Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Славнов, Дифференциальные уравнения для многоточечных корреляционных функций в одномерном непроницаемом бозе-газе, *ТМФ*, 1996, том 106, номер 1, 160–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1105>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 17:24:48

Н. А. Славнов

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ДЛЯ МНОГОТОЧЕЧНЫХ
КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ
В ОДНОМЕРНОМ НЕПРОНИЦАЕМОМ БОЗЕ-ГАЗЕ**

В модели одномерного непроницаемого бозе-газа получено представление для многоточечных разновременных корреляционных функций в виде детерминанта Фредгольма. Получена система дифференциальных уравнений, описывающая данный коррелятор.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема вычисления корреляционных функций является одной из самых важных при исследовании квантовых вполне интегрируемых систем. В настоящей работе мы рассматриваем корреляционные функции одномерных непроницаемых бозонов. В основе нашего описания лежит представление корреляторов в виде фредгольмова детерминанта некоторого оператора, имеющего весьма специальный вид. Впервые такого рода представление было получено А. Ленардом [1] для одновременных температурных корреляционных функций. Двухточечные разновременные корреляторы были вычислены в работе [2].

Для более детального исследования фредгольмовых детерминантов, описывающих корреляционные функции, очень удобным оказался язык классических дифференциальных уравнений [3]. В последние годы этот подход получил новое развитие [4–6]. Основная идея нового подхода заключается в том, что корреляционная функция некоторой квантовой вполне интегрируемой системы, записанная в терминах детерминанта Фредгольма, рассматривается как τ -функция новой классической системы дифференциальных уравнений. При этом полученные классические уравнения оказываются тесно связанными с уравнениями движения исходной квантовой модели. Впервые это было обнаружено в [6] для двухточечного разновременного коррелятора одномерных непроницаемых бозонов. Недавно аналогичные результаты были получены для XXO -цепочки Гейзенберга [7–9]. В конечном итоге упомянутый подход позволяет получить полную информацию о корреляционной функции (асимптотика, поведение на малых расстояниях, критические константы и т.п.) [10–12].

Нашей целью будет исследование многоточечных корреляторов в модели одномерного непроницаемого бозе-газа, которая описывается квантовым нелинейным уравнением

Шредингера (НШ). Гамильтониан модели имеет вид

$$H = \int_{-L/2}^{L/2} (\partial_x \psi^+ \partial_x \psi + c \psi^+ \psi^+ \psi \psi - h \psi^+ \psi) dx, \quad (1.1)$$

где $c > 0$ – константа связи, $h > 0$ – химический потенциал, $\psi(x)$ – каноническое бозе-поле с одновременными перестановочными соотношениями

$$[\psi(x), \psi^+(y)] = \delta(x - y).$$

Граничные условия на $\psi(x)$ предполагаются периодическими: $\psi(x - L/2) = \psi(x + L/2)$. Операторы ψ и ψ^+ действуют в пространстве Фока, причем

$$\psi(x)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\psi^+(x) = 0.$$

Эволюция ψ и ψ^+ по времени задается, как обычно:

$$\psi(x, t) = e^{iHt} \psi(x) e^{-iHt}, \quad \psi^+(x, t) = e^{iHt} \psi^+(x) e^{-iHt}. \quad (1.2)$$

Модель непроницаемого бозе-газа возникает в пределе бесконечной константы связи $c \rightarrow \infty$. При этом собственные функции гамильтониана H имеют вид

$$|\lambda\rangle_N = \frac{1}{\sqrt{N!}} \int_{-L/2}^{L/2} \chi_N(\{x\}, \{\lambda\}) \psi^+(x_1) \dots \psi^+(x_N) |0\rangle, \quad N = 0, 1, \dots, \quad (1.3)$$

где

$$\chi_N(\{x\}, \{\lambda\}) = \frac{1}{\sqrt{L^N N!}} \prod_{j>k}^N \text{sign}(x_j - x_k) \det_N [e^{ix_j \lambda_k}]. \quad (1.4)$$

Нормировочные множители выбраны так, что собственные функции нормированы на единицу: ${}_N \langle \lambda | \lambda \rangle_N = 1$. Параметры λ удовлетворяют условиям

$$e^{iL\lambda_j} = (-1)^{N-1},$$

то есть

$$\lambda_j = \frac{2\pi n}{L}, \quad \text{где} \quad \begin{cases} n \in \mathbb{Z}, & \text{если } N \text{ нечетное,} \\ n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, & \text{если } N \text{ четное.} \end{cases} \quad (1.5)$$

Собственные значения гамильтониана (1.1), отвечающие состоянию $|\lambda\rangle_N$, равны

$$E = \sum_{j=1}^N (\lambda_j^2 - h).$$

Дадим теперь общий план работы. Мы будем рассматривать корреляционную функцию вида $\langle \psi(x_1, t_1) \psi^+(x_2, t_2) \dots \psi(x_{2n-1}, t_{2n-1}) \psi^+(x_{2n}, t_{2n}) \rangle$. В следующем разделе мы построим представление для данного коррелятора в виде детерминанта Фредгольма. Третий раздел посвящен некоторым достаточно общим свойствам вполне интегрируемых интегральных операторов. Наконец, в четвертом, последнем разделе получена система дифференциальных уравнений, описывающая разновременную многоточечную корреляционную функцию.

2. ДЕТЕРМИНАНТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ КОРРЕЛЯТОРА

В этом разделе мы существенно используем результаты работы [2], посвященной вычислению двухточечной корреляционной функции одномерных непроницаемых бозонов. Метод, использовавшийся в [2] для представления коррелятора в виде фредгольмова детерминанта, коротко можно охарактеризовать как суммирование по формфакторам. В настоящей работе мы используем тот же самый метод, поэтому здесь мы дадим его краткое описание (подробности можно найти в оригинальной работе [2], а также в [13]).

