}{8\pi mc^2} e^{\frac{i}{c} \omega_0 a} (\gamma_{41} \gamma_{\delta 1} A_{\delta 1} \Lambda_{-} \mathcal{B} + \mathcal{B} \Lambda_{-} \gamma_{41} \gamma_{\delta 1} A_{\delta 1}), \quad \omega_0 = |\omega_p - \omega_n|. \quad (2.12)$$

Таким образом, мы можем ввести дополнительный релятивистский гамильтониан взаимодействия пары электронов с полем реальных фотонов, который будем использовать в дальнейшем наряду с оператором Паули $U^{(1)}$, соответствующим эффектам первого порядка квантовой электродинамики.

А. Нерелятивистское приближение. Осуществим переход к нерелятивистским операторам в (2.9) с помощью следующих волновых функций [6]:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \chi = \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{2mc}, \quad \varphi = \left(1 - \frac{p^2}{8m^2 c^2}\right) \Phi, \quad (2.13)$$

где σ – матрицы Паули; χ, φ, Φ – некоторые двухкомпонентные волновые функции атомных электронов.

Подставляя (2.13) в матрицу (2.9), рассмотрим отдельно часть с промежуточными состояниями l_- . После ряда преобразований получим следующий нерелятивистский оператор:

$$\begin{aligned} U_{NR}^{(3)-} = & \frac{e^3}{8\pi m^2 c^3} e^{\frac{i}{c}\omega_0 a} \left\{ -\frac{1}{r^2} \boldsymbol{\sigma}_1 [\mathbf{A}_1 \times \mathbf{n}_{12}] + \frac{1}{r} [(\mathbf{A}_1 \mathbf{p}_2) + \right. \\ & + (\mathbf{A}_1 \mathbf{n}_{12})(\mathbf{n}_{12} \mathbf{p}_2)] + \frac{1}{r^2} \boldsymbol{\sigma}_2 [\mathbf{n}_{12} \times \mathbf{A}_1] + \\ & \left. + \frac{a^2}{r^3} [(\mathbf{A}_1 \mathbf{p}_2) - 3(\mathbf{A}_1 \mathbf{n}_{12})(\mathbf{n}_{12} \mathbf{p}_2)] + \frac{a^2}{r^4} \boldsymbol{\sigma}_2 [\mathbf{n}_{12} \times \mathbf{A}_1] \right\}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

В случае одного гелиеподобного атома $a \rightarrow 0$ и оператор (2.14) переходит в соответствующий оператор Дрейка [7]. Обратим также внимание на то обстоятельство, что часть оператора (2.14), не зависящая от спинных операторов, может быть получена с помощью функции Лагранжа системы взаимодействующих движущихся зарядов с точностью до v^2/c^2 (v – скорость движения зарядов) [2], если перейти к атомным системам. Заменяя импульсы электронов на соответствующие операторы $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}$, получим гамильтониан взаимодействия типа $\mathbf{p}_1 \mathbf{A}_2$, где операторы $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{A}_2$ принадлежат различным электронам.

С помощью волновых функций (2.13) запишем также нерелятивистский оператор Паули [6]:

$$U_{NR}^{(1)} = -\frac{e}{mc} \mathbf{p}_1 \mathbf{A}_1 - \frac{e}{mc} \boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{H}_1 + \frac{e}{8m^3 c^3} \left[\left(\mathbf{p}_1 \mathbf{A}_1 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{H}_1 \right), \mathbf{p}_1^2 \right], \quad (2.15)$$

где H_1 – напряженность магнитного поля в месте расположения 1-го атома. Мы видим, что взаимодействие (2.15) в отличие от взаимодействия (2.14) является локальным, т.е. излучение или поглощение реального фотона осуществляется тем атомом, который изменяет свое энергетическое состояние.

Рассмотрим теперь часть матрицы (2.9) с промежуточными состояниями l_+ , используя волновые функции (2.13). Опуская громоздкие преобразования, получим

$$\begin{aligned} U_{mn,pr}^{(3)+} = & \sum_{l_+} \frac{\langle \Phi_{pr} | U_{NR1}^{(1)} | \Phi_{pl} \rangle \langle \Phi_{pl} | U_{NR}^{(2)} | \Phi_{mn} \rangle}{\omega_l(1-i0) + \omega - \omega_r} + \\ & + \frac{\langle \Phi_{pr} | U_{NR}^{(2)} | \Phi_{nl} \rangle \langle \Phi_{nl} | U_{NR}^{(1)} | \Phi_{mn} \rangle}{\omega_l(1-i0) - \omega - \omega_m}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где $\Phi_{pr} = \Phi_p(\mathbf{r}_1)\Phi_r(\mathbf{r}_2)$ и т.д. являются несимметризованными произведениями двухкомпонентных волновых функций (2.13) различных электронов и оператор $U_{NR}^{(2)}$ есть обобщенный брейтовский оператор, соответствующий оператору (2.10):

