Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Г. Шондин, Полуограниченные локальные гамильтонианы для возмущений лапласиана на кривых с угловыми точками в $\mathbb{R}^4$, *ТМФ*, 1996, том 106, номер 2, 179–199

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1106>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 17:28:10

Ю. Г. Шондин

ПОЛУОГРАНИЧЕННЫЕ ЛОКАЛЬНЫЕ
ГАМИЛЬТониАНЫ ДЛЯ ВОЗМУЩЕНИЙ
ЛАПЛАСИАНА НА КРИВЫХ С
УГЛОВЫМИ ТОЧКАМИ В $\mathbb{R}^4$

Исучаются возмущения с носителем на кривых с угловыми точками оператора Лапласа в $\mathbb{R}^4$ в контексте теории самосопряженных расширений. Выделяются классы расширений, являющихся локальными, полуограниченными и порождающими сохраняющую положительность полугруппу. Устанавливается связь таких расширений с локальными формами Дирихле, содержащими дополнительную форму энергии на кривой.

В предыдущей нашей работе [1], посвященной элементарным возмущениям типа δ -функции на кривой с угловыми точками, было установлено отсутствие полуограниченности у таких возмущений в размерности четыре. С целью обхода этой трудности мы рассмотрим теперь более широкий класс локальных возмущений, связанный с введением “оператора энергии” на самой кривой. Аналогичная постановка вопроса возникла ранее при построении устойчивых моделей для трех точечно взаимодействующих частиц [2–6]. Естественным методом построения таких обобщенных моделей является метод точечных взаимодействий “с внутренней структурой” (см. обзор [2]). Этот метод из теории расширений операторов имеет прямую связь с переходом от контактного к взаимодействию через промежуточные частицы в нерелятивистских моделях Ли [7], где такой переход также решает проблему устойчивости. Таким образом, мотивировкой нашего рассмотрения является устойчивость. Чтобы исключить недоразумения, заметим, что для индивидуальной кривой Σ устойчивое возмущение для оператора Лапласа в $\mathbb{R}^4$ можно реализовать и в классе элементарных расширений типа δ -функции $\int \lambda(t, \Sigma) \delta(x - x(t)) dt$ с подходящей функцией $\lambda(t, \Sigma)$ на кривой, однако для различных кривых эти функции будут различными. Нельзя выбором одной функции обеспечить устойчивость в классе кривых с угловыми особенностями. Дополнительное соображение, подкрепляющее нашу постановку задачи, возникает при взгляде на кривую как устроенную из точек. Точечное взаимодействие в $\mathbb{R}^4$ допускает реализацию в индефинитной метрике и, как отмечено в [8], фиксируется двумя вещественными параметрами, а не одним, как в пространстве меньшей размерности. Происходит это из-за расходимости двух базисных интегралов $\int (k^2 + 1)^{-1} dk$ и $\int (k^2 + 1)^{-2} dk$, приводящей к двум произвольным разноразмерным параметрам. При сгущении точек на кривой можно ожидать

появления на ней “оператора энергии” $-\partial_t p(t)\partial_t + q(t)$ при натуральной параметризации.

Результатом работы является выделение класса самосопряженных расширений, описывающих возмущения с носителем на кривых с угловыми особенностями и самопересечениями под ненулевым углом в $\mathbb{R}^4$. Расширения этого класса являются полуограниченными, локальными генераторами сохраняющих положительность полугрупп. При некоторых ограничениях мы устанавливаем для них существование изолированных точек дискретного спектра и строго положительного вектора основного состояния. Мы выделяем два типа близких расширений: расширения А в исходном пространстве $L^2(\mathbb{R}^4)$ и расширения Б с выходом в пространство $L^2(\mathbb{R}^4) \oplus L^2(\Sigma)$. При наличии у расширения строго положительного вектора основного состояния с собственным значением $(-\lambda_0)$ мы с помощью обобщения метода из работы [9] преобразуем квадратичную форму для оператора $H + \lambda_0$ в энергетическую форму

$$E(u, v) = \int \nabla \bar{u} \nabla v \varphi_0^2 dx + \int p(t) \partial_t \overline{u(x(t))} \partial_t v(x(t)) \phi_0^2(t) dt \quad (1)$$

в пространстве $L^2(\mathbb{R}^4, \varphi_0^2 dx)$ для расширений А и в пространстве $L^2(\mathbb{R}^4, \varphi_0^2 dx + d\rho_0)$, где $\rho_0(k) = \int_{x(t) \in K} \phi_0^2(t) dt$ – мера Радона с носителем на Σ , для расширений Б.

Как будет показано, при ограничении на вещественнозначные функции она является локальной и регулярной в смысле [10] формой Дирихле. По теореме 6.2.2 из [10] таким формам однозначно соответствуют диффузионные процессы. Отличие формы (1) от обычных энергетических форм для точечных взаимодействий [9, 11] состоит в наличии дополнительной формы энергии на самом тонком множестве, в нашем случае на кривой. Для тонкого множества коразмерности единица диффузионные процессы с формами Дирихле такого типа впервые рассматривались в [12] и назывались диффузиями с граничным условием Вентцеля [13]. Для высших коразмерностей такие процессы, по-видимому, не рассматривались. Язык операторных расширений и форм Дирихле является в некотором смысле дополнительным один к другому. На языке расширений легче выражаются структурные свойства возмущений, а на языке форм Дирихле – локальные свойства, включая и свойства траекторий соответствующего процесса.

Расширения, которые мы выделяем, являются устойчивыми обобщениями возмущений типа δ -функции, и мы называем их обобщенными δ -возмущениями.

1. ЛОКАЛЬНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ЛАПЛАСИАНА НА КУСОЧНО-ГЛАДКОЙ КРИВОЙ В $\mathbb{R}^4$. СВЯЗЬ С ФОРМАМИ ДИРИХЛЕ

1.1. Возмущения на кривой в терминах теории самосопряженных расширений. Невозмущенный гамильтониан $H_0 = -\Delta$ является самосопряженным оператором в $L^2(\mathbb{R}^4)$ с областью определения пространством Соболева $H^2(\mathbb{R}^4)$. Ядром его резольвенты при $\mu > 0$ является функция Грина $G_\mu(x, y) = (-\Delta + \mu)^{-1}(x, y)$. Всюду будем считать, что Σ – кусочно-гладкая кривая, конечная или бесконечная, заданная параметрически $x(t): I \subset \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^4$, все особенности которой состоят лишь из конечного числа угловых точек и точек самопересечений под ненулевым углом. Множество таких

особых точек обозначим через Σ_0 , а множество их прообразов в I – через I_0 . Параметризацию считаем такой, что за исключением особых точек $|\dot{x}(t)| = 1$. Пространства функций на $\Sigma \setminus \Sigma_0$ и на $I \setminus I_0$ будем отождествлять.

Пусть $\mathfrak{G}_0 = L^2(\Sigma) \simeq L^2(I)$ и $\mathfrak{G}$ – гильбертово пространство, возникающее после пополнения пространства гладких функций с компактным носителем $C_0^\infty(I \setminus I_0)$ относительно нормы $\|W^{1/2} \cdot\|_{\mathfrak{G}_0}$ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle = (\cdot, W \cdot)_{\mathfrak{G}}$, где W – интегральный положительный оператор с ядром

$$W_\mu(t, t') = G_\mu * G_\mu(x(t), x(t')).$$

Будем считать, что кривая Σ удовлетворяет условию

$$\sup_{t \in I} \int W_\mu(t, t') dt' < \infty,$$

обеспечивающему ограниченность оператора W . Оно выполняется, например, для конечных кривых и бесконечных ломаных. В более общем случае это условие на глобальное поведение. Продолжая W по непрерывности на все пространство $\mathfrak{G}$, мы приходим к оснащению

$$\mathfrak{G}_+ \subset \mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}$$

с $\mathfrak{G}_+ = W\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G} = W^{-1}\mathfrak{G}_+$. В случае гладкой кривой $\mathfrak{G}_+ = H^{1/2}(\Sigma)$, $\mathfrak{G} = H^{-1/2}(\Sigma)$ – соответствующие пространства Соболева.

Как известно из теорем вложения для соболевских пространств, оператор следа $i_\Sigma f(t) = f(x(t))$ продолжается с множества гладких функций до непрерывного отображения $H^2(\mathbb{R}^4) \rightarrow L^2(\Sigma)$. Возмущения с носителем на множестве Σ меры нуль определяются как самосопряженные расширения симметрического оператора $\tilde{H}_0$, являющегося ограничением H_0 на область

$$D(\tilde{H}_0) = \{f \in H^2(\mathbb{R}^4) \mid i_\Sigma f = 0\}.$$

Возможны два типа расширений. Расширения в исходном пространстве $L^2(\mathbb{R}^4)$, которые мы будем характеризовать как расширения типа А. Расширения типа Б – расширения с выходом из исходного в расширенное пространство $L^2(\mathbb{R}^4) \oplus \mathfrak{G}_{\text{int}}$ (см., например, [2]). Мы будем рассматривать лишь расширения с $\mathfrak{G}_{\text{int}} = L^2(\Sigma)$.