Итак, пусть нам необходимо вычислить среднее от произведения двух полей

$${}_N \langle \lambda | \psi(x_1, t_1) \psi^+(x_2, t_2) | \lambda \rangle_N.$$

Основная идея состоит в том, чтобы поместить между операторами ψ и ψ^+ полный набор собственных состояний гамильтониана H (1.1). При этом возникают формфакторы полей ${}_N \langle \lambda | \psi(x_1, t_1) | \mu \rangle_{N+1}$ и ${}_{N+1} \langle \mu | \psi^+(x_2, t_2) | \lambda \rangle_N$. Используя (1.2), мы немедленно находим зависимость формфакторов от времени, а с помощью (1.3) – (1.5) несложно получить и полные явные выражения для этих формфакторов. Дальнейшие вычисления сводятся к суммированию по полному набору состояний $|\mu\rangle_{N+1}$, в результате чего для среднего ${}_N \langle \lambda | \psi(x_1, t_1) \psi^+(x_2, t_2) | \lambda \rangle_N$ получается представление в виде дифференциального оператора, действующего на определитель матрицы размерности $N \times N$. В термодинамическом пределе $N, L \rightarrow \infty, N/L = \text{const}$, матрица превращается в интегральный оператор, а ее определитель – в детерминант Фредгольма.

Для нашей цели необходимо получить явные формулы не только для среднего от оператора $\psi(x_{2p-1}, t_{2p-1}) \psi^+(x_{2p}, t_{2p})$, $p = 1, \dots, n$, но и для всех его матричных элементов. Это можно сделать, воспользовавшись описанным выше методом, т.е. вставив между ψ и ψ^+ полный набор собственных состояний гамильтониана, а затем просуммировав по ним. Конкретные вычисления практически дословно повторяют вычисления для среднего (см. [2]), поэтому мы не будем здесь их приводить, а выпишем только лишь результат:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_p(\{\mu\}, \{\lambda\}) &\equiv {}_N \langle \mu | \psi(x_{2p-1}, t_{2p-1}) \psi^+(x_{2p}, t_{2p}) | \lambda \rangle_N = \\ &= e^{ih(t_{2p-1} - t_{2p})} \left(g_p^{(0)} - \frac{\partial}{\partial \alpha_p} \right) \det_N S^{(p)}(\mu_j, \lambda_k) \Big|_{\alpha_p=0}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $S^{(p)}(\mu_j, \lambda_k)$ – матрица размерности $N \times N$:

$$\begin{aligned} S^{(p)}(\mu_j, \lambda_k) &= \frac{4}{L} \delta_{\mu_j, \lambda_k} g_p^{(2)}(\lambda_k) \exp[-i\lambda_k^2(t_{2p} - t_{2p-1}) + i\lambda_k(x_{2p} - x_{2p-1})] + \\ &+ \frac{4}{L} \exp[it_{2p-1}\mu_j^2 - it_{2p}\lambda_k^2 - ix_{2p-1}\mu_j + ix_{2p}\lambda_k] \times \\ &\times \left[(1 - \delta_{\mu_j, \lambda_k}) \frac{g_p^{(1)}(\mu_j) - g_p^{(1)}(\lambda_k)}{\mu_j - \lambda_k} + \alpha_p g_p^{(1)}(\mu_j) g_p^{(1)}(\lambda_k) \right], \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$\delta_{\mu_j, \lambda_k} = \begin{cases} 1, & \mu_j = \lambda_k, \\ 0, & \mu_j \neq \lambda_k, \end{cases}$$

$$g_p^{(k)}(\lambda) = \frac{1}{L} \sum_{\xi} \frac{\exp[i\xi^2(t_{2p} - t_{2p-1}) - i\xi(x_{2p} - x_{2p-1})]}{(\xi - \lambda)^k}. \quad (2.3)$$

В (2.3) суммирование ведется по всем $\xi = \frac{2\pi n}{L}$, где n полуцелое, если N нечетное, и n целое, если N четное. Поэтому, в частности, ξ никогда не равно λ (см. (1.5)), и сумма в (2.3) не содержит сингулярностей. Отметим, что формфактор $\mathcal{F}_p$ пропорционален детерминанту локальной матрицы, т.е. матричные элементы S_{jk} зависят только от μ_j и λ_k и не зависят от остальных параметров из наборов $\{\mu\}$ и $\{\lambda\}$.

Теперь мы легко можем вычислить среднее от оператора, являющегося произведением $2n$ полей,

$$\Psi^{(n)}(\{x\}, \{t\}) = \psi(x_1, t_1) \psi^+(x_2, t_2) \dots \psi(x_{2n-1}, t_{2n-1}) \psi^+(x_{2n}, t_{2n}).$$

Действительно, воспользовавшись полнотой системы собственных функций гамильтониана, получаем

$${}_N \langle \lambda | \Psi^{(n)}(\{x\}, \{t\}) | \lambda \rangle_N = \sum_{\nu_1} \dots \sum_{\nu_{n-1}} \prod_{p=1}^n \mathcal{F}_p(\{\nu_{p-1}\}, \{\nu_p\}),$$

где $\{\nu_0\} = \{\nu_n\} = \{\lambda\}$. Здесь суммирование ведется по наборам переменных $\{\nu_1\}, \dots, \{\nu_{n-1}\}$. Каждый набор состоит из элементов $\{\nu_j\} = \nu_j^{(1)}, \dots, \nu_j^{(N)}$, принимающих всевозможные значения из множества $\frac{2\pi n}{L}$. На этот раз n целое при нечетном N , и n полуцелое при N четном.

Метод суммирования детерминантов локальных матриц подробно описан в [2]. Воспользовавшись этим методом, мы немедленно получаем

$$\begin{aligned} {}_N \langle \lambda | \Psi^{(n)}(\{x\}, \{t\}) | \lambda \rangle_N &= \exp \left[ih \sum_{p=1}^n (t_{2p-1} - t_{2p}) \right] \prod_{p=1}^n \left(g_p^{(0)} - \frac{\partial}{\partial \alpha_p} \right) \times \\ &\times \det_N \left[\sum_{\nu_1, \dots, \nu_{n-1}} S^{(1)}(\lambda_j, \nu_1) S^{(2)}(\nu_1, \nu_2) \dots S^{(n)}(\nu_{n-1}, \lambda_k) \right] \Big|_{\alpha_p=0}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

В этой формуле суммирование ведется по $(n-1)$ переменным ν_j , каждая из которых независимо пробегает множество значений $\frac{2\pi n}{L}$. Таким образом, мы представили матричный элемент оператора $\Psi^{(n)}(\{x\}, \{t\})$ в виде дифференциального оператора, действующего на детерминант матрицы размерности $N \times N$.