$$\begin{aligned} U_{NR}^{(2)} = & \frac{e^2}{4\pi} \frac{b}{r} - \frac{e^2}{8\pi m^2 c^2} \frac{b}{r} [(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2) + \mathbf{n}(\mathbf{n} \mathbf{p}_1) \mathbf{p}_2] + \\ & + \frac{e^2}{4\pi m c} \frac{ab}{r^2} (\mathbf{p}_2 \mathbf{n}) - \frac{e^2}{8\pi m^2 c^2} \frac{a^2 b}{r^3} [(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2) - 3\mathbf{n}(\mathbf{n} \mathbf{p}_1) \mathbf{p}_2] + \\ & + \frac{e^2 \hbar}{16\pi m^2 c^2} \frac{b}{r^2} \left\{ [\mathbf{n} \times \mathbf{p}_1] \sigma_1 - [\mathbf{n} \times \mathbf{p}_2] \sigma_2 + 2[\mathbf{n} \times \mathbf{p}_1] \sigma_2 - \right. \\ & \left. - 2[\mathbf{n} \times \mathbf{p}_2] \sigma_1 \right\} + \frac{e^2 \hbar^2}{16\pi m^2 c^2} \frac{b}{r^3} [(\sigma_1 \sigma_2) - 3(\mathbf{n} \sigma_1)(\mathbf{n} \sigma_2)] - \\ & - \frac{3e^2 \hbar^2}{8\pi m^2 c^2} \frac{ba^2}{r^5} [(\sigma_1 \sigma_2) - (\mathbf{n} \sigma_1)(\mathbf{n} \sigma_2)], \quad b = \exp\left(\frac{i}{c} \omega_0 a\right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Роль различных слагаемых (2.17) во взаимодействии (2.16) будет определяться типом квантового перехода в спектре атомов. В этой статье мы ограничимся рассмотрением только электрических дипольных переходов, для которых оператор $U_{NR}^{(2)}$ имеет вид

$$\begin{aligned} U_{NR}^{(2)} = & \frac{b}{4\pi} \left\{ \frac{(\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2) - 3(\mathbf{n} \mathbf{d}_1)(\mathbf{n} \mathbf{d}_2)}{a^3} + \frac{e}{mc} \frac{(\mathbf{p}_2 \mathbf{d}_1) - 3(\mathbf{n} \mathbf{p}_2)(\mathbf{n} \mathbf{d}_1)}{a^2} - \right. \\ & \left. - \frac{e^2}{m^2 c^2} \frac{(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2) - (\mathbf{n} \mathbf{p}_1)(\mathbf{n} \mathbf{p}_2)}{a} \right\}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где $\mathbf{d}_1 = e\xi_1$, $\mathbf{d}_2 = e\xi_2$ – операторы дипольных моментов.

Б. Эффективный гамильтониан взаимодействия пары атомов с полем излучения. Объединим эффекты первого и третьего порядков квантовой электродинамики и запишем эффективный гамильтониан взаимодействия атомов в следующем виде:

$$H_1 = -\frac{e}{mc} \mathbf{p}_1 (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1^{(p)} + \mathbf{A}_1^{(e)}), \quad (2.19)$$

где $\mathbf{A}_1$ – оператор векторного потенциала свободного квантованного электромагнитного поля (2.5) в месте расположения атома 1; векторные потенциалы $\mathbf{A}_1^{(e)}$ и $\mathbf{A}_1^{(p)}$ соответствуют взаимодействиям (2.16) и (2.14), соответственно. При этом оператор $\mathbf{A}_1^{(e)}$ будем называть электронным поляризующим полем в соответствии с типом промежуточных состояний l_+ , а оператор $\mathbf{A}_1^{(p)}$, соответствующий промежуточным состояниям l_- с отрицательной частотой, будем называть позитронным поляризующим полем. В наших прежних работах роль этих полей исследовалась для одноатомных квантовых переходов в различных явлениях нелинейной [2] и квантовой оптики [8].

Рассмотрим двухатомные квантовые переходы, когда два атома 1 и 2, находящихся в одинаковых квантовых состояниях, могут одновременно изменить свое состояние и излучить или поглотить один фотон удвоенной энергии. Выделим в спектре атомов 1 и 2 два энергетических уровня E_+ и E_- , которые могут быть связаны квазирезонансным электрическим дипольным переходом. При этом разность энергий $E_+ - E_- = \hbar\omega_0$. Очевидно, что двухатомный переход с излучением (поглощением) фотона с энергией $2\hbar\omega_0$ может быть вызван в нашем рассмотрении только взаимодействиями (2.16) и (2.14) в гамильтониане (2.19). Схема квантовых переходов имеет следующий вид. Пусть начальное состояние пары атомов описывается волновой функцией $\Phi_+(\mathbf{r}_1)\Phi_+(\mathbf{r}_2)$ с энергиями

E_+ для каждого атома. В результате взаимодействия атомов через поле виртуальных фотонов один из атомов, например атом 1, переходит в некоторое промежуточное состояние $l_{\pm}$ с положительной либо отрицательной частотой. Атом 2 при этом не меняет свое состояние. Затем два атома одновременно переходят в состояние $\Phi_-(\mathbf{r}_1)\Phi_-(\mathbf{r}_2)$ с энергией E_- с излучением фотона удвоенной энергии $2\hbar\omega_0$.

Вычислим матричный элемент перехода оператора (2.19) для взаимодействия (2.16), соответствующего наведению электронного поляризующего поля в месте расположения атома 1. Выделим при этом в поляризующем поле $A^{(e)}$ только запаздывающую часть, зависящую от межатомного расстояния как $1/r$. Выделяя в операторе (2.18) соответствующее слагаемое, получим

$$M_{--,++}^{(e)} = \frac{e^3}{4\pi m^3 c^3 \hbar} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V_R \omega_{\mathbf{k}}}} c_{\mathbf{k}\lambda}^+ e^{-i\mathbf{k}\mathbf{a}_1} \frac{\exp\left(\frac{i}{c}\omega_0 a\right)}{a} \times \\ \times \sum_{l_{\pm}} \left\{ \frac{1}{\omega_l(1-i0) + \omega_{\mathbf{k}} - \omega_-} (\mathbf{p}_1 \mathbf{e}_{\lambda\mathbf{k}})_{-l} [(\mathbf{p}_1)_{l+} (\mathbf{p}_2)_{-+} - (\mathbf{n}\mathbf{p}_1)_{l+} (\mathbf{n}\mathbf{p}_2)_{-+}] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\omega_l(1-i0) - \omega_{\mathbf{k}} - \omega_+} [(\mathbf{p}_1)_{-l} (\mathbf{p}_2)_{-+} - (\mathbf{n}\mathbf{p}_1)_{-l} (\mathbf{n}\mathbf{p}_2)_{-+}] (\mathbf{p}_1 \mathbf{e}_{\lambda\mathbf{k}})_{l+} \right\}. \quad (2.20)$$