Расширения типа А являются ограничениями сопряженного оператора $\tilde{H}_0^+$. Для любого $\mu > 0$ обозначим через Γ_μ оператор $\mathfrak{G} \rightarrow L^2(\mathbb{R}^4)$:

$$\Gamma_\mu F(x) = \int G_\mu(x, x(t)) F(t) dt.$$

Тогда сопряженный оператор $\tilde{H}_0^+$ действует по правилу

$$\begin{aligned} D(\tilde{H}_0^+) &= \{f = f_0 + \Gamma_\mu F \mid f_0 \in H^2(\mathbb{R}^4), F \in \mathfrak{G}\}, \\ \tilde{H}_0^+ f &= H_0 f_0 - \mu \Gamma_\mu F, \end{aligned}$$

а самосопряженные расширения H_A выделяются с помощью задания самосопряженного линейного отношения и, в частности, самосопряженного линейного оператора $\hat{A}(\mu)$ в $\mathfrak{G}$ дополнительным условием

$$W^{-1}i_{\Sigma}f_0 = \hat{A}(\mu)F. \quad (2)$$

Абстрактные свойства расширений обычно формулируются на языке этого оператора, однако он не имеет прямой интерпретации при изучении возмущений и локальных свойств расширений. Для этих целей удобнее иметь дело с граничным условием типа

$$i_r f = AF$$

с явным выделением локального оператора перенормированного следа i_r и параметризующего оператора A . Оператор следа i_r не определен на элементах из области определения сопряженного оператора из-за сингулярного поведения их в окрестности Σ (в нашем случае это кривая). Построение локального оператора i_r , расширяющего i_{Σ} , включает процедуру перенормировки. Точнее, зададим оператор i_r на плотном множестве $\{f \in D(\tilde{H}_0^+) \mid F \in C_0^\infty(I \setminus I_0)\}$ как

$$i_r f = i_{\Sigma}f_0 + i_r \Gamma_{\mu} F, \\ i_r \Gamma_{\mu} F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{I \setminus U_{\delta}(t)} G_{\mu}(x(t), x(s)) F(s) ds - (2\pi^2 \delta)^{-1} F(t) \right],$$

где $U_{\delta}(t)$ — δ -окрестность точки $t \in I \setminus I_0$.

С помощью i_r определим при $\lambda > 0$ операторнозначные функции в $\mathfrak{G}_0$

$$B(\lambda)F = -i_r \Gamma_{\lambda} F.$$

Изначально определенные на $C_0^\infty(I \setminus I_0)$, они плотно заданы, симметричны и замыкаемы до замкнутых симметрических операторов. Параметризующие операторы A мы также будем рассматривать как действующие в $\mathfrak{G}_0$. $B(\lambda)$ удовлетворяют резольвентному тождеству

$$B(\lambda) - B(\mu) = (\lambda - \mu)i_{\Sigma}G_{\lambda} * \Gamma_{\mu} \quad (3)$$

вследствие аналогичного тождества для функций Грина. Определим также при $\lambda > 0$ операторнозначные функции

$$A(\lambda) = A + B(\lambda) \quad \text{в } \mathfrak{G}_0; \\ \hat{A}(\lambda) = W^{-1}A(\lambda) \quad \text{в } \mathfrak{G}. \quad (4)$$

Выделяющие самосопряженные расширения операторы $\hat{A}(\mu)$ в (2) будем рассматривать как параметризованные операторами A с помощью формулы (4) при $\lambda = \mu$.

Для полуограниченности расширения H_A [14] необходимо, чтобы самосопряженные операторы $\hat{A}(\lambda)$ были полуограничены снизу при любом $\lambda > 0$, и достаточно, чтобы

существовало такое $\lambda_0 > 0$, что $\hat{A}(\lambda_0) \geq 0$. Подчеркнем, что для полуограниченности расширений недостаточно лишь условия полуограниченности $\hat{A}(\lambda)$ в фиксированной точке $\lambda = \mu$ [15]. Нам нужно иметь достаточное условие в терминах параметризующего оператора A в $\mathfrak{G}_0$, в качестве которого мы примем следующее:

При некотором $\mu > 0$ операторы $A(\mu) = A + B(\mu)$ являются самосопряженными в $\mathfrak{G}_0$ и существует $\lambda_0 > 0$ такое, что $A(\lambda)$ строго положительны при $\lambda > \lambda_0$. (5)

Области определения операторов $A(\lambda)$, как и их самосопряженность, не зависят от λ — это следует из соотношения (3), осуществляющего связь операторов в различных точках, и ограниченности оператора W .

При выполнении условия (5) мы можем уточнить оператор в (2), фиксирующий расширение H_A , задав его на области $D(\hat{A}) = A(\lambda)^{-1}\mathfrak{G}_+$, $\lambda > \lambda_0$, как $\hat{A}(\mu) = W^{-1}A(\mu)$, при этом $A(\mu)$ рассматривается как оператор из $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{G}_+$. В этом случае $\hat{A}(\lambda)$ удовлетворяют достаточному условию полуограниченности Бирмана, приведенному выше, и выделяемые самосопряженные расширения H_A действительно полуограничены снизу. Теперь на подходящем множестве элементов из области существенной самосопряженности расширения условие (2) действительно принимает вид граничного условия $i_r f = AF$.

Операторы $A(\lambda)$ при $\lambda > \lambda_0$, рассматриваемые как операторы из $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{G}_+$, обратимы, и формула Крейна для резольвент расширений типа A принимает вид

$$R_A(-\lambda) = G_\lambda * + \Gamma_\lambda A(\lambda)^{-1} i_\Sigma G_\lambda *, \quad (6)$$

где оператор $A(\lambda)^{-1}$ рассматривается как оператор из $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{G}_+$.

Рассматриваемые нами *расширения типа Б* являются специальными расширениями оператора $\tilde{H}_0$ с выходом в пространство $L^2(\mathbb{R}^4) \oplus \mathfrak{G}_{\text{int}}$. Физические применения расширений такого типа отражены в [2–6] и приведенных там ссылках, результаты общей теории — в [2, 15, 16]. Один из способов построения этих расширений [16] состоит в рассмотрении оператора $\tilde{H}_0$ как неплотно заданного в $L^2 \oplus \mathfrak{G}_{\text{int}}$ и его графика как симметрического линейного отношения $\tilde{S}$. Сопряженное отношение $\tilde{S}^+$ с областью определения $D(\tilde{S}^+)$ и областью значений $\mathfrak{R}(\tilde{S}^+)$ устроено так:

$$D(\tilde{S}^+) = \{f \in D(\tilde{H}_0^+), F_{\text{int}}\} \subset L^2 \oplus \mathfrak{G}_{\text{int}}; \quad \mathfrak{R}(\tilde{S}^+) = \{\tilde{H}_0^+ f, F'_{\text{int}}\} \subset L^2 \oplus \mathfrak{G}_{\text{int}}.$$

Самосопряженные расширения S являются ограничениями $\tilde{S}^+$ и выделяются с помощью задания самосопряженного отношения τ , но уже в пространстве $\mathfrak{G} \oplus \mathfrak{G}_{\text{int}}$:

$$\{\{-W^{-1}i_\Sigma f_0, F_{\text{int}}\}, \{F, F'_{\text{int}}\}\} \subset \tau.$$

Те из этих расширений, которые являются графиками линейных операторов, и есть искомые расширения исходного оператора $\tilde{H}_0$. Руководствуясь целью выбора устойчивых

расширений (см. подробное обсуждение этого вопроса в контексте трехчастичной задачи в [6]), мы приходим к следующему варианту параметризации расширений Б. Оператор τ в $\mathfrak{G} \oplus \mathfrak{G}_{\text{int}}$ задается в матричном виде

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^{-1}J \\ \gamma^{-1}J^+ & \gamma^{-2}A_\gamma(\mu) \end{pmatrix}, \quad A_\gamma(\lambda) = \gamma^2(A + \lambda) + B(\lambda),$$

где J – оператор включения $\mathfrak{G}_0$ в $\mathfrak{G}$, $J^+ = W$ – его сопряженный, γ – вещественный параметр, $B(\lambda) = -i_r\Gamma_\lambda$ и A – самосопряженный оператор в $\mathfrak{G}_0$. Операторнозначная функция корректно определена при всех $\lambda > 0$.

Построенные расширения допускают простое явное описание

$$\begin{aligned} D(H_B) &= \{ \{f, F_{\text{int}}\} \mid f = f_0 + \gamma^{-1}\Gamma_\mu JF, \quad F_{\text{int}} = F \in D(A_\gamma), \quad f_0 \in H^2(\mathbb{R}^4) \}, \\ H_B \{f, F_{\text{int}}\} &= \{ H_0 f_0 - \mu\gamma^{-1}\Gamma_\mu JF, AF - \gamma^{-1}i_r f \}. \end{aligned} \quad (7)$$

Важное отличие их от расширений А проявляется в отсутствии дополнительного граничного условия в области определения, что облегчает их исследование. Достаточное условие полуограниченности в терминах $A_\gamma(\lambda)$ здесь проще, чем для расширений А,

$$\text{При некотором } \mu > 0 \text{ оператор } A_\gamma(\mu) \text{ полуограничен в } \mathfrak{G}_0 \text{ снизу.} \quad (8)$$

Из-за наличия линейного слагаемого по λ отсюда сразу же следует, что существует $\lambda_0 > 0$ такое, что $A_\gamma(\lambda)$ обратим при $\lambda > \lambda_0$, точнее этот оператор строго положителен. При таких λ резольвента расширений легко вычисляется и представляется в виде

$$R_B(-\lambda) \begin{pmatrix} f \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_\lambda * f + \Gamma_\lambda J A_\gamma(\lambda)^{-1} [J^+ W^{-1} i_\Sigma G_\lambda * f + \gamma F] \\ \gamma A_\gamma(\lambda)^{-1} [J^+ W^{-1} i_\Sigma G_\lambda * f + \gamma F] \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Наш выбор внутреннего пространства $\mathfrak{G}_{\text{int}} = L^2(\Sigma)$ делает возможным отождествление пространств $L^2(\mathbb{R}^4) \oplus L^2(\Sigma)$ и $L^2(\mathbb{R}^4, dx + d\rho)$, где ρ – мера Радона с носителем на кривой, определяемая своей формальной плотностью $\rho(x) = \int_I \delta(x - x(t)) dt$. Это отождествление осуществляется по правилу соответствия представителей

$$\hat{f} = \{f, F\} \longleftrightarrow f = \begin{cases} f(x), & x \notin \Sigma, \\ F(t), & x = x(t) \in \Sigma, \end{cases}$$

и вследствие нулевой лебеговой меры Σ является корректным.