Последний шаг, который нам необходимо сделать, — это перейти к термодинамическому пределу: $N, L \rightarrow \infty, N/L = D = \text{const}$. В работе [2] уже были вычислены пределы сумм вида (2.3)

$$\begin{aligned} g_p^{(k)}(\lambda) &\xrightarrow{L \rightarrow \infty} G_p^{(k)}(\lambda) + O(L^{-1}), \\ G_p^{(0)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\xi^2(t_{2p} - t_{2p-1}) - i\xi(x_{2p} - x_{2p-1})] d\xi, \\ G_p^{(1)}(\lambda) &= \text{v.p.} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[i\xi^2(t_{2p} - t_{2p-1}) - i\xi(x_{2p} - x_{2p-1})]}{\xi - \lambda} d\xi, \\ G_p^{(2)}(\lambda) &= \frac{L}{4} \exp[i\lambda^2(t_{2p} - t_{2p-1}) - i\lambda(x_{2p} - x_{2p-1})] + \frac{\partial}{\partial \lambda} G_p^{(1)}(\lambda). \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (2.2), получаем, что при $L \rightarrow \infty$ матричный элемент $S_{jk}^{(p)}$ выглядит следующим образом:

$$S_{jk}^{(p)} = \delta_{\mu_j, \lambda_k} + \frac{1}{L} w^{(p)}(\mu_j, \lambda_k) + O(L^{-2}),$$

где

$$w^{(p)}(\mu_j, \lambda_k) = \frac{2}{\pi} \exp [it_{2p-1}\mu_j^2 - it_{2p}\lambda_k^2 - ix_{2p-1}\mu_j + ix_{2p}\lambda_k] \times \\ \times \left\{ \frac{G_p^{(1)}(\mu_j) - G_p^{(1)}(\lambda_k)}{\mu_j - \lambda_k} + \alpha_p G_p^{(1)}(\mu_j) G_p^{(1)}(\lambda_k) \right\}. \quad (2.5)$$

Заметим, что элементы матрицы $w^{(p)}(\mu_j, \lambda_k)$ не имеют сингулярностей при $\mu_j = \lambda_k$. Поэтому в (2.4) мы можем заменить суммирование по параметрам ν интегрированием: $\frac{1}{L} \sum \nu \cdot \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdot d\nu$. В результате имеем

$$\sum_{\nu_1, \dots, \nu_{n-1}} S^{(1)}(\lambda_j, \nu_1) \dots S^{(n)}(\nu_{n-1}, \lambda_k) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \delta_{jk} + \frac{2\pi}{L} W(\lambda_j, \lambda_k) + O(L^{-2}),$$

где

$$W(\lambda_j, \lambda_k) = -\delta(\lambda_j - \lambda_k) + \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu_1 \dots \nu_{n-1} \left(\delta(\lambda_j - \nu_1) + \frac{1}{2\pi} w^{(1)}(\lambda_j, \nu_1) \right) \times \\ \times \left(\delta(\nu_1 - \nu_2) + \frac{1}{2\pi} w^{(2)}(\nu_1, \nu_2) \right) \dots \left(\delta(\nu_{n-1} - \lambda_k) + \frac{1}{2\pi} w^{(n)}(\nu_{n-1}, \lambda_k) \right). \quad (2.6)$$

При $N, L \rightarrow \infty$ состояние $|\lambda\rangle_N$ характеризуется уже не значением отдельных параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, а плотностью их распределения:

$$\rho(\lambda_j) = \lim_{L, N \rightarrow \infty} [L(\lambda_{j+1} - \lambda_j)]^{-1}.$$

Используя данное определение плотности, мы немедленно получаем, что детерминант матрицы $\delta_{jk} + \frac{2\pi}{L} W(\lambda_j, \lambda_k)$ в термодинамическом пределе переходит в фредгольмов детерминант $\widehat{I} + \widehat{W}(\lambda, \mu)$ ($\widehat{I}$ — единичный оператор), который действует на некоторую функцию f по правилу

$$[(\widehat{I} + \widehat{W})f](\lambda) = f(\lambda) + \int_{-\infty}^{+\infty} W(\lambda, \mu) \rho(\mu) f(\mu) d\mu. \quad (2.7)$$

Напомним, что в допредельном состоянии $|\lambda\rangle_N$ параметры $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ суть числа вида $\lambda_j = \frac{2\pi n_j}{L}$, где n_j — произвольное целое (или полуцелое) число. Выбирая соответствующим образом набор $\{n_j\}$, мы в пределе можем получать различные плотности

распределения $\rho(\lambda)$. Это позволяет нам в рамках развиваемого подхода вычислить многоточечные температурные корреляционные функции. Действительно, как было доказано в [14], температурный коррелятор

$$\langle \Psi^{(n)}(\{x\}, \{t\}) \rangle_T = \frac{\text{Tr } e^{-H/T} \Psi^{(n)}(\{x\}, \{t\})}{\text{Tr } e^{-H/T}}$$

(T – температура) во вполне интегрируемых моделях равен среднему

$$\langle \Psi^{(n)}(\{x\}, \{t\}) \rangle_T = \langle \Omega_T | \Psi^{(n)}(\{x\}, \{t\}) | \Omega_T \rangle, \quad (2.8)$$

где $|\Omega_T\rangle$ – одна из собственных функций гамильтониана (любая), описывающая состояние термодинамического равновесия. С другой стороны, состояние термодинамического равновесия задается плотностью распределения специального вида:

$$\rho_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left(1 + e^{\frac{\lambda^2 - h}{T}} \right)^{-1}.$$

Выбирая $\rho_T(\lambda)$ в качестве плотности распределения в формуле (2.7), мы получаем искомый ответ для температурного коррелятора:

$$\begin{aligned} \langle \Psi^{(n)}(\{x\}, \{t\}) \rangle_T = \\ = \exp i h \left[\sum_{p=1}^n (t_{2p-1} - t_{2p}) \right] \prod_{p=1}^n \left(G_p^{(0)} - \frac{\partial}{\partial \alpha_p} \right) \det(\widehat{I} + \widehat{W}(\lambda, \mu)) \Big|_{\alpha_p=0}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Отметим, что при $T \rightarrow 0$ (основное состояние) плотность распределения сосредоточена внутри зоны Ферми $[-\sqrt{h}, \sqrt{h}]$:

$$\rho_0(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & |\lambda| < \sqrt{h} \\ 0, & |\lambda| > \sqrt{h} \end{cases}, \quad T = 0.$$

3. ВОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Мы построили представление для многоточечной корреляционной функции в модели НШ в виде дифференциального оператора, действующего на фредгольмов детерминант. Хотя ядро соответствующего интегрального оператора описано явно, сам детерминант в целом представляется весьма сложным объектом для дальнейшего исследования. Как мы уже отмечали, в последнее время в целом ряде работ [4–6] был развит метод, позволяющий свести вычисление фредгольмовых детерминантов к решению некоторых вполне интегрируемых классических дифференциальных уравнений. При этом ядро интегрального оператора $\widehat{I} + \widehat{V}$ должно иметь весьма специальный вид:

$$V(\lambda, \mu) = \frac{e^L(\lambda) e^R(\mu)}{\lambda - \mu}. \quad (3.1)$$

Наши обозначения несколько отличаются от обозначений, использовавшихся ранее в работах [4–6], поэтому во избежание недоразумений мы остановимся на них более подробно. В формуле (3.1) $e^L(\lambda)$ и $e^R(\mu)$ суть n -компонентные вектор-строка и вектор-столбец, n – произвольное натуральное число (можно рассматривать также и бесконечные n). Компонентами этих векторов являются некоторые функции $(e^L(\lambda))_k$ и $(e^R(\mu))_k$, $k = 1, \dots, n$, зависящие от комплексных параметров λ и μ , а также, возможно, от ряда других переменных, зависимость от которых явно не выписана. Мы будем называть эти переменные “внешними переменными”, в отличие от “внутренних переменных” λ и μ , по которым ведется интегрирование. Удобно также рассматривать вектор $e^L(\lambda)$ как матрицу размерности $1 \times n$ (т.е. состоящую из одной строки), а вектор $e^R(\mu)$ – как матрицу размерности $n \times 1$ (матрица из одного столбца). В соответствии с таким определением все операции над этими векторами следует понимать в матричном смысле. Так, например, $e^L(\lambda)e^R(\mu)$ – матрица размерности 1×1 , т.е. скалярная функция, тогда как $e^R(\mu)e^L(\lambda)$ – матрица размерности $n \times n$.

Для полного описания интегрального оператора $\hat{I} + \hat{V}$ необходимо еще задать контур интегрирования и доопределить ядро V в точке $\lambda = \mu$. Последняя проблема решается просто наложением условия $e^L(\lambda)e^R(\lambda) = 0$. При этом функции $e^L(\lambda)$ и $e^R(\mu)$, разумеется, предполагаются достаточно гладкими. Что же касается контура интегрирования, то для наших целей можно ограничиться рассмотрением операторов, действующих на действительной оси, хотя, вообще говоря, выбор контура в достаточной степени произволен. Отчасти чтобы подчеркнуть это обстоятельство, мы нигде в этом разделе явно не выписываем пределов интегрирования.

Как уже отмечалось во введении и как мы увидим ниже, операторы с ядрами типа (3.1) тесно связаны с классическими вполне интегрируемыми дифференциальными уравнениями. По этой причине мы вслед за А. Р. Итсом будем называть такие операторы вполне интегрируемыми интегральными (ВИИ) операторами.

В этом разделе будут приведены некоторые свойства ВИИ-операторов. Некоторые из этих свойств имеют весьма общий характер, часть же характерна конкретно для ВИИ-операторов модели НШ.

Пусть даны два ВИИ-оператора $\hat{I} + \hat{V}_1$ и $\hat{I} + \hat{V}_2$:

$$V_1(\lambda, \mu) = \frac{e_1^L(\lambda)e_1^R(\mu)}{\lambda - \mu}, \quad V_2(\lambda, \mu) = \frac{e_2^L(\lambda)e_2^R(\mu)}{\lambda - \mu},$$

где $e_j^R(\mu)$ – n_j -компонентный вектор-столбец, $e_j^L(\lambda)$ – n_j -компонентная вектор-строка, $j = 1, 2$. Будем предполагать, что компоненты векторов $e_j^R(\mu)$ и $e_j^L(\lambda)$ зависят от некоторых внешних параметров x и t так, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} e_j^R(\mu) &= l_j(\mu) e_j^R(\mu), & \frac{\partial}{\partial x} e_j^L(\lambda) &= -e_j^L(\lambda) l_j(\lambda), \\ \frac{\partial}{\partial t} e_j^R(\mu) &= m_j(\mu) e_j^R(\mu), & \frac{\partial}{\partial t} e_j^L(\lambda) &= -e_j^L(\lambda) m_j(\lambda). \end{aligned} \quad (3.2)$$

При этом матрицы $l_j(\mu)$ размерности $n_j \times n_j$ линейны по μ :

$$l_j(\mu) = \mu P_j + [Q_j, P_j], \quad (3.3)$$

а матрицы $m_j(\mu)$ зависят от μ квадратично:

$$m_j(\mu) = -\mu l_j(\mu) + \frac{\partial}{\partial x} Q_j. \quad (3.4)$$

Матрицы P_j и Q_j могут зависеть только от x и t . Такая зависимость от внешних переменных характерна для ВИИ-операторов, описывающих корреляторы в модели НШ. Легко убедиться в том, что произведение операторов $\hat{I} + \hat{V}_1$ и $\hat{I} + \hat{V}_2$ также является ВИИ-оператором:

$$(\hat{I} + \hat{V}_1)(\hat{I} + \hat{V}_2) = \hat{I} + \hat{V}_{12}, \quad V_{12}(\lambda, \mu) = \frac{E^L(\lambda)E^R(\mu)}{\lambda - \mu}, \quad (3.5)$$

где $E^L(\lambda)$ и $E^R(\mu)$ — $(n_1 + n_2)$ -компонентные вектор-строка и вектор-столбец. Удобно разбить каждый из этих векторов на два блока. Так, строка $E^L(\lambda)$ разбивается на блок $E_1^L(\lambda)$, содержащий первые n_1 компонент, и блок $E_2^L(\lambda)$, состоящий из последних n_2 компонент вектора $E^L(\lambda)$. Аналогично столбец $E^R(\mu)$ разбивается на блоки $E_1^R(\mu)$ и $E_2^R(\mu)$. Тогда

$$\begin{aligned} E_1^L(\lambda) &= e_1^L(\lambda), & E_2^L(\lambda) &= [(\hat{I} + \hat{V}_1)e_2^L](\lambda), \\ E_2^R(\mu) &= e_2^R(\mu), & E_1^R(\mu) &= [e_1^R(\hat{I} + \hat{V}_2)](\mu). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Прямым вычислением находим, что производные векторов $E^L(\lambda)$ и $E^R(\mu)$ по x и t выражаются через компоненты этих же векторов по формулам, аналогичным (3.2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} E^R(\mu) &= L(\mu)E^R(\mu), & \frac{\partial}{\partial x} E^L(\lambda) &= -E^L(\lambda)L(\lambda), \\ \frac{\partial}{\partial t} E^R(\mu) &= M(\mu)E^R(\mu), & \frac{\partial}{\partial t} E^L(\lambda) &= -E^L(\lambda)M(\lambda), \end{aligned} \quad (3.7)$$