В работах Декстера [9], а также в других работах по кооперативной люминесценции [10] при вычислении искажений волновых функций свободных атомов, вносимых межатомным взаимодействием, учитывалось только мгновенное кулоновское взаимодействие (члены $\sim 1/a^3$ в операторе (2.18)). Наше рассмотрение является более общим благодаря использованию обобщенного брейтовского оператора $U_{NR}^{(2)}$, включающего все типы взаимодействия атомных электронов.

Механизм удвоения частоты посредством электронных промежуточных состояний, как видно из (2.20), обладает следующими основными свойствами: 1) сильной зависимостью от дипольных моментов перехода атомов, а также от их взаимной ориентации; 2) резонансным характером взаимодействия. Так, если промежуточный уровень обладает удвоенной энергией, то процесс будет протекать со значительно большей интенсивностью.

Рассмотрим теперь механизм удвоения частоты, обусловленный частью оператора (2.19), пропорциональной $\mathbf{A}_1^{(p)}$, когда в спектре взаимодействующих атомов учитываются промежуточные состояния с отрицательной частотой. Соответствующий матричный элемент перехода имеет вид

$$M_{--,++}^{(p)} = -\frac{ie^3}{4\pi m^2 c^3} \frac{\exp\left(\frac{i}{c}\omega_0 a\right)}{a} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V_R \omega_{\mathbf{k}}}} c_{\mathbf{k}\lambda}^+ e^{-i\mathbf{k}\mathbf{a}_1} \times \\ \times [(\mathbf{e}_{\lambda\mathbf{k}} \mathbf{p}_2)_{-+} - (\mathbf{e}_{\lambda\mathbf{k}} \mathbf{n})(\mathbf{n}\mathbf{p}_2)_{-+}] (\mathbf{k}\xi_1)_{-+}, \quad (2.21)$$

где использовано разложение

$$\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_1) \approx \exp(-ika)(1 - i\mathbf{k}\xi_1 + \dots), \quad (2.22)$$

позволяющее учесть электрический дипольный переход атома 1 во взаимодействии (2.14). В матричных элементах (2.20), (2.21) в соответствии с законом сохранения (2.6) частота $\omega_{\mathbf{k}}$ и волновой вектор $\mathbf{k}$ соответствуют фотону удвоенной энергии.

Механизм удвоения частоты через промежуточные состояния с отрицательной частотой обладает следующими основными свойствами: 1) слабой зависимостью от дипольных моментов атомов; 2) отсутствием резонансных множителей, указывающим на то, что процесс удвоения частоты такого типа не зависит от наличия в спектре атомов резонансного уровня с удвоенной энергией.

Сравнивая матричные элементы (2.21) и (2.20), мы можем заключить, что эти матричные элементы могут быть сравнимы по величине, если удвоение частоты, обусловленное электронными промежуточными состояниями, протекает вдали от резонанса, когда в спектре взаимодействующих атомов отсутствует уровень с удвоенной энергией.

3. СИСТЕМА N ДВУХУРОВНЕВЫХ АТОМОВ

Пусть Φ_+ , Φ_- – волновые функции двух квантовых состояний в спектре взаимодействующих атомов и энергии этих состояний равны E_+ , E_- , соответственно ($E_+ > E_-$). Ограничимся двухуровневым приближением, полагая, что в спектре атомов не существует уровня с удвоенной энергией $2(E_+ - E_-)$ и другие уровни атома расположены так, что их частоты переходов заметно отличаются от разности $(E_+ - E_-)/\hbar$. Кроме этого, необходимо предположить, что вероятность переходов с других уровней на данные два уровня E_+ , E_- и с данных уровней на другие уровни достаточно мала. Такая ситуация вполне реальна и имеет место, например, если E_+ , E_- – два нижних уровня в спектре атомов.

Двухуровневые атомы опишем с помощью векторного оператора $\mathbf{r}_i\{r_{1i}, r_{2i}, r_{3i}\}$, характеризующего эффективный спин $r = 1/2$ [11]. Применение этого обозначения не вызовет недоразумений, поскольку в электрическом дипольном приближении местоположение атомов в системе будет определяться вектором $\mathbf{a}_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Свойства операторов эффективного спина определим с помощью следующих коммутационных соотношений:

$$[r_{1k}, r_{2j}] = ir_{3k}\delta_{kj}, \quad [r_{2k}, r_{3j}] = ir_{1k}\delta_{kj}, \quad [r_{3k}, r_{1j}] = ir_{2k}\delta_{kj}. \quad (3.1)$$

В представлении, в котором оператор r_{3j} диагонален, мы имеем следующие матрицы:

$$r_{1j} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_j, \quad r_{2j} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}_j, \quad r_{3j} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_j. \quad (3.2)$$