Связь расширений А и Б. Для ее выявления будем указывать в соответствующих операторах явную зависимость от параметров: $H_A(A)$, $R_A(-\lambda; A)$ для расширений А и $H_B(A, \gamma)$, $R_B(-\lambda; A, \gamma)$ для расширений Б.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть при некотором $\lambda > \lambda_0$ оператор $A(\lambda) = A + B(\lambda)$ строго положителен в $\mathfrak{G}_0$. Тогда в $L^2(\mathbb{R}^4) \oplus L^2(\Sigma)$

$$s\text{-}\lim_{\gamma \rightarrow 0} R_B(-\lambda; \gamma^{-2}A, \gamma) \{f, F\} = \{R_A(-\lambda; A)f, 0\}.$$

Доказательство легко получается с использованием явных формул для резольвент (6) и (9) с учетом ограниченности операторов W и $A(\lambda)^{-1}$ в $\mathfrak{G}_0$ и $i_\Sigma: H^2(\mathbb{R}^4) \rightarrow \mathfrak{G}_+ \subset \mathfrak{G}_0$.

Из этого предложения следует, что расширения A можно рассматривать как предел расширений B в смысле сильной сходимости обобщенных резольвент.

Квадратичные формы. Обозначим через $h_A(\lambda)$ квадратичную форму, порождаемую оператором $H_A + \lambda$, через $h_B(\lambda, \gamma)$ — оператором $H_B(\gamma^{-2}A, \gamma) + \lambda$, через $h_0(\lambda)$ — оператором $H_0 + \lambda$. Прежде чем переходить к вычислению квадратичных форм, сделаем следующее замечание. При описании расширений H_A и H_B мы фиксировали дефектное подпространство $\mathfrak{N}_\mu \subset D(\tilde{H}_0^+)$ выбором $\lambda = \mu$. Однако мы могли бы использовать для этого и любую другую точку $\lambda = \nu$. Переход от одной фиксации к другой осуществляется заменой

$$\mu \rightarrow \nu, \quad \Gamma_\mu \rightarrow \Gamma_\nu, \quad B(\mu) \rightarrow B(\nu),$$

при этом связь операторов $B(\lambda)$ в различных точках определяется по формуле (3), а операторов Γ_λ — по формуле

$$\Gamma_\nu - \Gamma_\mu = (\mu - \nu)(H_0 + \nu)^{-1}\Gamma_\mu. \quad (10)$$

Выбрав теперь произвольное $\lambda > 0$, вычислим квадратичную форму $h_A(\lambda)(g, f)$ для $f, g \in D(H_A)$, $f = f_0 + \Gamma_\lambda F$, $g = g_0 + \Gamma_\lambda G$,

$$f_0, g_0 \in H^2(\mathbb{R}^4); \quad F, G \in D(\hat{A}(\lambda)).$$

Вычисляя действие $H_A + \lambda$ на f и скалярное произведение с g , получим

$$h_A(\lambda)(g, f) = h_0(\lambda)(g_0, f_0) + (G, A(\lambda)F)_{\mathfrak{G}_0}. \quad (11)$$

Следующее предложение содержит описание области определения этой квадратичной формы и является переформулировкой в терминах оператора $A(\lambda)$ описания области определения квадратичной формы полуограниченного самосопряженного расширения из [14] (см. также [17]).

Предложение 2. При выполнении достаточного условия (5) квадратичная форма $h_A(\lambda)$ замыкаема и продолжается до замкнутой формы с областью определения

$$D[h_A] = \{f = f_0 + \Gamma_\lambda F \mid f_0 \in H^1(\mathbb{R}^4), F \in D[a(\lambda)]\}.$$

Здесь $D[a(\lambda)]$ — область определения квадратичной формы $a(\lambda)$, порождаемой оператором $A(\lambda)$ в $\mathfrak{G}_0$.

Аналогичное вычисление формы $h_B(\lambda, \gamma)$ на операторной области определения приводит к выражению

$$h_B(\lambda, \gamma)(\hat{g}, \hat{f}) = h_0(\lambda, \gamma)(g_0, f_0) + (G, (A(\lambda) + \gamma^2\lambda)F)_{\mathfrak{G}_0}. \quad (12)$$

Аналогом предложения 2 является

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. При условии полуограниченности снизу оператора $A(\lambda)$ квадратичная форма $h_B(\lambda, \gamma)$ замыкаема и продолжается до замкнутой формы с областью определения

$$D[h_B] = \{ \hat{f} = \{f, \gamma F\} \in L^2(\mathbb{R}^4) \oplus L^2(\Sigma) \mid f = f_0 + \Gamma_\lambda F, f_0 \in H^1(\mathbb{R}^4), F \in D[a(\lambda)] \}.$$

Как видно из явного описания, области определения квадратичных форм расширений А и Б близки по аналитическим свойствам, хотя и различаются геометрически. Соотношение между ними получим по следующему рецепту. Сопоставим каждому элементу $f \in D[h_A]$ элемент $\hat{f}_\gamma = \{f, \gamma F\} \in D[h_B]$. Тогда, очевидно, имеем

$$\begin{aligned} s\text{-}\lim \hat{f}_\gamma &= \{f, 0\}, \\ \lim_{\gamma \rightarrow 0} h_B(\lambda, \gamma) [\hat{f}_\gamma] &= h_A[f]. \end{aligned} \quad (13)$$

1.2. Локальность. Теперь зададимся вопросом: какие из расширений следует считать локальными? Вопрос этот не простой. Приведем обычное определение локальности для операторов в пространстве функций. Оператор H называется локальным, если для открытого множества $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ и элемента $f \in D(H)$ выполняется $f|_{\mathcal{O}} = 0$, то $Hf|_{\mathcal{O}} = 0$. Этому определению удовлетворяют и исходный оператор H_0 , и его ограничение $\tilde{H}_0$. Но ему удовлетворяет и всякое самосопряженное расширение оператора $\tilde{H}_0$ в исходном пространстве (см. лемму С.2 из приложения С в [11]). Это связано с плотностью $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Sigma)$ в $L^2(\mathbb{R}^4)$. Значит, для расширений, обусловленных возмущениями на нульмерных множествах, такое определение не является различающим. Оно содержит два условия: принадлежность функции области определения $D(H)$ и ее обращение в нуль в $\mathcal{O}$, могущие сразу же привести к тому, что $f \in D(\tilde{H}_0)$, т.е. свести оператор H к $\tilde{H}_0$. Эта трудность отсутствует, если $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset D(H)$, как, например, для расширения Фридрихса $\tilde{H}_0$. Для многих же расширений $D(H) \cap D(H_0) = \{0\}$. Вопрос о локальности расширений тем самым включает в себя вопрос о существовании ненулевых элементов $f \in D(H)$, $f|_{\mathcal{O}} = 0$ таких, что $f \notin D(\tilde{H}_0)$ для подходящего класса открытых множеств.

Одним из возможных подходов к выделению локальных расширений является переход на язык квадратичных форм, т.к. в этом случае ослабляется роль граничного условия, имеющегося в операторной области определения.

Квадратичную форму h с областью определения $D[h] \subset L^2(X, m)$ будем называть локальной, если

$$h(g, f) = 0 \quad \text{при} \quad \text{supp } g \cap \text{supp } f = \emptyset.$$

Соответственно оператор в $L^2(X, m)$ будем называть локальным, если локальна ассоциированная с ним квадратичная форма.

В нашем случае $X = \mathbb{R}^4$, $dm = dx$ для расширений А и $dm = dx + d\rho$ для расширений Б.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Расширения типа А и типа Б локальны в смысле локальности квадратичных форм тогда и только тогда, когда в этом же смысле локальны параметризующие операторы А.

Доказательство проводится одинаково в обоих случаях, поэтому ограничимся расширениями A . Справедлива

ЛЕММА 1. Пусть $f, g \in D[h_A(\mu)]$ и $K_f \cap K_g = \emptyset$. Тогда квадратичная форма $h_0(\mu)(g, f)$, порождаемая оператором $H_0 + \mu$, может быть преобразована к виду

$$h_0(\mu)(g_0, f_0) = -(G, B(\mu)F)_{\mathfrak{G}_0}.$$

Доказательство. Условие $f \in D[h_A(\mu)]$ означает, что

$$f = f_0 + \Gamma_\mu F, \quad f_0 \in H^1(\mathbb{R}^4), \quad F \in D[a(\mu)].$$

Следовательно, для любой $\varphi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4 \setminus \Sigma)$, $\text{supp } \varphi_0 \subset \mathbb{R}^4 \setminus K_f$, $((-\Delta + \mu)\varphi_0, f) = ((-\Delta + \mu)\varphi_0, f_0) = 0$. Поскольку $f_0 \in H^1(\mathbb{R}^4)$ и множество Σ имеет нулевую H^1 -емкость, то отсюда следует, что носитель обобщенной функции $\text{supp}(-\Delta + \mu)f_0 \subset K_f$. Далее, $((-\Delta + \mu)\varphi, f) = ((-\Delta + \mu)\varphi, f_0) + (i_\Sigma \varphi, F)_{\mathfrak{G}_0}$ для любой $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$. Отсюда, учитывая предыдущее заключение, получаем $\text{supp } F \subset K_f \cap \Sigma$. Аналогичные выводы справедливы и для компонент g_0 , G элемента g . Поскольку $K_f \cap K_g = \emptyset$, то на множестве K_f элемент $\Gamma_\mu G$ является гладкой функцией, и из условия $g|_{K_f} = 0$ следует, что $g_0|_{K_f} = -\Gamma_\mu G|_{K_f}$. С учетом этого получаем цепочку равенств

$$h_0(\mu)(g_0, f_0) = (g_0, (-\Delta + \mu)f_0) = -(\Gamma_\mu G, (-\Delta + \mu)f_0) = -(G, i_\Sigma f_0)_{\mathfrak{G}_0}.$$

Используем теперь включение $\text{supp } G \subset K_g \cap \Sigma$, но на множестве K_g имеем $f|_{K_g} = 0$, откуда $f_0|_{K_g} = -\Gamma_\mu F|_{K_g}$. Последнее равенство позволяет получить окончательное выражение

$$(G, i_\Sigma f_0)_{\mathfrak{G}_0} = -(G, i_\Sigma \Gamma_\mu F)_{\mathfrak{G}_0} = (G, B(\mu)F)_{\mathfrak{G}_0}.$$

Лемма доказана.