причем структура L и M -операторов сохраняется:

$$L(\mu) = \mu P + [Q, P], \quad M(\mu) = -\mu L(\mu) + \frac{\partial}{\partial x} Q. \quad (3.8)$$

Матрицы P и Q имеют размерность $(n_1 + n_2) \times (n_1 + n_2)$ и в блочном виде записываются следующим образом:

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} Q_1 & U_{12} \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

где

$$U_{12} = - \int E_1^R(\nu) E_2^L(\nu) d\nu. \quad (3.10)$$

В работах [4–6] было доказано, что ВИИ-операторы образуют группу. Следовательно, оператор, обратный вполне интегрируемому, также является ВИИ-оператором: $(\hat{I} + \hat{V})^{-1} = \hat{I} + \hat{\tilde{V}}$, где $\hat{\tilde{V}}(\lambda, \mu) = \frac{F^L(\lambda)F^R(\mu)}{\lambda - \mu}$. Полагая в (3.5) $V_1 = V$, $\hat{I} + \hat{V}_2 = (\hat{I} + \hat{V})^{-1}$, $V_{12} = 0$, из (3.6) получаем, что вектор-функции F^L и F^R удовлетворяют интегральным уравнениям

$$[(\hat{I} + \hat{V})F^L](\lambda) = -E^L(\lambda), \quad [F^R(\hat{I} + \hat{V})](\mu) = E^R(\mu). \quad (3.11)$$

Дифференцируя (3.11) по x и t , легко убедиться в том, что если для E^L и E^R выполнены соотношения (3.7), (3.8), то аналогичные соотношения справедливы и для векторов F^L и F^R :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} F^R(\mu) &= \mathcal{L}(\mu) F^R(\mu), & \frac{\partial}{\partial x} F^L(\lambda) &= -F^L(\lambda) \mathcal{L}(\lambda), \\ \frac{\partial}{\partial t} F^R(\mu) &= \mathcal{M}(\mu) F^R(\mu), & \frac{\partial}{\partial t} F^L(\lambda) &= -F^L(\lambda) \mathcal{M}(\lambda).\end{aligned}$$

Здесь матрицы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ имеют вид

$$\mathcal{L}(\mu) = \mu P + [B + Q, P], \quad \mathcal{M}(\mu) = -\mu \mathcal{L}(\mu) + \frac{\partial}{\partial x}(B + Q), \quad (3.12)$$

$$B = \int F^R(\lambda) E^L(\lambda) d\lambda = \int E^R(\lambda) F^L(\lambda) d\lambda. \quad (3.13)$$

Логарифмические производные по внешним переменным детерминанта ВИИ-оператора можно легко выразить через матрицы P , Q и B . Например,

$$\frac{\partial}{\partial x} \log \det(\hat{I} + \hat{V}) = \text{Tr} \left((\hat{I} + \hat{V})^{-1} \frac{\partial \hat{V}}{\partial x} \right).$$

Из (3.8) следует, что $\frac{\partial V}{\partial x} = -E^L(\lambda) P E^R(\mu)$, и, используя (3.11) и (3.13), мы получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} \log \det(\hat{I} + \hat{V}) = -\text{tr}(PB).$$

В правой части последней формулы имеется в виду матричный след.

С другой стороны, условие совместности системы (3.12) дает нам дифференциальные уравнения на матрицы P , Q и B . Таким образом, мы сводим задачу вычисления фредгольмова детерминанта к исследованию дифференциальных уравнений, которые по построению представимы в виде условия нулевой кривизны.

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КОРРЕЛЯТОРА

В этом разделе мы получим систему дифференциальных уравнений, описывающих корреляционную функцию (2.9). Прежде всего заметим, что операторы $\hat{I} + \hat{w}^{(p)}$, входящие в (2.5) и (2.6), представимы в виде суммы ВИИ-оператора и одномерного проектора. Действительно, введем функции

$$\begin{aligned}(e_p^L(\lambda))_1 &= -e^{it_{2p-1}\lambda^2 - ix_{2p-1}\lambda}, & (e_p^R(\mu))_1 &= \frac{2}{\pi} e^{-it_{2p}\mu^2 + ix_{2p}\mu} G_p^{(1)}(\mu), \\ (e_p^L(\lambda))_2 &= e^{it_{2p-1}\lambda^2 - ix_{2p-1}\lambda} G_p^{(1)}(\lambda), & (e_p^R(\mu))_2 &= \frac{2}{\pi} e^{-it_{2p}\mu^2 + ix_{2p}\mu}.\end{aligned}$$

Объединяя функции $(e_p^L(\lambda))_1$ и $(e_p^L(\lambda))_2$ в двухкомпонентную вектор-строку $e_p^L(\lambda)$, а функции $(e_p^R(\mu))_1$ и $(e_p^R(\mu))_2$ в двухкомпонентный вектор-столбец $e_p^R(\mu)$, получаем

$$\hat{I} + \hat{w}^{(p)} = \hat{I} + \hat{v}^{(p)} + \hat{r}^{(p)},$$

где

$$v^{(p)}(\lambda, \mu) = \frac{e_p^L(\lambda)e_p^R(\mu)}{\lambda - \mu}, \quad r^{(p)}(\lambda, \mu) = \alpha_p e_p^L(\lambda)\sigma_- e_p^R(\mu).$$

