Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Талалов, Динамика струны в $D = 4$ пространстве-времени I. Гамильтонов формализм, *ТМФ*, 1996, том 106, номер 2, 218–232

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1109>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 10:28:18

С. В. Талалов

ДИНАМИКА СТРУНЫ В $D = 4$ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ I. ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ

Построено описание классической динамики $D = 1 + 3$ струны со спиновыми степенями свободы в терминах нестандартных гамильтоновых переменных.

1. ВВЕДЕНИЕ

Анализ квантовых аномалий в теории струн, равно как и прочих квантовых эффектов, зависит, вообще говоря, от выбора переменных для гамильтонова описания классической динамики. Стандартный способ их введения показывает лишь существование таких переменных для (лагранжевой) теории, но никак не их единственность. Действительно, хорошо известно [1, 2], что к построению гамильтоновой структуры какой-либо динамической системы, заданной, например, уравнениями движения и граничными условиями, можно подходить формально. Для этого достаточно определить множество $\mathcal{R}$ параметров $(p_1, q_1, \dots, p_i, q_i, \dots)$, антисимметричные скобки Пуассона $\{F, G\}$, определенные для пары любых функционалов $F = F(p_1, q_1, \dots), \dots$ и удовлетворяющие тождеству Якоби, а также гамильтониан $H = H(p_1, q_1, \dots)$ такой, что для любой величины f выполняется $\dot{f} = \{H, f\}$. Следует отметить, что происхождение фундаментальных переменных p, q не играет никакой роли: лишь бы эти переменные однозначно параметризовали решение задачи Коши для исходных динамических уравнений. Наиболее интересные примеры здесь, возникают, по-видимому, при гамильтоновом описании динамики нелинейных эволюционных уравнений [3]. Например, было обнаружено, что динамические системы, определяемые уравнениями КдФ и НШ, имеют бесконечную иерархию симплектических структур, канонически неэквивалентных друг другу [4]. Данное обстоятельство делает неоднозначным квантовое описание подобных сложных систем: возникает вопрос о критериях выбора для исходных гамильтоновых переменных. Как известно (см., например, [5]), таковые существуют лишь в отдельных случаях.

Возвращаясь к теории струн, отметим, что с точки зрения накопленных в области кинематики частиц экспериментальных фактов единственным необходимым требованием является инвариантность теории относительно группы движений пространства Минковского $E_{1,3}$ — преобразований группы Пуанкаре $\mathcal{P}$. Достаточные критерии опосредованы и связаны с анализом спектра предсказываемых теорией частиц. Между тем хорошо известно [6, 7], что стандартный способ гамильтонова описания струны приводит

при последующем квантовании к нефизическим размерностям D пространства-времени E_D , причем последнее возникает в теории, вообще говоря, как плоское линейное векторное пространство. Вопросы же, связанные с корректной редукцией $E_D \rightarrow E_{1,3} \times K_{D-4}$, где K_{D-4} – компактное многообразие планковских размеров, по-видимому, еще далеки от окончательного решения [8].

Настоящая статья¹⁾ обобщает серию работ автора [9, 10], в которых делается попытка построить описание классической и квантовой динамики струны в пространстве $E_{1,3}$ в терминах нестандартных гамильтоновых переменных. Помимо более полного и строгого изложения уже полученных результатов, в работе сделаны существенные дополнения, связанные, в частности, с последовательным рассмотрением модели в терминах инвариантного действия. Отметим также, что, будучи построенная на основе методов, предложенных ранее автором, гамильтонова структура теории в данной статье отличается от гамильтоновой структуры в работах [9]. Естественность внесенных изменений будет видна при последующем квантовании.

Итак, рассмотрим поля $X_\mu(\xi^0, \xi^1)$ и $\Psi_\pm^A(\xi^0, \xi^1)$, определенные при $\xi^1 \in [0, \pi]$, $\xi^0 \in (-\infty, \infty)$ и взаимодействующие с двумерной гравитацией $h^{ij}(\xi^0, \xi^1)$, динамика которых задается действием

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\xi^0 d\xi^1 \sqrt{h} \left\{ h^{ij} \partial_i X^\mu \partial_j X_\mu - i\kappa e_I^j(\Gamma^0)_{AB} \bar{\Psi}^A \gamma_j \nabla^I \Psi^B \right\}. \quad (1)$$