Теперь доказательство предложения достаточно просто:

$$\begin{aligned} h_A(\mu)(g, f) &= h_0(\mu)(g_0, f_0) + (G, A(\mu)F)_{\mathfrak{G}_0} = \\ &= -(G, B(\mu)F)_{\mathfrak{G}_0} + (G, (A + B(\mu))F)_{\mathfrak{G}_0} = (G, AF)_{\mathfrak{G}_0}. \end{aligned}$$

Мы получили, что $h_A(\mu)(g, f) = (G, AF)_{\mathfrak{G}_0}$. Из этого равенства и следует утверждение предложения.

Чтобы увидеть различие между двумя определениями локальности, рассмотрим пример точечного взаимодействия в конечном числе точек.

ПРИМЕР. $\Sigma = \{x_j\}_1^N \subset \mathbb{R}^3$. Как известно, см., например, [11], все самосопряженные расширения параметризуются $N \times N$ -эрмитовыми матрицами A . Все они локальны в смысле первого операторного определения. Второе определение локальности в смысле форм выделяет лишь такие, для которых A – диагональные матрицы, характеризующие модель независимых центров.

Дополнительная конкретизация параметризующего оператора A происходит при наложении условий на его область определения. Например, в случае, когда $C_0^\infty(I \setminus I_0) \subset D(A)$, то, как известно из теории обобщенных функций, оператор A определяется дифференциальным выражением с подходящими граничными условиями в точках множества I_0 .

1.3. Сохранение положительности. Теперь мы хотим охарактеризовать параметризующие операторы A , выделяющие расширения, которые являются генераторами сохраняющих положительность полугрупп. Следуя [18], элементы f пространства $L^2(X, m)$ будем называть положительным, если $f \neq 0$ и $f \geq 0$ почти всюду, и строго положительным, если $f > 0$ почти всюду.

Наиболее конструктивным результатом здесь является характеристика генераторов марковских полугрупп в терминах форм Дирихле и формула Берлинга–Дени [10]. Марковость предполагает выполнение почти всюду свойства $0 \leq \exp(-tH)f \leq 1$ всякий раз, когда $0 \leq f \leq 1$ почти всюду. В нашем случае образ резольвенты расширений, а значит, и полугруппы, состоит из сингулярных функций, поэтому марковости ожидать не приходится. Однако дополнительную характеристику A при условии его локальности получить можно. Здесь мы будем предполагать, что выполняются достаточные условия полуограниченности расширений, $(-\lambda_0) = \inf \sigma(H_A)$ ($= \inf \sigma(H_B)$) и расширения являются локальными с $C_0^\infty(I \setminus I_0) \subset D[a]$.

Воспользуемся первым критерием Берлинга–Дени, теорема XIII.50 в [18], пункты а) и с) которой утверждают, что если $H \geq 0$ – самосопряженный оператор в $L^2(X, m)$, то утверждения:

- а) $\exp(-tH)$ сохраняет положительность при всех $t > 0$;
- с) $\exp(-tH)$ сохраняет вещественность и $(f_+, Hf_+) \leq (f, Hf)$ для вещественных $f \in L^2(X, m)$;

эквивалентны. Здесь $f_+(x) = \max(f(x), 0)$ и квадратичные формы предполагаются продолженными на все пространство приравниванием их $+\infty$ на элементах $f \notin D[h]$.

Для определенности будем рассматривать расширения A . Для расширений B рассмотрение аналогично. Пусть $H_A + \lambda$ при $\lambda > \lambda_0$ является генератором полугруппы сжатий, сохраняющей положительность. Тогда из импликации а) $\Rightarrow$ с) следует, что полугруппа, а значит, и резольвента $R_A(-\lambda)$ сохраняет вещественность при $\lambda > \lambda_0$. Из формулы (6) для резольвенты следует, что и операторы $A(\lambda)^{-1}$, $A(\lambda)$ сохраняют вещественность. Но тогда этим свойством обладают и резольвенты этих операторов и порождаемые ими полугруппы. Следовательно, $A(\lambda)$ при $\lambda > \lambda_0$ является генератором сохраняющей вещественность полугруппы сжатий в $\mathfrak{G}_0$. Покажем, что такая полугруппа сохраняет и положительность. Пусть $\lambda > \lambda_0$ и f – элемент из области определения формы $D[h_A]$ вида $f = \Gamma_\lambda F$, $F \in D[a(\lambda)]$. Тогда в силу а) $\Rightarrow$ с) имеем $(\Gamma_\lambda F)_+ \in D[h_A]$, т.е. $(\Gamma_\lambda F)_+ = \tilde{f}_0 + \Gamma_\lambda \tilde{F}$, $\tilde{f}_0 \in H^1(\mathbb{R}^4)$, $\tilde{F} \in D[a(\lambda)]$. Используя доминирование потенциалов $\Gamma_\lambda F_+$ в окрестности Σ по сравнению с элементами из $H^1(\mathbb{R}^4)$, можно показать, что $\tilde{F} = F_+$. Неравенство из с) для выбранных элементов принимает тогда вид

$$h_A(\lambda)[(\Gamma_\lambda F)_+] = h_0(\lambda)[\tilde{f}_0] + (F_+, A(\lambda)F_+)_{\mathfrak{G}_0} \leq (F, A(\lambda)F)_{\mathfrak{G}_0}.$$

Приняв во внимание неотрицательность первого слагаемого, получим

$$(F_+, A(\lambda)F_+)_{\mathfrak{G}_0} \leq (F, A(\lambda)F)_{\mathfrak{G}_0}.$$

Воспользуемся теперь утверждением с) $\Rightarrow$ а) и получим, что $A(\lambda)$ является генератором полугруппы сжатий, сохраняющих положительность при всех $\lambda > \lambda_0$. Для того

чтобы извлечь отсюда информацию об операторе A , можно воспользоваться конструкцией, использованной в монографии [10] для вывода формулы Берлинга–Дени (теорема 2.2.1 [10]). Конструкция основана на использовании “аппроксимирующей формы”, порождаемой оператором $\mu(1 - \mu(A(\lambda) + \mu)^{-1})$, и исследовании ее при $\mu \rightarrow \infty$. В теореме Берлинга–Дени аналог оператора $\mu(A(\lambda) + \mu)^{-1}$ является марковским, у нас же он лишь сохраняющим положительность. Вследствие этого возникает описание “диффузионной части” и нелокальной части формы $a(\lambda)$, соответствующей оператору $A(\lambda)$. Для локальной симметрической формы a диффузионная часть a^c (см. теорему 2.2.1 [10]) выделяется следующим условием, более сильным, чем локальность:

$$a^c(u, v) = 0, \text{ если } v = \text{const на носителе } u.$$

В нашем случае квадратичная форма $a(\lambda)$, соответствующая $A(\lambda)$, есть сумма $a(\lambda) = a + b(\lambda)$, причем $b(\lambda) = b_J(\lambda) + b_k(\lambda)$. Форма

$$b_J(\lambda)(u, v) = \frac{1}{2} \iint G_\lambda(t, s) (\bar{u}(t) - \bar{u}(s)) (v(t) - v(s)) dt ds$$

является нелокальной, форма же $b_k(\lambda)$ соответствует оператору умножения на функцию $k_\lambda(t) = -i_r G_\lambda * 1$ и является локальной. Локальная часть формы $a(\lambda)$ есть в таком случае $a + b_k(\lambda)$, а ее диффузионная часть совпадает с диффузионной частью a^c формы a . Соответствующую часть оператора A будем обозначать A^c . Используя свойство сохранения положительности оператором $(A(\lambda) + \mu)^{-1}$, из доказательства указанной теоремы и теоремы 2.2.2 из [10] можно извлечь такую информацию об операторе A^c .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть параметризующий оператор A локален и $C_0^\infty(I \setminus I_0) \subset D[a]$ является существенной областью его квадратичной формы. Тогда при условии полуограниченности расширения H_A и условии сохранения положительности для $\exp(-tH_A)$ диффузионная часть a^c квадратичной формы a с необходимостью имеет вид

$$a^c(u, v) = \int_{I \setminus I_0} \bar{u}'(t) v'(t) d\nu(t),$$

где ν – неотрицательная мера Радона.