Легко вычислить производные по внешним переменным от векторов e_p^R . Они имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_{2p-1}} e_p^R(\mu) &= l_{2p-1}(\mu) e_p^R(\mu), & \frac{\partial}{\partial t_{2p-1}} e_p^R(\mu) &= m_{2p-1}(\mu) e_p^R(\mu), \\ \frac{\partial}{\partial x_{2p}} e_p^R(\mu) &= l_{2p}(\mu) e_p^R(\mu), & \frac{\partial}{\partial t_{2p}} e_p^R(\mu) &= m_{2p}(\mu) e_p^R(\mu), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} l_{2p-1}(\mu) &= \frac{i\mu}{2}(1 + \sigma_3) + \left[G_p^{(0)} \sigma_+, \frac{i}{2}(1 + \sigma_3) \right], \\ l_{2p}(\mu) &= \frac{i\mu}{2}(1 - \sigma_3) + \left[G_p^{(0)} \sigma_+, \frac{i}{2}(1 - \sigma_3) \right], \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} m_{2p-1}(\mu) &= -\mu l_{2p-1}(\mu) + \frac{\partial}{\partial x_{2p-1}} G_p^{(0)} \sigma_+, \\ m_{2p}(\mu) &= -\mu l_{2p}(\mu) + \frac{\partial}{\partial x_{2p}} G_p^{(0)} \sigma_+. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Производные от e_p^L вычисляются аналогично, при этом матрицы l и m отличаются от матриц (4.2) и (4.3) только знаком, и умножаются на e_p^L справа (ср. (3.2), (3.7)). Используя результаты из предыдущего раздела, мы заключаем, что оператор $\widehat{I} + \widehat{W}$ (см. (2.6)) представим в виде суммы ВИИ-оператора и n -мерного проектора:

$$\widehat{I} + \widehat{W} = \widehat{I} + \widehat{V} + \widehat{R}, \quad V(\lambda, \mu) = \frac{E^L(\lambda)E^R(\mu)}{\lambda - \mu}.$$

Здесь $E^L(\lambda)$ и $E^R(\mu)$ — $2n$ -компонентные вектор-строка и вектор-столбец. С помощью (3.6) нетрудно найти явный вид компонент этих векторов. Для этого удобно разбить $E^L(\lambda)$ и $E^R(\mu)$ на n блоков по два элемента в каждом. Тогда

$$\begin{aligned} (E_p^L(\lambda))_\beta &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu_1 \dots d\nu_{p-1} (\delta(\lambda - \nu_1) + v^{(1)}(\lambda, \nu_1)) \dots \\ &\quad \dots (\delta(\nu_{p-2} - \nu_{p-1}) + v^{(p-1)}(\nu_{p-2}, \nu_{p-1})) (e_p^L(\nu_{p-1}))_\beta, \\ (E_p^R(\mu))_\beta &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu_p \dots d\nu_{n-1} (e_p^R(\nu_p))_\beta (\delta(\nu_p - \nu_{p+1}) + v^{(p+1)}(\nu_p, \nu_{p+1})) \dots \\ &\quad \dots (\delta(\nu_{n-1} - \mu) + v^{(n)}(\nu_{n-1}, \mu)) \rho_T(\mu), \end{aligned}$$

где $p = 1, \dots, n$ — номера блоков, а $\beta = 1, 2$ — номера элементов в блоке. Для того чтобы вычислить проектор R , мы введем матрицу C размерности $2n \times 2n$. Явный вид

матричных элементов C также удобно записать в блочном виде:

$$C_{jk}^{\beta\gamma} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu_j \dots d\nu_{k-1} (e_j^R(\nu_j))_{\beta} (\delta(\nu_j - \nu_{j+1}) + v^{(j+1)}(\nu_j, \nu_{j+1})) \dots \\ \dots (\delta(\nu_{k-2} - \nu_{k-1}) + v^{(k-1)}(\nu_{k-2}, \nu_{k-1})) (e_k^L(\nu_{k-1}))_{\gamma}, \quad k > j, \quad (4.4)$$

$$C_{jk}^{\beta\gamma} = 0, \quad k \leq j. \quad (4.5)$$

Здесь, как и в предыдущих формулах, $j, k = 1, \dots, n$ — номера блоков, $\beta, \gamma = 1, 2$ — номера элементов в блоке C_{jk} . Проектор R выражается через минор матрицы C , построенный на элементах C_{jk}^{12} :

$$\tilde{C}_{jk} = C_{jk}^{12}, \\ R(\lambda, \mu) = \tilde{E}^L(\lambda) (I - \hat{\alpha} \tilde{C})^{-1} \hat{\alpha} \tilde{E}^R(\mu). \quad (4.6)$$

В формуле (4.6) $\tilde{E}^L(\lambda)$ и $\tilde{E}^R(\mu)$ — n -компонентные строка и столбец, составленные соответственно из элементов $(E_p^L(\lambda))_2$ и $(E_p^R(\mu))_1$, $p = 1, \dots, n$; $\hat{\alpha}$ — диагональная матрица: $\hat{\alpha} = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. При выводе (4.6) мы существенно пользовались нильпотентностью матрицы $\tilde{C}$: $\tilde{C}^n = 0$, откуда

$$(I - \hat{\alpha} \tilde{C})^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (\hat{\alpha} \tilde{C})^k.$$

Согласно результатам предыдущего раздела L и M -операторы для векторов E^L и E^R

$$\frac{\partial}{\partial x_p} E^R(\mu) = L_p(\mu) E^R(\mu), \quad \frac{\partial}{\partial t_p} E^R(\mu) = M_p(\mu) E^R(\mu)$$

представимы в виде

$$L_p(\mu) = \mu P_p + [Q_p, P_p], \quad M_p(\mu) = -\mu L_p(\mu) + \frac{\partial}{\partial x_p} Q_p.$$

Воспользовавшись (3.9), (4.1) и (4.4), находим

$$(P_p)_{jk} = i\delta_{jp}\delta_{kp}, \quad Q_p = -G - C,$$

где

$$G_{jk} = \sum_{l=1}^n \delta_{j,2l-1} \delta_{k,2l} G_l^{(0)}.$$

Тогда для функций F^L и F^R , определяемых из интегральных уравнений

$$[F^R(\hat{I} + \hat{V})](\mu) = E^R(\mu), \quad [(\hat{I} + \hat{V})F^L](\lambda) = -E^L(\lambda),$$

справедливы соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x_p} F^R(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu) F^R(\mu), \quad \frac{\partial}{\partial t_p} F^R(\mu) = \mathcal{M}_p(\mu) F^R(\mu), \quad (4.7)$$

где

$$\mathcal{L}_p(\mu) = i\mu P_p + [b, P_p], \quad \mathcal{M}_p(\mu) = -\mu \mathcal{L}_p(\mu) + \frac{\partial b}{\partial x_p}, \quad b = B - C - G.$$

Напомним, что $B = \int_{-\infty}^{+\infty} F^R(\lambda) E^L(\lambda) d\lambda$.