Теперь с помощью двухрядных матриц (3.2) мы можем выразить произвольный оператор, относящийся к двухуровневому атому, в виде линейной комбинации этих матриц и единичного оператора I . Например, для оператора электрического дипольного момента j -го атома получим

$$\mathbf{d}_j = (\mathbf{d}_{-+} + \mathbf{d}_{+-})r_{1j} + i(\mathbf{d}_{-+} - \mathbf{d}_{+-})r_{2j}, \quad (3.3)$$

где $\mathbf{d}_{-+}$, $\mathbf{d}_{+-}$ – матричные элементы оператора дипольного момента отдельного атома, вычисленные с помощью волновых функций Φ_+ , Φ_- . Путем соответствующего выбора случайных фаз этих волновых функций мы можем добиться того, чтобы матричный элемент $\mathbf{d}_{+-}$ являлся вещественной величиной, т.е. $\mathbf{d}_{+-} = d\mathbf{u}_d$, где $\mathbf{u}_d$ – единичный вещественный вектор. Тогда в представлении эффективного спина запишем полный оператор Гамильтона системы, учитывая гамильтониан взаимодействия (2.19):

$$H = H_0 + H_1^{(1)} + H_1^{(p)} + H_1^{(e)} + H_F, \quad (3.4)$$

где оператор

$$H_0 = \hbar\omega_0 R_3, \quad R_3 = \sum_{j=1}^N r_{3j}, \quad (3.5)$$

ω_0 – частота перехода ($\omega_0 = (E_+ - E_-)/\hbar$);

$$H_1 = \sum_{\mathbf{k}\lambda} g_{\mathbf{k}\lambda} (R_{\mathbf{k}+} c_{\mathbf{k}\lambda} - R_{\mathbf{k}-} c_{\mathbf{k}\lambda}^+), \quad (3.6)$$

где коллективные операторы $R_{\mathbf{k}\pm}$ имеют вид

$$R_{\mathbf{k}\pm} = \sum_{j=1}^N r_{\pm j} \exp(\pm i\mathbf{k}\mathbf{a}_j), \quad r_{\pm j} = r_{1j} \pm ir_{2j}. \quad (3.7)$$

Константа взаимодействия отдельного атома с полем фотонов в месте расположения этого атома в соответствии с видом оператора Паули (2.15) равна

$$g_{\mathbf{k}\lambda} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V_R\omega_k}} (\mathbf{e}_{\lambda\mathbf{k}} \mathbf{u}_d) \omega_0 d. \quad (3.8)$$

Оператор (3.6) записан в приближении вращающейся волны. Оператор свободного поля фотонов H_F имеет следующий вид:

$$H_F = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar\omega_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\lambda}^+ c_{\mathbf{k}\lambda}. \quad (3.9)$$

Используя явное выражение матричного элемента (2.22) для системы N двухуровневых атомов, получим следующий оператор $H_1^{(p)}$:

$$H_1^{(p)} = \sum_{\mathbf{k}\lambda} G_{\mathbf{k}}^{(p)} (-R_- \mathcal{R}_{\mathbf{k}-}^{(p)} c_{\mathbf{k}\lambda}^+ + R_+ \mathcal{R}_{\mathbf{k}+}^{(p)} c_{\mathbf{k}\lambda}), \quad (3.10)$$

где константа взаимодействия $G_{\mathbf{k}}^{(p)}$, соответствующая механизму удвоения частоты через позитронные промежуточные состояния, равна

$$G_{\mathbf{k}}^{(p)} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V_R\omega_{\mathbf{k}}}} \frac{ed^2\omega_0 k(\mathbf{k}\mathbf{u}_d)}{4\pi mc^2}. \quad (3.10a)$$

Коллективные операторы в гамильтониане (3.10) имеют вид

$$\mathcal{R}_{\mathbf{k}\pm}^{(p)} = \sum_{j=1}^{N-1} b_{ij}^{(p)} r_{\pm j} e^{\pm i\mathbf{k}\mathbf{a}_j}, \quad (3.10б)$$

$$b_{ij}^{(p)} = \mathbf{c}_{ij}^{(p)} \mathbf{u}_d, \quad \mathbf{c}_{ij}^{(p)} = \frac{\exp\left(\frac{i}{e}\omega_0 a_{ij}\right)}{ka_{ij}} [\mathbf{e}_{\lambda k} - (\mathbf{e}_{\lambda k} \mathbf{n}_{ij}) \mathbf{n}_{ij}],$$

$$R_{\pm} = \sum_{j=1}^N r_{\pm j}, \quad R_{\pm} = R_1 \pm iR_2. \quad (3.10в)$$

Коэффициенты $b_{ij}^{(p)}$, как видно из (3.10в), зависят также от индексов λk . В операторе (3.10) мы предполагаем, что позитронное поляризующее поле, действующее на каждый j -й атом, является одинаковым. Очевидно, что такое предположение справедливо для точек наблюдения $\mathbf{a}_j$, находящихся вдали от границы среды. Именно этот случай мы и будем рассматривать.