Для обеспечения устойчивости мы ограничимся лишь случаем $d\nu = p(t)dt$. В результате выделяется класс параметризующих операторов

$$A = -\partial_t p(t) \partial_t + q(t); \quad p, q \in L^1(I), \quad p(t) > p_0 > 0, \quad (14)$$

согласованный с локальностью и сохранением положительности. Дополнительно, хотя это и не необходимо, будем считать, что $q \geq 0$. Как будет показано, этот класс согласован и с условием устойчивости. Свойство сохранения положительности не дает информацию о недиффузионной части оператора A , т.е. о $q(t)$, и ее выбор регламентируется лишь соображениями устойчивости. Все сказанное буквально переносится и на расширения Б.

1.4. Связь с формами Дирихле. Связь расширений на тонких множествах Σ в $\mathbb{R}^n$ и формами Дирихле была установлена в [9] и базируется на следующем наблюдении. Если гамильтониан такого возмущения (расширение типа А с параметризующим оператором умножения на функцию) обладает строго положительным основным состоянием с собственным значением $-\lambda_0$, то ему соответствует энергетическая форма в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n, \varphi_0^2 dx)$

$$E_0(u, v) = \int \overline{\nabla u} \nabla v \varphi_0^2 dx. \quad (15)$$

Самосопряженный неотрицательный генератор этой формы унитарно-эквивалентен оператору $H + \lambda_0$. Эквивалентность осуществляется оператором умножения на φ_0 . Ограничение энергетической формы на вещественное подпространство является локальной и регулярной формой Дирихле, которой однозначно соответствует диффузионный процесс. На этом пути возникает возможность интерпретации расширений в терминах траекторий такого процесса. Более общие формы, чем (15), в контексте возмущений на тонких множествах, содержащие дополнительные формы Дирихле на Σ , рассматривались в [19].

Мы проследим эту связь для расширений Б, а для расширений А она получается предельным переходом $\gamma \rightarrow 0$. Рассмотрим расширение в пространстве $L^2(\mathbb{R}^4, dx + d\rho)$ с параметризующим оператором (14). Как будет показано во втором разделе, эти расширения полуограничены и при некоторых ограничениях имеют “строго положительный” вектор основного состояния $\hat{\varphi}_0$ с наименьшим невырожденным собственным значением $-\lambda_0$. Сейчас, предполагая, что это имеет место, мы покажем, что квадратичная форма оператора $H_B + \lambda_0$ является локальной и регулярной формой Дирихле в подходящем пространстве. Из явной формулы (7) для действия оператора H_B легко получается утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Самосопряженное расширение $H_B(A, \gamma)$ оператора $\tilde{H}_0$, выделяемое с помощью оператора A , имеет число $-\lambda_0$ собственным значением тогда и только тогда, когда уравнение

$$A_\gamma(\lambda_0)\phi_0 = 0, \quad A_\gamma(\lambda) = \gamma^2(A + \lambda) + B(\lambda),$$

имеет решение $\phi_0 \in D(A_\gamma) \subset \mathfrak{G}_0$. В этом случае $\hat{\varphi}_0 = \{\gamma^{-1}\Gamma_{\lambda_0}\Phi_0, \Phi_0\}$ является его собственным вектором.

Для установления искомой связи с формами Дирихле потребуется несколько вспомогательных результатов. Пусть $h(\mu)$ – квадратичная форма, соответствующая оператору $H_B + \mu$.

ЛЕММА 2. Область определения $D[h]$ формы $h(\mu)$ инвариантна относительно умножения на функции из $C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$, $U = i_\Sigma u$ – ее след на Σ и $\hat{f} \in D[h]$, т.е. $\hat{f} = \{f, F\}$: $f = f_0 + \gamma^{-1}\Gamma_\mu F$, $f_0 \in H^1(\mathbb{R}^4)$, $F \in D[a_\gamma]$. Покажем, что $uf = \{uf, UF\} \in D[h]$. Разобьем uf на два слагаемых $uf = (uf)_0 + \gamma^{-1}\Gamma_\mu(UF)$,

$$(uf)_0 = uf_0 + \gamma^{-1}(u\Gamma_\mu F - \Gamma_\mu(UF)).$$

Очевидно, что $uf_0 \in H^1(\mathbb{R}^4)$; покажем, что это верно и для $u\Gamma_\mu F - \Gamma_\mu(UF)$. Сначала отметим, что этот элемент принадлежит $L^2(\mathbb{R}^4)$.

Рассмотрим производную

$$\nabla[(uf)_0 - uf_0] = \gamma^{-1}\nabla u\Gamma_\mu F + \gamma^{-1} \int \nabla G_\mu(x, x(t))(u(x) - U(t))F(t) dt.$$

Здесь первое слагаемое принадлежит $L^2(\mathbb{R}^4)$, покажем, что и второе тоже принадлежит. Воспользуемся тем, что зависимость ядра $G_\mu(x, y)$ от точек x и y выражается через расстояние между ними $d(x, y)$ как $G_\mu(x, y) = g_\mu(d^2(x, y))$. В таком случае $\nabla_i G_\mu(x, y) = 2(x_i - y_i)g'_\mu(d^2)$ и на носителе функции $u(x)$ выполняется $|(x_i - x_i(t)) \times (u(x) - U(t))| \leq cd^2(x, x(t))$. Отсюда получаем оценку

$$|\nabla G_\mu(x, x(t))(u(x) - U(t))| < c_1 d^{-2}(x, x(t)),$$

которая позволяет утверждать, что подынтегральное выражение имеет особенность такого же типа, как и $G_\mu(\cdot, \cdot)$, и представляемый интегралом элемент принадлежит $L^2(\mathbb{R}^4)$. Так как и сам элемент $(uf)_0$ и его обобщенные производные принадлежат $L^2(\mathbb{R}^4)$, то, следовательно, $(uf)_0 \in H^1(\mathbb{R}^4)$. Остается показать, что $UF \in D[a_\gamma]$. Как следует из предложения 11 п. 2.1 (см. ниже), $D[a_\gamma] = D[a]$ и указанная принадлежность легко устанавливается из структуры формы a оператора A . Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $\phi \in D[a]$ — непрерывная, положительная на $I \setminus I_0$ функция и $\widehat{\varphi}_\mu = \{\gamma^{-1}\Gamma_\mu \Phi, \Phi\}$. Тогда множество элементов $\{u\widehat{\varphi}_\mu \mid u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4)\}$ является существенной областью квадратичной формы $h(\mu)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\widehat{\varphi}_\mu \in D[h]$ и из леммы 2 следует, что $u\widehat{\varphi}_\mu \in D[h]$. Вследствие положительности Φ на $I \setminus I_0$ множество $\{U\Phi \mid U \in C_0^\infty(I \setminus I_0)\}$ является существенной областью формы a_γ . Действительно, множество $C_0^\infty(I \setminus I_0)$ является плотным в $D[a_\gamma] = D[a]$ относительно нормы $(a[u] + \|u\|^2)^{1/2}$. Для любой $u \in C_0^\infty(I \setminus I_0)$ элемент $u/\phi \in D[a]$. Но тогда существует последовательность $\{\tilde{u}_n\}$, $\tilde{u}_n \in C_0^\infty(I \setminus I_0)$, сходящаяся в $D[a]$ к u/ϕ . В этом случае легко показать, что последовательность функций $\tilde{u}_n\Phi$ сходится в $D[a]$ к u . Теперь из плотности $C_0^\infty(I \setminus I_0)$ следует плотность $\{U\Phi \mid U \in C_0^\infty(I \setminus I_0)\}$ в $D[a_\gamma]$.

Далее, множество элементов $\{u\Gamma_\mu \Phi - \Gamma_\mu(U\Phi) \mid u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\}$ плотно в $H^1(\mathbb{R}^4)$, поскольку в нем плотно $C_0^\infty(\mathbb{R}^4 \setminus \Sigma)$, а функция $\Gamma_\mu \Phi$ является гладкой и положительной в $\mathbb{R}^4 \setminus \Sigma$. Плотность $C_0^\infty(\mathbb{R}^4 \setminus \Sigma)$ в $H^1(\mathbb{R}^4)$ является следствием нулевой H^1 -емкости Σ .

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\widehat{\varphi}_0$ — вектор основного состояния расширения H_B , тогда множество $\{u\widehat{\varphi}_0 \mid u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4)\}$ является существенной областью отвечающей ему квадратичной формы $h_B(\lambda_0)$.

Этот результат является следствием леммы 3 и предложения 12 п. 2.3 (см. ниже), согласно которому вектор основного состояния представляется как $\widehat{\varphi}_0 = \{\gamma^{-1}\Gamma_{\lambda_0}\Phi_0, \Phi_0\}$ с $\Phi_0 \in D[a]$, $\phi_0 > 0$ в $I \setminus I_0$.

Пусть теперь $D_0 \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^4 \setminus \Sigma_0)$ — подмножество функций, которые в окрестности Σ ведут себя как

$$u \simeq u_0(t) + |y|^2 u_1(t, y), \quad (t, y) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3.$$

Тогда производя оценки, аналогичные приведенным в доказательстве леммы 2, можно показать, что множество $\{u\hat{\varphi}_0 \mid u \in D_0\} \subset D(H_B)$, и, повторяя доказательство леммы 3, установить, что это множество является существенной областью формы $h(\lambda_0)$. Теперь же для нас важно, что элементы этого множества принадлежат области определения расширения H_B . Преобразуем форму $h(\lambda_0)$ в энергетическую.