Теперь все готово для того, чтобы выразить корреляционную функцию (2.9) в терминах матричных элементов матрицы b . Преобразуем детерминант оператора $\widehat{I} + \widehat{W}$ к виду

$$\det(\widehat{I} + \widehat{W}) = \det(\widehat{I} + \widehat{R}(\widehat{I} + \widehat{V})^{-1}) \det(\widehat{I} + \widehat{V}). \quad (4.8)$$

Поскольку R — n -мерный проектор, то $R(\widehat{I} + \widehat{V})^{-1}$ — также n -мерный проектор с ядром

$$[\widehat{R}(\widehat{I} + \widehat{V})^{-1}](\lambda, \mu) = \widetilde{E}^L(\lambda) (I - \hat{\alpha} \widetilde{C})^{-1} \hat{\alpha} \widetilde{F}^R(\mu),$$

где $\widetilde{F}^R(\mu)$ — столбец, составленный из нечетных компонент вектора $F^R(\mu)$. Следовательно, первый детерминант в (4.8) равен детерминанту матрицы размерности $n \times n$:

$$\det(\widehat{I} + \widehat{R}(\widehat{I} + \widehat{V})^{-1}) = \det_n(I + (I - \hat{\alpha} \widetilde{C})^{-1} \hat{\alpha} \widetilde{B}),$$

где $\widetilde{B}$ — минор матрицы B , построенный на элементах $B_{2j-1, 2k}$, $j, k = 1, \dots, n$. Отсюда, воспользовавшись свойством $\det_n(I - \hat{\alpha} \widetilde{C}) = 1$, находим

$$\det(\widehat{I} + \widehat{R}(\widehat{I} + \widehat{V})^{-1}) = \det_n(I + \hat{\alpha}(\widetilde{B} - \widetilde{C})).$$

Наконец, применяя к последнему детерминанту оператор $\prod_{p=1}^n \left(G_p^{(0)} - \frac{\partial}{\partial \alpha_p} \right)$, получим

$$\langle \Psi^{(n)}(\{x\}, \{t\}) \rangle_T = (-1)^n \det_n(b_{2j-1, 2k}) \exp \left[ih \sum_{p=1}^n (t_{2p-1} - t_{2p}) \right] \det(\widehat{I} + \widehat{V}). \quad (4.9)$$

Вторые логарифмические производные детерминанта ВИИ-оператора $(\widehat{I} + \widehat{V})$ также выражаются через элементы матрицы b :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_p} \log \det(\widehat{I} + \widehat{V}) = b_{pm} b_{mp} - \delta_{pm} \sum_{l=1}^{2n} b_{ml} b_{lp}, \\ \frac{\partial^2}{\partial t_p \partial x_p} \log \det(\widehat{I} + \widehat{V}) = i \sum_{l=1}^{2n} \left(b_{pl} \frac{\partial b_{lp}}{\partial x_p} - \frac{\partial b_{pl}}{\partial x_p} b_{lp} \right), \\ \frac{\partial^2}{\partial t_p \partial x_m} \log \det(\widehat{I} + \widehat{V}) = 2b_{pm} \sum_{l=1}^{2n} b_{ml} b_{lp} - 2b_{mp} \sum_{l=1}^{2n} b_{pl} b_{lm}, \quad p \neq m. \end{array} \right. \quad (4.10)$$

Наконец, условие совместности уравнений (4.7)

$$\frac{\partial}{\partial t_p} \mathcal{L}_m - \frac{\partial}{\partial x_m} \mathcal{M}_p + [\mathcal{L}_m, \mathcal{M}_p] = 0$$

дает систему уравнений

$$\begin{cases} i \frac{\partial b_{pk}}{\partial t_p} = -\frac{\partial^2 b_{pk}}{\partial x_p^2} + 2 \left[\sum_{l \neq p}^{2n} b_{pl} b_{lp} \right] b_{pk}, & k \neq p, \\ -i \frac{\partial b_{jp}}{\partial t_p} = -\frac{\partial^2 b_{jp}}{\partial x_p^2} + 2 b_{jp} \left[\sum_{l \neq p}^{2n} b_{pl} b_{lp} \right], & j \neq p, \\ \frac{\partial b_{jk}}{\partial t_p} = \frac{\partial b_{jp}}{\partial x_p} b_{pk} - \frac{\partial b_{pk}}{\partial x_p} b_{jp}, & j, k \neq p. \end{cases} \quad (4.11)$$

Помимо приведенной системы из условия совместности возникает также ряд уравнений, не содержащих производных по временам $\{t\}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial b_{jk}}{\partial x_p} = i b_{jp} b_{pk}, & j, k \neq p, \\ \frac{\partial b_{pp}}{\partial x_p} = -i \sum_{l \neq p}^{2n} b_{pl} b_{lp}, \\ \frac{\partial b_{pm}}{\partial x_p} = -\frac{\partial b_{pm}}{\partial x_m} - i \sum_{l \neq p, m}^{2n} b_{pl} b_{lm}, & p \neq m. \end{cases} \quad (4.12)$$

Таким образом, многоточечная корреляционная функция одномерных бозонов описана в терминах решений систем (4.11), (4.12).

Можно несколько видоизменить форму записи полученных дифференциальных уравнений так, чтобы их связь с моделью НШ стала более наглядной. Допустим, что мы интересуемся зависимостью детерминанта интегрального оператора $\hat{I} + \hat{V}$ от одной пары внешних переменных, например x_1 и t_1 . Составим из матричных элементов b_{1k} ($k = 2, 3, \dots, 2n$) $(2n - 1)$ -компонентную строку ϕ_1 , а из элементов b_{j1} ($j = 2, 3, \dots, 2n$) $(2n - 1)$ -компонентный столбец $\tilde{\phi}_1$. Тогда первые два уравнения из (4.11), включающие производные по x_1 и t_1 , переписутся следующим образом:

$$\begin{cases} i \frac{\partial \phi_1}{\partial t_1} = -\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_1^2} + 2(\phi_1 \tilde{\phi}_1) \phi_1, \\ -i \frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial t_1} = -\frac{\partial^2 \tilde{\phi}_1}{\partial x_1^2} + 2(\phi_1 \tilde{\phi}_1) \tilde{\phi}_1, \end{cases} \quad (4.13)$$

а логарифмические производные (4.10) по x_1 и t_1 записываются в виде:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \log \det(\hat{I} + \hat{V}) = -\phi_1 \tilde{\phi}_1, \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial t_1} \log \det(\hat{I} + \hat{V}) = i \left(\phi_1 \frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} \tilde{\phi}_1 \right). \quad (4.15)$$

Таким образом, мы видим, что $\det(\hat{I} + \hat{V})$ как функция x_1 и t_1 описывается векторным нелинейным уравнением Шредингера (4.13). Вторые логарифмические производные этого детерминанта выражаются через решения системы (4.13), причем правые части равенств (4.14) и (4.15) суть не что иное, как плотности первого и второго интегралов движения системы (4.13). Иными словами, детерминант оператора $\hat{I} + \hat{V}$ играет роль τ -функции векторного нелинейного уравнения Шредингера (4.13).