Аналогичным образом запишем оператор $H_1^{(e)}$, соответствующий другому механизму удвоения частоты через электронные промежуточные состояния, учитывая матричные элементы (2.20), (2.16). При этом мы учтем также остальные слагаемые, определяющие электронное поляризующее поле, пропорциональные $1/a_{ij}^2$ и $1/a_{ij}^3$, в соответствии с видом оператора (2.18). Тогда оператор $H_1^{(e)}$ в представлении эффективного спина примет вид

$$H_1^{(e)} = \sum_{\mathbf{k}\lambda} G_{\mathbf{k}}^{(e)} \left(R_+ \mathcal{R}_{\mathbf{k}+}^{(e)} c_{\mathbf{k}\lambda} - R_- \mathcal{R}_{\mathbf{k}-}^{(e)} c_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \right), \quad (3.11)$$

где

$$G_{\mathbf{k}}^{(e)} = -\frac{ie\omega_0}{4\pi k} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V_R\omega_{\mathbf{k}}}} (\mathbf{u}_d \mathbf{e}_{\lambda\mathbf{k}}) \quad (3.11a)$$

и коллективный оператор $\mathcal{R}_{\mathbf{k}\pm}^{(e)}$ имеет вид, аналогичный (3.10б), но с другими коэффициентами $b_{ij}^{(e)}$:

$$\begin{aligned} b_{ij}^{(e)} = & \frac{k}{\hbar} \exp\left(\frac{i}{c}\omega_0 a_{ij}\right) \sum_{l+} \left\{ \frac{\langle +|\xi_i|-\rangle}{\omega_l(1-i0) + \omega_k - \omega_+} \times \right. \\ & \times \left[\frac{(\mathbf{d}_i)_{l-}(\mathbf{d}_j)_{+-} - 3(\mathbf{n}_{ij}\mathbf{d}_i)_{l-}(\mathbf{n}_{ij}\mathbf{d}_j)_{+-}}{a_{ij}^3} + \right. \\ & + \frac{e}{mc} \frac{(\mathbf{d}_i)_{l-}(\mathbf{p}_j)_{+-} - 3(\mathbf{n}_{ij}\mathbf{p}_j)_{+-}(\mathbf{n}_{ij}\mathbf{d}_i)_{l-}}{a_{ij}^2} - \\ & - \frac{e^2}{m^2c^2} \frac{(\mathbf{p}_i)_{l-}(\mathbf{p}_j)_{+-} - (\mathbf{n}_{ij}\mathbf{p}_i)_{l-}(\mathbf{n}_{ij}\mathbf{p}_j)_{+-}}{a_{ij}} \left. \right] + \\ & + \frac{1}{\omega_l(1-i0) - \omega_k - \omega_-} \left[\frac{(\mathbf{d}_i)_{+l}(\mathbf{d}_j)_{+-} - 3(\mathbf{n}_{ij}\mathbf{d}_i)_{+l}(\mathbf{d}_j\mathbf{n}_{ij})_{+-}}{a_{ij}^3} + \right. \\ & + \frac{e}{mc} \frac{(\mathbf{p}_j)_{+-}(\mathbf{d}_i)_{+l} - 3(\mathbf{p}_j\mathbf{n}_{ij})_{+-}(\mathbf{d}_i\mathbf{n}_{ij})_{+l}}{a_{ij}^2} - \\ & - \frac{e^2}{m^2c^2} \frac{(\mathbf{p}_i)_{+l}(\mathbf{p}_j)_{+-} - (\mathbf{n}_{ij}\mathbf{p}_i)_{+l}(\mathbf{n}_{ij}\mathbf{p}_j)_{+-}}{a_{ij}} \left. \right] \langle l|\xi_i|-\rangle \left. \right\}. \quad (3.11б) \end{aligned}$$

Величина $G_{\mathbf{k}}^{(e)}$ имеет размерность энергии, а коэффициенты (3.11б) являются безразмерными величинами, поэтому операторы $\mathcal{R}_{\mathbf{k}\pm}^{(e)}$, так же как и операторы (3.10б), являются безразмерными.

В модели Дикке сосредоточенной системы N двухуровневых атомов квантовые состояния определяются с помощью коллективных операторов

$$R_1 = \sum_{j=1}^N r_{1j}, \quad R_2 = \sum_{j=1}^N r_{2j}, \quad R_3 = \sum_{j=1}^N r_{3j}, \quad (3.12)$$

которые обладают всеми свойствами оператора момента количества движения. Действительно, используя соотношения коммутации (3.1), получим аналогичные соотношения для операторов (3.12):

$$[R_1, R_2] = iR_3, \quad [R_2, R_3] = iR_1, \quad [R_3, R_1] = iR_2. \quad (3.13)$$

Для сосредоточенных систем, когда объем V , занимаемый системой, значительно меньше λ_0^3 (λ_0 – длина волны излучаемых фотонов на переходе $\Phi_+ \leftrightarrow \Phi_-$), имеем следующие интегралы движения [11]:

$$R^2 = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2, \quad R_3, \quad (3.14)$$

где $[R^2, R_3] = 0$. Поэтому квантовые состояния определяются из операторных уравнений

$$R^2|RM\rangle = R(R+1)|RM\rangle, \quad R_3|RM\rangle = M|RM\rangle, \quad (3.15)$$

где R – кооперационное число [11], $|RM\rangle$ – волновые функции Дикке.

Отличные от нуля матричные элементы операторов (3.12) вычисляются с помощью перестановочных соотношений (3.13) и имеют вид [11]

$$\begin{aligned} \langle RM|R^2|RM\rangle &= R(R+1), & \langle RM|R_3|RM\rangle &= M, \\ \langle RM|R_+|RM-1\rangle &= \langle RM-1|R_-|RM\rangle = [(R+M)(R-M+1)]^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Теперь мы можем вычислить вероятности квантовых переходов под действием гамильтониана взаимодействия (3.6), используя свойства операторов (3.16). В первом порядке нерелятивистской теории возмущений мы можем вычислить интенсивность квантового перехода, когда в каждом элементарном акте излучения (поглощения) участвует один фотон с энергией $\hbar\omega_0$, при этом квантовое число M системы атомов меняется на единицу, т.е. $\Delta M = \pm 1$. Интенсивность такого перехода определяется известной формулой [11] для чистых квантовых состояний $|RM\rangle$

$$I = I_0(R+M)(R-M+1), \quad (3.17)$$

где I_0 – интенсивность излучения изолированным атомом.