Пусть $\hat{f} = u\hat{\varphi}_0$, $\hat{g} = v\hat{\varphi}_0$, $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$, $v \in D_0$, и $\hat{\varphi}_0$ – вектор основного состояния H_B с собственным значением $-\lambda_0$. Пользуясь формулой (7) для действия H_B , получим

$$h(\lambda_0)(\hat{f}, \hat{g}) = (\hat{f}, (H_B + \lambda_0)\hat{g}) = (u\varphi_0, \varphi_0(-\Delta + \lambda_0)v - 2\nabla v \nabla \varphi_0) + \\ + (U\Phi_0, (A + \lambda_0)(V\phi_0) - \gamma^{-1}i_r(v\varphi_0))_{\mathfrak{G}_0}.$$

Учитывая принадлежность $u \in D_0$, мы можем проинтегрировать по частям

$$(u\varphi_0, \varphi_0(-\Delta u)) = (\nabla(v\varphi_0^2), \nabla u),$$

а также записать

$$i_r(u\varphi_0) = \gamma^{-1}U i_r \Gamma_{\lambda_0} \Phi_0.$$

Подставляя эти выражения в формулу для $h(\lambda_0)$ и учитывая, что Φ_0 удовлетворяет уравнению в предложении 6, получим искомое представление

$$E(u, v) := h(\lambda_0)(u\hat{\varphi}_0, v\hat{\varphi}_0) = E_0(u, v) + E_\Sigma(U, V), \\ E_0(u, v) = \int \overline{\nabla u} \nabla v \varphi_0^2 dx, \quad E_\Sigma(U, V) = \int p(t) \overline{U'} V' \phi_0^2 dt. \quad (16)$$

Заметим также, что дополнительная энергетическая форма E_Σ определяется лишь диффузионной частью A^c параметризующего оператора.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Квадратичная форма $h(\lambda_0)$ для расширения B допускает представление в виде энергетической формы (16) и замыкается до локальной и регулярной формы Дирихле в пространстве $L^2(\mathbb{R}^4, \varphi_0^2 dx + d\rho_0)$, где ρ_0 – мера Радона с носителем на Σ , определяемая формальной плотностью $\rho_0(x) = \int \delta(x - x(t)) \times \Phi_0^2(t) dt$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Локальность формы E следует из локальности $h(\lambda_0)$. Форма Дирихле E в $L^2(X, m)$ называется регулярной [10], если в $D[E]$ имеется плотное подмножество функций из $C_0(X)$, плотное также и в $C_0(X)$ относительно равномерной нормы. По лемме 3 и следствию из нее таковым у нас является множество $C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$.

Диффузионный процесс, отвечающий такой форме Дирихле, является процессом типа Вентцеля [12, 13]. Его траектории имеют части, расположенные на Σ .

Аналогичные результаты имеют место и для расширений A . Переход к ним осуществляется предельным переходом $\gamma \rightarrow 0$ после подстановки $A \rightarrow \gamma^{-2}A$, $\hat{f} \rightarrow \hat{f}_\gamma = \{f, \gamma F\}$. Если $\Phi_0 \in D(A(\lambda_0))$ является решением уравнения $A(\lambda_0)\Phi_0 = 0$ в $\mathfrak{G}_0$ и $\varphi_0 = \Gamma_{\lambda_0}\Phi_0$, то квадратичная форма $h(\lambda_0)$ представляется как форма энергии (16), но в пространстве $L^2(\mathbb{R}^4, \varphi_0^2 dx)$. Необходимо также заметить, что если $\Phi_0 \in D(\hat{A}(\lambda_0))$ – решение уравнения $A(\lambda_0)\phi_0 = 0$, то $\Phi_0 \in D(\hat{A}(\lambda_0))$ и $\hat{A}(\lambda_0)\Phi_0 = 0$, а значит, φ_0 является собственным вектором (основным состоянием, если $-\lambda_0$ есть нижнее собственное значение) оператора H_A .

2. СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РАСШИРЕНИЙ

Здесь мы рассмотрим вопрос о существовании основных объектов предыдущего раздела. Именно, для кривой Σ с конечным числом угловых точек и самопересечений под ненулевым углом в $\mathbb{R}^4$ расширения A и B полуограничены, при некоторых ограничениях имеют дискретный спектр ниже континуума и строго положительное основное состояние.

2.1. Полуограниченность для конечной кривой. Установим свойства следующих операторов в

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= A + B(\lambda), & B(\lambda) &= B_J(\lambda) + B_k(\lambda), \\ B_J(\lambda)u(t) &= \text{v. p.} \int G_\lambda(t, s)(u(t) - u(s)) ds, \\ B_k(\lambda)u(t) &= k_\lambda(t)u(t), & k_\lambda(t) &= -i_r \Gamma_\lambda 1, \end{aligned}$$

и соответствующих им квадратичных форм $a(\lambda)$, $b(\lambda)$, $b_J(\lambda)$, $b_k(\lambda)$. Оператор A (14), как известно, является положительным самосопряженным оператором, определенным через замыкание соответствующей квадратичной формы, заданной изначально на множестве $C_0^\infty(I \setminus I_0)$. На этом же множестве определены и симметричны и все приведенные выше операторы и формы. Нужно показать, что формы $b_J(\lambda)$, $b_k(\lambda)$ удовлетворяют условию КЛМН-теоремы и определяют как формсумму самосопряженный оператор $A(\lambda) = A + B_J(\lambda) + B_k(\lambda)$, удовлетворяющий достаточным условиям (5) и (8).

Сначала установим ограниченность оператора W_λ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Ядро $W_\lambda(t, s) = G_\lambda * G_\lambda(x(t), x(s))$ интегрального оператора W_λ симметрично, удовлетворяет оценке $\sup_I \int W_\lambda(t, s) ds < \infty$, и, как следствие, этот оператор ограничен в $L^2(I)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ядро непрерывно всюду за исключением диагонали и изолированных точек $I_0 \times I_0$, где оно имеет логарифмическую особенность типа $-\ln(\lambda^{1/2}d(x(t), x(s)))$. Поэтому интеграл по одной из переменных является кусочно-непрерывной ограниченной функцией другой переменной. При этом норма оператора оценивается как $\sup_I$ такого интеграла и ограничена.

Свойства функции $k_\lambda(t)$. Назовем особую точку кривой $x_0 \in \Sigma_0$ *точкой m -типа*, если в окрестности x_0 кривая устроена как объединение m исходящих из x_0 простых дуг. При $m = 1$ это концевая точка, при $m = 2$ — угловая особенность. Для заданной точки x_0 m -типа перенумеруем дуги $j = 1, \dots, m$, начиная с некоторой, и обозначим через ϑ_{jl} углы между ними.

ЛЕММА 4. Функция $k_\lambda(t)$ непрерывна во внутренних точках и является суммой сингулярной $k_0(t)$ и ограниченной $k_\lambda^b(t)$ функций $k_\lambda(t) = k_0(t) + k_\lambda^b(t)$, каждая из которых непрерывна в $I \setminus I_0$. Функция $k_0(t)$ в окрестности точки t_* , являющейся прообразом точки m -типа $x_0 = x(t_*)$, ведет себя как

$$\begin{aligned} k_0(t) &\simeq (4\pi^2|t - t_*|)^{-1}, & m &= 1; \\ k_0(t) &\simeq -(4\pi^2|t - t_*|)^{-1} \left(\sum_{l \neq j} \frac{\pi - \vartheta_{jl}}{\sin \vartheta_{jl}} - 1 \right), & m &\geq 2. \end{aligned}$$

Во втором случае t – параметр на j -й дуге в окрестности t_* . Функция $k_\lambda^b(t)$ кусочно-непрерывна и ограничена, а зависимость ее от спектрального параметра уточняется в оценке

$$\lambda^{1/2} c_1(\Sigma) \leq k_\lambda^b(t) \leq c_2(\lambda, \Sigma)$$

с положительными константами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим ядро функции Грина как сумму $G_\lambda(t, s) = G_0(t, s) + \lambda W_{\lambda 0}(t, s)$, где $W_{\lambda 0}(t, s) = G_\lambda * G_0(x(t), x(s))$. Тогда по определению функции $k_\lambda(t)$ имеем $k_\lambda(t) = k_0(t) + k_\lambda^b(t)$,

$$k_\lambda^b(t) = \lambda \int W_{\lambda 0}(t, s) ds,$$

$$k_0(t) = -\lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{I \setminus U_\delta(t)} G_0(t, s) ds - (2\pi^2 \delta)^{-1} \right].$$

Обратимся к функции $k_0(t)$. Выделим дугу кривой между точками $x(t_l)$, $x(t_{l+1})$ и пусть $t \in I_l = (t_l, t_{l+1})$. Положим

$$G_+(t, s) = \int_s^{t_{l+1}} G_0(t, \tau) d\tau, \quad t < s; \quad G_-(t, s) = \int_{t_l}^s G_0(t, \tau) d\tau, \quad t > s.$$

Тогда несложными преобразованиями $k_0(t)$ можно привести к виду

$$k_0(t) = -G_+(t, t_{l+1}) + G_-(t, t_l) - \int_{I \setminus I_l} G_0(t, s) ds +$$

$$+ \text{v. p.} \int_{I_l} (G_+ + G_-)(t, s) ds, \quad t \in I_l.$$

Последний член является ограниченной функцией, а сумма первых трех членов и описывает сингулярное поведение в окрестности $t_* = t_l$ или $t_* = t_{l+1}$ (см. [1]), какое указано в условии леммы.