Аналогично, вводя векторы ϕ_p и $\tilde{\phi}_p$, составленные из компонент b_{pk} и b_{jp} ($j, k \neq p$), можно рассмотреть зависимость детерминанта оператора $\hat{I} + \hat{V}$ от любых других пар переменных x_p и t_p . При этом, разумеется, мы снова получим векторное нелинейное уравнение Шредингера, а не использованные нами уравнения системы (4.12) и последнее уравнение системы (4.13) будут играть роль связей между компонентами различных векторов ϕ_p и $\tilde{\phi}_p$, $p = 1, \dots, 2n$. В такой форме записи полученные нами результаты являются прямым обобщением результатов работы [6].

Описание многоточечной разновременной корреляционной функции в терминах решений системы классических дифференциальных уравнений, на наш взгляд, само по себе является интересным результатом, хотя, разумеется, и не означает полного решения проблемы. Поэтому в заключение хотелось бы остановиться на некоторых вопросах, которые не были затронуты в настоящей работе.

Во-первых, мы совершенно не касались зависимости корреляционной функции от температуры. Для того чтобы исследовать эту зависимость, необходимо получить дифференциальные уравнения, в которые явно входит производная по температуре. Метод получения такого рода уравнений описан, например, в [4–6] и без принципиальных изменений переносится на рассматриваемый в настоящей работе случай многоточечной разновременной корреляционной функции.

Во-вторых, решение полученных дифференциальных уравнений и нахождение асимптотик корреляторов представляется весьма сложной технической задачей. В работах [10–12] для этой цели с успехом применялся метод задачи Римана–Гильберта о факторизации матрицы. Мы надеемся, что и в нашем случае с помощью упомянутого метода эту проблему удастся решить.

Наконец, в-третьих, в настоящей работе была вычислена только одна корреляционная функция, в которой операторы ψ и ψ^+ были специальным образом упорядочены. В принципе, используя метод суммирования по формфакторам, несложно получить явные ответы и для других корреляторов. Однако, основываясь на результатах работы [9], уже сейчас можно высказать некоторые соображения относительно предполагаемых результатов. Мы считаем, что для корреляционной функции, в которой операторы ψ и ψ^+ упорядочены каким-то другим, отличным от рассмотренного способом, в конечном ответе (4.9) изменятся два сомножителя. В показателе экспоненты времена t_k будут входить со знаком минус, если они являются аргументами операторов ψ , и со знаком плюс, если они являются аргументами операторов ψ^+ . Множитель $\det_n(b_{2j-1, 2k})$ также изменится. Теперь вместо минора матрицы b , построенного на нечетных строках и четных столбцах, в формулу (4.9) будет входить минор той же размерности $n \times n$, но построенный на других элементах матрицы b . Конкретные номера этих элементов будут зависеть от порядка операторов ψ и ψ^+ . В частности, если в рассмотренном нами корреляторе заменить все ψ на ψ^+ , то в конечный ответ войдет минор, построенный

на четных строках и нечетных столбцах. При этом фредгольмов детерминант во всех случаях останется одним и тем же, а значит, сохранятся и системы дифференциальных уравнений (4.11) и (4.12). Высказанная гипотеза относительно предполагаемых ответов для произвольно упорядоченных корреляционных функций согласуется с результатами работ [4, 5] и [9], однако, разумеется, требует проверки.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 94-01-00285) и фонда INTAS-93-1038.

Список литературы

- [1] *Lenard A.* // J. Math. Phys. 1966. V. 7. P. 1268.
- [2] *Korepin V. E., Slavnov N. A.* // Comm. Math. Phys. 1990. V. 129. P. 103.
- [3] *Jimbo M., Miwa T., Mori Y., Sato M.* // Physica 1D. 1980. P. 80.
- [4] *Its A. R., Izergin A. G., Korepin V. E.* // Phys. Lett. 1989. V. 141A. P. 121.
- [5] *Its A. R., Izergin A. G., Korepin V. E.* // Comm. Math. Phys. 1990. V. 129. P. 205.
- [6] *Its A. R., Izergin A. G., Korepin V. E., Slavnov N. A.* // Int. Jour. Mod. Phys. 1990. V. B4. P. 1003.
- [7] *Its A. R., Izergin A. G., Korepin V. E., Slavnov N. A.* // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. P. 1704.
- [8] *Изергин А. Г., Итс А. Р., Корепин В. Е., Славнов Н. А.* // Зап. научн. сем. ПОМИ. 1993. Т. 205. С. 6.
- [9] *Изергин А. Г., Итс А. Р., Корепин В. Е., Славнов Н. А.* // Алгебра и анализ. 1994. Т. 6. С. 138.
- [10] *Its A. R., Izergin A. G., Korepin V. E.* // Comm. Math. Phys. 1990. V. 130. P. 471.
- [11] *Итс А. Р., Варзугин Г. Г.* // Вестник ЛГУ. 1991. Т. 137. С. 37.
- [12] *Its A. R., Izergin A. G., Korepin V. E., Varzugin G. G.* // Physica D54. 1992 P.351.
- [13] *Korepin V. E., Izergin A. G., Bogoliubov N. M.* Quantum inverse scattering method and correlation functions. Cambridge: Univ. Press, 1993.
- [14] *Боголюбов Н. М., Корепин В. Е.* // ТМФ. 1985. Т. 64. С. 92.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

Поступила в редакцию
11.IV.1995 г.

N. A. Slavnov

DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR MULTIPOINT CORRELATION FUNCTIONS IN ONE-DIMENSIONAL IMPENETRABLE BOSE-GAS

The representation for multipoint time-dependent correlation functions in one-dimensional impenetrable Bose-gas is obtained in terms of Fredholm determinant. The system of differential equations describing this correlator is obtained.