Переходы $\Delta M = \pm 2$ в рассматриваемой системе под действием оператора (3.16) возможны во втором порядке теории возмущений, однако такой процесс является двухфотонным и удвоения частоты фотона не происходит.

Для осуществления однофотонных квантовых переходов в системе N двухуровневых атомов с $\Delta M = \pm 2$, протекающих с удвоением частоты фотона, необходимо включить в наше рассмотрение динамическое взаимодействие атомов в поле излучения, которое характеризуется гамильтонианами $H_1^{(p)}$, $H_1^{(e)}$. Учет этого взаимодействия требует обобщения модели Дикке, в которой учитывалось лишь взаимодействие атомов через общее поле излучения.

А. Интегралы движения обобщенной модели Дикке. Рассмотрим случай протяженных систем $V \gtrsim \lambda_0^3$, в которых осуществляются квантовые переходы под действием оператора $H_1^{(e)} + H_1^{(p)}$.

Как известно [11], в модели Дикке протяженных сред вводятся следующие интегралы движения:

$$R_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2}(R_{k+}R_{k-} + R_{k-}R_{k+}) + R_3^2, \quad R_3. \quad (3.18)$$

При этом оператор $R_{\mathbf{k}}^2$ коммутирует с оператором Гамильтона $H_0 + H_1^{(1)}$ в одномоновом приближении. Далее, поскольку оператор $R_{\mathbf{k}}^2$ коммутирует с оператором R_3 , квантовые состояния системы атомов можно характеризовать, как и прежде, с помощью квантовых чисел R и M .

Чтобы описать однофотонные квантовые переходы в системе N атомов с $\Delta M = \pm 2$, рассмотрим свойства операторов

$$\mathcal{R}_{\mathbf{k}}^{\pm} = \sum_j b_j^{\pm} r_{\pm j} e^{\pm i \mathbf{k} \mathbf{a}_j}, \quad (3.19)$$

где $b_j^{\pm}$ — некоторые коэффициенты. Зная соотношения коммутации операторов $r_{\pm j}$ (3.1), найдем

$$[\mathcal{R}_{\mathbf{k}}^+, \mathcal{R}_{\mathbf{k}}^-] = 2\mathcal{R}_3, \quad [\mathcal{R}_{\mathbf{k}}^{\pm}, R_3] = \mp \mathcal{R}_{\mathbf{k}}^{\pm}, \quad (3.20)$$

где

$$\mathcal{R}_3 = \sum_{j=1}^N b_j^+ b_j^- r_{3j}. \quad (3.20a)$$

Введем оператор

$$\mathcal{R}_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2}(\mathcal{R}_{\mathbf{k}}^+ \mathcal{R}_{\mathbf{k}}^- - \mathcal{R}_{\mathbf{k}}^- \mathcal{R}_{\mathbf{k}}^+) + R_3 \mathcal{R}_3. \quad (3.21)$$

Легко показать, что этот оператор коммутирует с R_3 , т.е.

$$[\mathcal{R}_{\mathbf{k}}^2, R_3] = 0. \quad (3.22)$$

Используя соотношения коммутации (3.20), видим, что

$$[\mathcal{R}_{\mathbf{k}}^2, \mathcal{R}_{\mathbf{k}}^{\pm}] = 0. \quad (3.23)$$

Таким образом, из (3.22) следует, что операторы $\mathcal{R}_{\mathbf{k}}^2, R_3$ являются интегралами движения и имеют одинаковый набор собственных функций, в данном случае волновых функций Дикке $|RM\rangle$. Следовательно,

$$\mathcal{R}_{\mathbf{k}}^2 |RM\rangle = r_{\mathbf{k}}^2 |RM\rangle, \quad (3.24)$$

где возможные значения $r_{\mathbf{k}}^2$ определяются из перестановочных соотношений (3.20).

Вычислим матричные элементы операторов $\mathcal{R}_{\mathbf{k}}^{\pm}$, а также величину $r_{\mathbf{k}}^2$. Для этого образуем матричные элементы с помощью функций $|RM\rangle$ от перестановочного соотношения (3.23). Учитывая (3.24), получим

$$\langle R'M' | [\mathcal{R}_{\mathbf{k}}^2, \mathcal{R}_{\mathbf{k}}^{\pm}] | RM \rangle = \langle R'M' | \mathcal{R}_{\mathbf{k}}^{\pm} | RM \rangle \{ \langle R'M' | \mathcal{R}_{\mathbf{k}}^2 | R'M' \rangle - \langle RM | \mathcal{R}_{\mathbf{k}}^2 | RM \rangle \} = 0.$$

Из этого равенства следует, что

$$\langle R'M' | \mathcal{R}_{\mathbf{k}}^{\pm} | RM \rangle = A_{RM'M'} \delta_{R'R}, \quad (3.25)$$

т.е. оператор $\mathcal{R}_{\mathbf{k}}^{\pm}$ имеет отличные от нуля только диагональные элементы по квантовому числу R .