Обратимся к функции $k_\lambda^b(t)$. Оценка сверху получается, как и в случае предложения 8. Для получения зависимости от λ в оценке снизу воспользуемся очевидным неравенством $W_\lambda(t, s) \leq W_{0\lambda}(t, s)$ и тем обстоятельством, что ядро $W_\lambda(t, s)$ выражается через функцию Грина $g(|x|) = (4\pi)^{-1}(-\Delta + 1)^{-1}\delta(x)$ в $\mathbb{R}^2$: $W_\lambda(t, s) = g(\lambda^{1/2}d(t, s))$. Функция $\int W_\lambda(t, s) ds$ непрерывна на каждом промежутке $I_l = (t_l, t_{l+1})$ между двумя последовательными точками из I_0 . Продолжая ее по непрерывности на концевые точки этого промежутка, имеем при $t \in I_l$

$$k_\lambda^b(t) \geq \lambda \min_{I_l} \int W_\lambda(t, s) ds = \lambda \int W_\lambda(t^*, s) ds.$$

Возможны два различных случая: а) $t^* \in I_l$; б) $t^* = t_l$ или $t^* = t_{l+1}$. В первом случае получаем цепочку неравенств

$$\lambda \int_I W_\lambda(t^*, s) ds \geq \lambda \int_{I_l} W_\lambda(t^*, s) ds \geq \lambda \int_{I_l} g(\lambda^{1/2}c|t^* - s|) ds \geq$$

$$\geq c^{-1}\lambda^{1/2} \int_{\tau_-}^{\tau_+} g(\tau) d\tau, \quad \tau_\pm = \pm c\lambda^{1/2} |t^* - t_{l(l+1)}|.$$

Здесь мы использовали оценку $d(x(t^*), x(s)) \geq c|t^* - s|$, учитывая гладкость дуги, и монотонное убывание функции $g(\tau)$. Аналогичная оценка получается и в случае “б”. Поскольку число дуг рассматриваемой кривой конечно, мы и получаем нужную оценку снизу.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Квадратичная форма $b_k(\lambda)$ ограничена относительно a на области $D[a]$ с нулевой относительной гранью и по КЛМН-теореме квадратичная форма $a + b_k(\lambda)$ определяет самосопряженный полуограниченный оператор $A + B_k(\lambda)$. Более того, при $\lambda \geq 1$ имеем $A + B_k(\lambda) \geq c_1\lambda^{1/2} + c_2$ с некоторыми константами $c_1 > 0$, c_2 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из описанных свойств функции $k_\lambda(t)$ и выполнения КЛМН-теоремы для возмущений, задаваемых умножением на функцию $\pm|t - t_*|^{-1}$, $t_* \in I_0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Квадратичная форма $b_J(\lambda)$, изначально заданная на $C_0^\infty(I \setminus I_0)$, симметрична, положительно-определена, замыкаема. При этом $D[a] \subset D[b_J]$, и она ограничена относительно формы a с нулевой относительной гранью.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Форма $b_J(\lambda)$ корректно определена на $C_0^\infty(I \setminus I_0)$, поскольку сингулярность ядра $G_\lambda(t, s)$ на диагонали не выше, чем $|t - s|^{-2}$ (см. пример 1.2.1 из [10]). Ее симметричность и положительная определенность очевидны, а поскольку она порождается симметрическим оператором, то она и замыкаема. Для установления КЛМН-оценки разобьем квадрат $I \times I$ на три непересекающихся множества: r -окрестности диагонали $U_r(d)$, объединение r -окрестностей $U_r(t_j, t_l)$, $j \neq l$, точек $(t_j, t_l) \in I_0 \times I_0$ и третье множество, являющееся дополнением объединения двух первых. В третьей области ядро не сингулярно, и при ограничении на эту область имеем $b_J^{(3)}(\lambda)[u] \leq c_3\|u\|^2$. Оценка вклада от первой и второй областей получается через производную $b_J^{(1,2)}(\lambda)[u] \leq c_{1,2}\|u'\|^2$, константы же оцениваются по-разному:

$$c_1 = \sup_\tau \iint_{U_r(d)} (s \leq \tau \leq t) |t - s| G_\lambda(t, s) dt ds,$$

$$c_2 = \max_{j,l} \sup_\tau \iint_{U_r(t_j, t_l)} \{(t_j < \tau \leq t) \cup (t \leq \tau < t_j)\} |t - t_j| G_\lambda(t, s) dt ds.$$

Из этих оценок следует, что $b_J(\lambda)[u] \leq \tilde{c}_1 a[u] + \tilde{c}_2 \|u\|^2$ на $C_0^\infty(I \setminus I_0)$, причем, выбирая $r > 0$ достаточно малым, константу $\tilde{c}_1$ можно сделать сколь угодно малой. Продолжая последнее неравенство по непрерывности на $D[a]$ и применяя КЛМН-теорему, получаем утверждение предложения.

Следствием предложений 9 и 10 является

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. *Оператор $A(\lambda)$, определяемый квадратичной формой $a(\lambda) = a + b_J(\lambda) + b_k(\lambda)$ с областью определения $D[a]$, самосопряжен и полуограничен в $L^2(I)$ и характеризуется оценкой*

$$a(\lambda) \geq c_1\lambda^{1/2} + c_2, \quad c_1 > 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы рассмотрели лишь случай конечных кривых. При некоторых ограничениях на глобальное поведение кривой, исключающих асимптотическое сближение ее фрагментов, приведенные результаты переносятся и на случай бесконечных кривых, например, на случай ломаных с конечным числом угловых точек.

Из оценки роста по λ для $A(\lambda)$ следует выполнимость достаточного условия (5). Условие (8) выполняется в силу его полуограниченности. В результате приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Σ – кусочно-гладкая кривая $I \rightarrow \mathbb{R}^4$ или бесконечная ломаная с конечным числом угловых точек и точек самопересечений под ненулевым углом. Пусть A – расширение Фридрихса минимального оператора, соответствующего выражению (14). Тогда самосопряженные расширения типа A и B , выделяемые таким параметризующим оператором, полуограничены снизу.

2.2. Дискретный спектр. Для выяснения вопроса о дискретном спектре расширений мы воспользуемся следующим результатом [14, 15]: число отрицательных квадратов квадратичных форм $h_{A,B}(\mu)$ и $a_{A,B}(\mu)$ при условии их конечности одинаково. На языке соответствующих операторов это свойство выражается соотношением

$$\dim E_{H_{A,B}}(-\infty, -\mu) = n \Leftrightarrow \dim E_{\hat{A}(\mu), A_j(\mu)}(-\infty, 0) = n.$$

Заметим, что $\dim E_{\hat{A}(\mu)}(-\infty, 0) = \dim E_{A(\mu)}(-\infty, 0)$, т.е. если при некотором $\mu > 0$ оператор $A(\mu)(A_\gamma(\mu))$ имеет отрицательный дискретный спектр, то расширение $H_{A,B}$ имеет дискретный спектр ниже $-\mu$. Здесь мы будем считать функции $p(t)$ и $q(t)$ ограниченными. Из положительной определенности формы $b_J(\mu)$ следует, что $\inf \sigma_{\text{ess}}(A(\mu)) \geq \inf \sigma_{\text{ess}}(A + B_k(\mu))$. Справа фигурирует оператор, определяемый выражением $-\partial_t p(t) \partial_t + q(t) + k_\mu(t)$. Для конечной кривой его спектр дискретен. Для бесконечной ломаной положение существенного спектра определяется поведением на бесконечности функции $q(t) + k_\mu(t)$. В этом случае $\sigma_{\text{ess}}(A(\mu)) > 0$, т.к. $q(t) \geq 0$ и $k_\mu(\pm\infty) = (8\pi)^{-1} \mu^{1/2}$. Таким образом, при $q(t) \geq 0$ нижняя граница существенного спектра совпадает с таковой для исходного оператора H_0 , т.е. $\sigma_{\text{ess}}(H_{A,B}) \geq 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть Σ – кусочно-гладкая кривая в $\mathbb{R}^4$ с конечным числом угловых точек или самопересечений под ненулевым углом. Тогда при условии ограниченности $0 \leq q(t) < \infty$ при фиксированном $\mu > 0$ существует такое $p_1 > 0$, что оператор $\hat{A}(\mu)(A_\gamma(\mu))$ имеет отрицательный спектр при $p_0 < p(t) < p_1$. Расширения A и B при таком ограничении на параметризующий оператор A имеют дискретный спектр ниже $-\mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим, например, расширения A . При наличии у кривой хотя бы одной угловой точки квадратичная форма неограничена снизу [1]: для любого $N > 0$ существует функция $u_N \in C_0^\infty(I \setminus I_0)$ такая, что $b(\mu)[u_N] < -N\|u_N\|^2$. По условию $q(t)$ ограничена. В таком случае при достаточно большом N

$$q[u_N] + b(\mu)[u_N] < 0, \quad q[u] = \int q(t) |u(t)|^2 dt.$$

Выберем $p_1 = \sup_{u \in C_0^\infty(I \setminus I_0)} \|u'\|^{-2} (-q[u] - b(\mu)[u])$, тогда $p_1 > 0$. При $p(t) < p_1$ существует $u \in C_0^\infty(I \setminus I_0)$ такая, что $a(\mu)[u] < 0$. Тогда из вариационного принципа следует существование хотя бы одного отрицательного собственного значения у оператора $\hat{A}(\mu)$. Из указанного выше соотношения между отрицательным спектром этого оператора и частью спектра ниже $-\mu$ соответствующего расширения получаем, что H_A имеет собственное значение ниже $-\mu$.

2.3. Положительность основного состояния. Пусть выполняются условия теоремы 2 и расширения имеют дискретный спектр ниже континуума. Вектор основного состояния, отвечающий низшему собственному значению $-\lambda_0$, представляется в виде

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \Gamma_{\lambda_0} \Phi_0, & A(\lambda_0) \Phi_0 &= 0 \text{ для расширений А;} \\ \hat{\varphi}_0 &= \{\gamma^{-1} \Gamma_{\lambda_0} \Phi_0, \Phi_0\}, & A_\gamma(\lambda_0) \Phi_0 &= 0 \text{ для расширений Б.} \end{aligned}$$

Мы покажем, что основное состояние строго положительно в следующем уточненном смысле: $\Phi_0 > 0$ всюду в $I \setminus I_0$, т.е. за исключением множества I_0 , параметризующего особые точки кривой. В силу положительности функции $G_{\lambda_0}(x, x(t))$, являющейся ядром интегрального оператора Γ_{λ_0} , очевидно, что тогда φ_0 ($\hat{\varphi}_0$) строго положителен в обычном смысле, т.е. почти всюду.