Вычислим матричные элементы от перестановочного соотношения (3.20). Поскольку

$$\langle RM' | [R_3, \mathcal{R}_{\mathbf{k}}^{\pm}] | RM \rangle = (M' - M) \langle RM' | \mathcal{R}_{\mathbf{k}}^{\pm} | RM \rangle,$$

имеем еще одно важное соотношение

$$(M' - M - 1)\langle RM' | \mathcal{R}_{\mathbf{k}}^+ | RM \rangle = 0. \quad (3.26)$$

Из равенств (3.26), (3.25) следует, что

$$\langle RM' | \mathcal{R}_{\mathbf{k}}^+ | RM \rangle = A_{R, M+1, M} \delta_{M+1, M'}. \quad (3.27)$$

Теперь вычислим матричный элемент от перестановочного соотношения (3.20):

$$\langle RM' | [\mathcal{R}_{\mathbf{k}}^+, \mathcal{R}_{\mathbf{k}}^-] | RM \rangle = 2\overline{M} \delta_{M' M}, \quad (3.28)$$

где $\overline{M}$ – собственные значения оператора $\mathcal{R}_3$. Левую часть этого равенства при $M = M'$ можно преобразовать, используя (3.27),

$$\langle RM | [\mathcal{R}_{\mathbf{k}}^+, \mathcal{R}_{\mathbf{k}}^-] | RM \rangle = |A_{R, M-1, M}|^2 - |A_{R, M, M+1}|^2. \quad (3.29)$$

Подставляя (3.29) в (3.28), получим разностное уравнение

$$|A_{R, M-1, M}|^2 - |A_{R, M, M+1}|^2 = 2\overline{M}, \quad (3.30)$$

определяющее зависимость величин $|A_{R, M, M+1}|^2$ от квантового числа M с точностью до постоянной величины, зависящей от R . При $\overline{M} = M$ имеем

$$2|A_{R, M, M+1}|^2 = C_R - M(M+1).$$

Подставим в это выражение последовательно наибольшее значение M , равное R , и наименьшее, равное M_2 , при которых

$$\begin{aligned} A_{R, R, R+1} &= \langle R, R+1 | \mathcal{R}_{\mathbf{k}}^+ | RR \rangle = 0, \\ A_{R, M_2, M_2-1} &= \langle RM_2 | \mathcal{R}_{\mathbf{k}}^+ | RM_2 - 1 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Тогда из квадратного уравнения $C_R - M(M+1) = 0$ получим

$$R = -\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 + 4C_R} \right), \quad M_2 - 1 = -\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4C_R} \right),$$

следовательно, $C_R = R(R+1)$, $M_2 = -R$, т.е. квантовые числа оператора $\mathcal{R}_3$ должны пробегать отличающиеся на единицу значения, лежащие в интервале $-R \leq M \leq R$.

Теперь мы можем определить значение $A_{R, M, M+1}$ с точностью до фазового множителя, модуль которого равен 1:

$$\sqrt{2} A_{R, M, M+1} = \sqrt{(R-M)(R+M+1)}.$$

Подставляя это значение в (3.27), находим

$$\langle RM+1 | \mathcal{R}_{\mathbf{k}}^+ | RM \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(R-M)(R+M+1)} = \langle RM | \mathcal{R}_{\mathbf{k}}^- | RM+1 \rangle.$$

Найдем также собственные значения оператора $\mathcal{R}_{\mathbf{k}}^2$. Используя равенство $\mathcal{R}_{\mathbf{k}}^+ | RR \rangle = 0$, получим $r_{\mathbf{k}}^2 = R(R+1)$.

Учитывая свойства операторов (3.19), входящих в гамильтонианы (3.11), (3.10), как будет показано ниже, можно рассмотреть коллективные процессы в системе двухуровневых атомов с участием двухатомных переходов. Тем самым будет проведено обобщение модели Дикке, в которой интенсивность соответствующего коллективного процесса будет описываться более сложной, чем (3.17), формулой.

Б. Интенсивность переходов $\Delta M = \pm 2$ в системе атомов. Пусть система атомов находится в коллективном состоянии с волновой функцией $|RM\rangle$. Найдем вероятность излучения одного фотона удвоенной энергии системой атомов. Используя свойства коллективных операторов, вычислим матричный элемент перехода гамильтониана (3.10):

$$(M^{(p)})_{RM}^{RM-2} = G_{\mathbf{k}}^{(p)}(n_{\mathbf{k}}+1)^{1/2}[(R+M)(R-M+1)]^{1/2}[(R+M+1)(R-M+2)]^{1/2}.$$

Интенсивность процесса определим по следующей формуле:

$$I_{\mathbf{k}}^{(p)} = I_{0\mathbf{k}}^{(p)}(R+M)(R-M-1)(R-M+2)(R+M+1), \quad (3.31)$$

где величина $I_{0\mathbf{k}}^{(p)}$ легко находится в первом порядке нерелятивистской теории возмущений с константой связи (3.10а):

$$I_{0\mathbf{k}}^{(p)} = (n_{\mathbf{k}}+1) \frac{e^2 d^4}{4m^2 c^4} \omega_0^2 (\mathbf{k} \mathbf{u}_d)^2 k^2 \frac{\omega_k^2 \Delta\Omega}{(2\pi c)^3}, \quad (3.31a)$$

здесь $\omega_{\mathbf{k}}$ — частота фотона ($\hbar\omega_{\mathbf{k}} \approx 2\hbar\omega_0$); $\Delta\Omega$ — элемент телесного угла, в пределах которого наблюдается излучение фотонов удвоенной энергии с волновым вектором $\mathbf{k}$; $n_{\mathbf{k}}$ — число фотонов моды $\mathbf{k}$.

Аналогичным образом запишем формулу для интенсивности излучения на двойной частоте благодаря двухатомным переходам в системе N двухуровневых атомов под действием гамильтониана (3.11). Учитывая плотность числа состояний поля на частоте $\omega_{\mathbf{k}} \approx 2\omega_0$, найдем интенсивность соответствующего процесса удвоения частоты с вылетом фотонов в направлении телесного угла $\Delta\Omega$:

$$I_{\mathbf{k}}^{(e)} = I_{0\mathbf{k}}^{(e)}(R+M)(R-M-1)(R-M+2)(R+M+1), \quad (3.32)$$

где

$$I_{0\mathbf{k}}^{(e)} = (n_{\mathbf{k}}+1) |G_{\mathbf{k}}^{(e)}|^2 \frac{2\pi V_R \omega_{\mathbf{k}}^3 \Delta\Omega}{(2\pi c)^3 \hbar}. \quad (3.32a)$$

Пусть начальное состояние системы таково, что $R = M = N/2$, когда все атомы находятся в возбужденном состоянии с энергией $\hbar\omega_+$. Тогда при $N \gg 1$ получим из (3.31), что интенсивность излучения на двойной частоте $I \sim 2I_{0\mathbf{k}}N^2$, что соответствует некогерентному излучению фотонов различными парами атомов в системе. Если начальное состояние системы определяется квантовыми числами $R = N/2$, $M = 0$, то интенсивность излучения $I_{\mathbf{k}} \sim (1/16)I_{0\mathbf{k}}N^4$, что соответствует когерентному излучению различных пар атомов на частоте $2\omega_0$.

Перейдем от чистых состояний Дикке к смешанным состояниям системы атомов, которые описываются матрицей плотности $\rho(t)$ в некоторый момент времени t . Тогда интенсивность излучения фотонов удвоенной частоты в направлении $\mathbf{k}$ в телесный угол $\Delta\Omega$ выражается через произведение коллективных операторов следующим образом:

$$I_{\mathbf{k}}(t) = \text{Sp}[\rho(t) R_+ \bar{\mathcal{R}}_{\mathbf{k}+} \bar{\mathcal{R}}_{\mathbf{k}-} R_-]. \quad (3.33)$$

Формула (3.33) записана в общем виде и включает в себя операторы $\bar{\mathcal{R}}_{\mathbf{k}} = \bar{\mathcal{R}}_{\mathbf{k}}^{(p)} + \bar{\mathcal{R}}_{\mathbf{k}}^{(e)}$, которые в соответствии с видом гамильтонианов (3.11), (3.10) содержат размерные константы $G_{\mathbf{k}}^{(p)}$ и $G_{\mathbf{k}}^{(e)}$ и слагаемые с различной зависимостью от межатомных расстояний.

Таким образом, мы полагаем в формуле (3.33), что возможна интерференция всех механизмов удвоения частоты в системе N двухуровневых атомов, если эта система находится в коллективном состоянии с матрицей плотности $\rho(t)$.

Итак, учет динамического взаимодействия атомов в поле излучения позволяет описать качественно иные квантовые переходы в системе двухуровневых атомов с помощью формулы (3.33). Мы предполагаем исследовать в последующих работах на основе этой формулы свойства фотонного эха на двойной частоте.

Список литературы

- [1] *Dicke R.H.* // Phys. Rev. 1954. V. 93. №1. P. 99–110.
- [2] *Гадомский О.Н., Власов Р.А.* Оптическая эхо-спектроскопия поверхности. Минск: Наука и техника, 1990.
- [3] *Абрагам А.* Ядерный магнетизм. М.: ИИЛ, 1963.
- [4] *Гадомский О.Н., Нагибаров В.Р., Соловаров Н.К.* // ЖЭТФ. 1976. Т. 70. Вып. 2. С. 435–444; Sov. Phys. JETP. 1976. Т. 43. С. 225.
- [5] *Власов Р.А., Гадомский О.Н., Самарцев В.В.* // ТМФ. 1989. Т. 79. №3. С. 423–436.
- [6] *Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б.* Квантовая электродинамика. М.: Физматгиз, 1959.
- [7] *Drake G.W.F.* // Phys. Rev. 1972. V. 5. P. 1979.
- [8] *Гадомский О.Н., Крутицкий К.В.* // ЖЭТФ. 1994. Т. 106. С. 936.
- [9] *Dexter D.L.* // Phys. Rev. 1962. V. 126. P. 1962.
- [10] *Овсянкин В.В., Феофилов П.П.* // Письма в ЖЭТФ. 1966. Т. 3. С. 494.
- [11] *Аллен Л., Эберли Дж.* Оптический резонанс и двухуровневые атомы. М.: Мир, 1978.

Филиал Московского
государственного университета
в г. Ульяновске

Поступила в редакцию
10.II.1995 г.

E.L. Antipin, O.N. Gadomsky

GENERALIZED DICKE MODEL: TRANSITIONS $\Delta M = \pm 2$

A theory of two-atom quantum transitions with optical photon frequency doubling is developed on the basis of the third order QED effects consisting in virtual photon exchange and emission (absorption) of a double-frequency real photon. In these effects we distinguish two parts of interaction corresponding to intermediate states with positive and negative frequencies. According to this, we consider electronic and positronic polarizations of the medium that leads to the existence of two different mechanisms of frequency doubling. To describe coherent optical processes in electric dipole approximation we developed the generalized Dicke model for the system of N two-level atoms with possible quantum transitions having $\Delta M = \pm 1, \pm 2$, where M is population half-difference of resonant atomic levels. Formula for the intensity of quantum transitions with $\Delta M = \pm 2$ is derived for this model.