В качестве модели рассмотрим расширения А. Основной для нас оператор $A(\lambda_0)$ неотрицателен и является генератором сохраняющей положительность полугруппы сжатий. По теореме XIII.50(b) [18] для отвечающей ему квадратичной формы выполняется неравенство Като $a(\lambda_0)[|u|] \leq a(\lambda_0)[u]$. Применяя его к функции $u = \Phi_0$, реализующей минимум формы, и учитывая, что $a(\lambda_0)[\Phi_0] = 0$, получаем, что $|\Phi_0| \in D[a(\lambda_0)]$ и $a(\lambda_0)[|\Phi_0|] = 0$. Поэтому без ограничения можно считать функцию Φ_0 неотрицательной.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Пусть неотрицательная функция Φ_0 , $\|\Phi_0\| = 1$ реализует минимум квадратичной формы $a(\lambda_0)$. Тогда $\Phi_0(t) > 0$ при $t \in I \setminus I_0$ и обращается в нуль лишь в точках множества I_0 .

Схема доказательства. Главный фактор – нелокальность формы $a(\lambda_0)$. При условии ее локальности утверждение было бы неверно.

Шаг 1. Поскольку $\Phi_0 \in D[a(\lambda_0)]$, то она является абсолютно непрерывной функцией. Покажем, что она не обращается тождественно в нуль ни на каком промежутке $I_1 \subset I \setminus I_0$. Предположим противное, пусть $\Phi_0|_{I_1} \equiv 0$. Выберем какую-нибудь неотрицательную функцию Φ_1 из области определения $D[a(\lambda_0)]$ такую, что $\|\Phi_1\| = 1$ и $\text{supp } \Phi_1 \subset I_1$, и рассмотрим множество функций $\Phi_\beta = \cos \beta \Phi_0 + \sin \beta \Phi_1$. Тогда при малых $\beta > 0$ имеем

$$\begin{aligned} a(\lambda_0)[\Phi_\beta] &\simeq a(\lambda_0)[\Phi_0] + 2\beta a(\lambda_0)(\Phi_0, \Phi_1) = \\ &= a(\lambda_0)[\Phi_0] + 2\beta b_J(\lambda_0)(\Phi_0, \Phi_1), \end{aligned}$$

где мы учли, что носители функций Φ_0 и Φ_1 не пересекаются. Но на таких функциях форма $b_J(\lambda_0)$ задается отрицательным ядром $-G_{\lambda_0}(t, s)$, поэтому вклад соответствующего

слагаемого строго отрицательный. Вследствие этого получаем $a(\lambda_0)[\Phi_\beta] < a(\lambda_0)[\Phi_0]$, что противоречит минимальности формы при $u = \Phi_0$.

Шаг 2 (переход к форме Дирихле). Локальная часть $a^{\text{loc}}(\lambda_0)$ формы $a(\lambda_0)$ на каждом промежутке I_l , параметризующем соответствующую дугу между последовательными особыми точками, имеет в силу теории Штурма–Лиувилля минимизирующую функцию φ_l : $\|\varphi_l\| = 1$, $\varphi_l > 0$ во внутренних точках I_l и обращающуюся в нуль лишь на концах промежутка. Обозначим соответствующий минимум $a^{\text{loc}}(\lambda_0)[\varphi_l]$ через $\varkappa_l$. Унитарное преобразование, определяемое оператором умножения на функцию φ_l на каждом I_l , позволяет преобразовать квадратичную форму $a^{\text{loc}}(\lambda_0) + \varkappa$ в форму Дирихле в пространстве $L^2(I, \sum_l \varphi_l^2 \chi_l dt)$. Здесь $\varkappa = \max_l \{\varkappa_l\}$, χ_l – характеристические функции промежутков I_l . Обозначим полученную форму Дирихле через $\mathcal{E}(\cdot, \cdot)$. Пусть $\mathcal{E}_1(\cdot, \cdot) = \mathcal{E}(\cdot, \cdot) + (\cdot, \cdot)$. Для нас важно, что всякое непустое множество $K \subset I \setminus I_0$ имеет ненулевую $\mathcal{E}_1$ -емкость (ср. с примером 4.5.1 из [10]).

Шаг 3. Пусть u_0 – функция, минимизирующая форму $\mathcal{E}_1$, полученная из Φ_0 с помощью построенного унитарного преобразования. Предположим, что она обращается в нуль в какой-либо точке $\tau \in I \setminus I_0$ и пусть e_τ – отвечающий этой точке равновесный 1-потенциал, т.е. $e_\tau \in D[\mathcal{E}]$ и $\mathcal{E}_1(e_\tau, e_\tau) = \text{Cap}(\tau)$. Рассмотрим множество функций $u_\beta = \alpha u_0 + \beta e_\tau$, $\|u_\beta\| = 1$, $\alpha, \beta > 0$. Тогда, учитывая равенство $\mathcal{E}_1(u_0, e_\tau) = 0$, при малых β имеем

$$\mathcal{E}_1[u_\beta] = \alpha^2 \mathcal{E}_1[u_0] + \beta^2 \text{Cap}(\tau) \simeq \mathcal{E}_1[u_0](1 - 2\beta(u_0, e_\tau)).$$

Потенциал $e_\tau(t) \geq 0$ и непрерывен, поэтому существует некоторый промежуток $I_1 \subset I \setminus I_0$, на котором $e_\tau(t) > 0$. На нем $u_0 \not\equiv 0$, как было установлено на первом шаге. Следовательно, $(u_0, e_\tau) > 0$. В таком случае $\mathcal{E}_1[u_\beta] < \mathcal{E}_1[u_0]$, что противоречит условию минимальности. Предложение доказано.

Аналогичный результат справедлив и для расширений Б. Как следствие получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. Пусть Σ – кусочно-гладкая кривая в $\mathbb{R}^4$ с конечным числом угловых точек или самопересечений под ненулевым углом и H – расширение типа А или Б оператора $\tilde{H}_0$, фиксируемое параметризующим оператором, обеспечивающим существование дискретного спектра ниже континуума. Тогда расширение H имеет невырожденное собственное значение со строго положительным вектором основного состояния.

Как было показано в п. 1.4, в ситуации, описываемой в теоремах 2 и 3, построенные нами локальные расширения допускают интерпретацию в терминах форм Дирихле и соответствующих им диффузионных процессов. Представляется важным и интересным обобщить полученные результаты на случай нерегулярных кривых типа броуновских траекторий – наиболее интересный случай с точки зрения квантовой теории поля.

В заключение автор выражает благодарность В. А. Гейлеру за обсуждение затронутых в статье вопросов. Работа поддержана грантами: РФФИ, № 94-01-0125а, INTAS, № 93-249.

Список литературы

- [1] Шондин Ю. Г. // ТМФ. 1995. Т. 105. №1. С. 3–17.
- [2] Павлов Б. С. // УМН. 1987. Т. 42. В.6 С. 99–131.
- [3] Шондин Ю. Г. // ТМФ. 1982. Т. 51. №2. С. 181–191.
- [4] Thomas L. E. // Phys. Rev. 1984. V. D30. №6. P. 1233–1236.
- [5] Павлов Б. С. // Матем. сб. 1988. Т. 136. №2. С. 163–177.
- [6] Макаров К. А. // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4. В.5. С. 155–171.
- [7] Хепп К. Теория перенормировок. М.: Наука, 1974.
- [8] Шондин Ю. Г. // ТМФ. 1992. Т. 92. №3. С. 466–472.
- [9] Albeverio S., Høegh-Krohn R., Streit L. // J. Math. Phys. 1977. V. 18. №5. P. 907–917.
- [10] Fukushima M. Dirichlet Forms and Markov Processes. North-Holland, Amsterdam, 1980.
- [11] Альбеверио С., Гестези Ф., Хеег-Крон Р., Хольден Х. Решаемые модели в квантовой механике. М.: Мир, 1991.
- [12] Вентцель А. Д. // Теор. вероятн. и ее прилож. 1959. Т. 4. №2. С. 172–185.
- [13] Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986.
- [14] Бирман М. Ш. // Матем. сб. 1956. Т. 38. №4. С. 431–450.
- [15] Derkach V. A., Malamud M. M. // J. Funct. Anal. 1991. V. 95. №1. P. 1–95.
- [16] Маламуд М. М. // ДАН УССР. Сер. А. 1990. №3. С. 20–25.
- [17] Alonso A., Simon B. // J. Oper. Theory. 1980. V. 4. P. 251–270.
- [18] Руд М., Саймон Б. Методы современной математической физики. IV. Анализ операторов. М.: Мир, 1982.
- [19] Brasche J. Perturbations of self-adjoint operators supported by null sets. Dissertation, Bielefeld, 1988.

Нижегородский государственный
педагогический университет

Поступила в редакцию
17.V.1995 г.

Yu. G. Shondin

SEMIBOUNDED LOCAL HAMILTONIANS FOR PERTURBATIONS OF THE LAPLACIAN SUPPORTED BY CURVES WITH ANGLE POINTS IN $\mathbb{R}^4$

Perturbations supported by curves with angle points are studied for the Laplacian in $\mathbb{R}^4$ within the framework of the extension theory. Classes of the self-adjoint extensions that are local, semibounded and generate a positivity preserving semigroup are distinguished. Their connection with the local Dirichlet forms is obtained.