Здесь, как обычно, $h = \det(h^{ij})$, $e_I^j(\xi^0, \xi^1)$ – двумерный базис, стандартным образом связанный с 2-метрикой h^{ij} . Матрицы Дирака в четырех- и двумерном пространстве-времени мы обозначаем соответственно Γ^μ и γ_i . Поле X_μ несет векторный индекс μ в $E_{1,3}$. Поле $Psi_\pm^A$, компоненты которого являются комплексно-значными функциями, несет следующие индексы: индекс A – спинорный индекс в пространстве $E_{1,3}$, по которому поле Ψ является майорановским спинором, а также индекс $\pm$ (принимающий значения “+” и “–”) – спинорный индекс в двумерном пространстве-времени. Константа κ имеет размерность длины. Заметим, что поскольку спинорная часть действия обращается в нуль на уравнениях движения, то мы можем варьировать κ при вариациях действия и считать ее дополнительной динамической переменной.

Набор преобразований, оставляющих действие (1) неизменным, очевидно, следующий: глобальная пуанкаре-инвариантность в пространстве $E_{1,3}$, репараметризационная и вейлевская инвариантность, а также локальная лоренц-инвариантность в двумерном пространстве-времени [7]. Следует подчеркнуть, что в теории не налагается требования локальной суперсимметричности действия S в каком-либо смысле, что делает возможным не добавлять к (1) дополнительные слагаемые, обеспечивающие такую суперсимметрию. Помимо общих соображений²⁾, такой подход оправдывается здесь тем, что исходные струнные переменные X_μ и $\Psi_\pm^A$ не являются в предлагаемой модели фундаментальными, а становятся сложными функционалами вводимых переменных, параметризующих фазовое пространство динамической системы (1).

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА МОДЕЛИ В “ЛОКАЛЬНОЙ” КАЛИБРОВКЕ СВЕТОВОГО КОНУСА

Прежде, чем определить фундаментальные гамильтоновы переменные и пуассонову структуру, зафиксируем имеющийся в теории калибровочный произвол и введем необ-

¹⁾ Вместе с готовящейся второй частью.

²⁾ Связанных с тем, что суперсимметрия является пока только гипотезой.

ходимые геометрические конструкции. Обычным способом здесь накладывается калибровка $e_I^j = \delta_I^j$ и, таким образом, осуществляется переход к действию

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\xi_+ d\xi_- \left(\partial_+ X_\mu \partial_- X^\mu - i\kappa \bar{\Psi}^A \gamma^b \partial_b \Psi^A \right), \quad (2)$$

где $\partial_\pm$ – производные по конусным переменным $\xi_\pm = \xi^1 \pm \xi^0$. Заметим, что поскольку в пространстве $E_{1,3}$ для майорановских спиноров Ψ выполняется соотношение $\bar{\Psi}\Psi = 0$, то слагаемое в (1) со спиновой связностью не дает вклада в (2). Свободные уравнения движения

$$\partial_- \partial_+ X_\mu = 0, \quad \partial_\mp \Psi_\pm = 0 \quad (3)$$

и стандартные граничные условия

$$\begin{aligned} X'_\mu \Big|_{\xi^1=0} &= X'_\mu \Big|_{\xi^1=\pi} = 0, \\ \Psi_+ \Big|_{\xi^1=0} &= \Psi_- \Big|_{\xi^1=0}, \quad \Psi_+ \Big|_{\xi^1=\pi} = \epsilon \Psi_- \Big|_{\xi^1=\pi}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\epsilon = \pm$, должны быть, как обычно, дополнены условиями $\delta S / \delta h^{ij} = 0$, которые в рассматриваемой калибровке имеют вид

$$(\partial_\pm X)^2 \pm \frac{i}{2} \kappa \bar{\Psi}_\pm \partial_\pm \Psi_\pm = 0. \quad (5)$$

Зафиксируем далее оставшийся в теории произвол [7] относительно конформных преобразований

$$\xi_\pm \longrightarrow \tilde{\xi}_\pm = \pm A(\pm \xi_\pm),$$

где определенная на всей вещественной оси непрерывно дифференцируемая функция $A(\xi)$ удовлетворяет условиям

$$A(\xi + 2\pi) = A(\xi) + 2\pi, \quad A' \neq 0,$$

а в остальном произвольна. Для этого мы потребуем выполнения условий

$$\bar{\Psi}_\pm \Gamma^\mu \Psi_\pm \partial_\pm X_\mu = \pm \frac{\kappa^2}{2}. \quad (6)$$

Поскольку векторы $\bar{\Psi}_\pm \Gamma^\mu \Psi_\pm$ светоподобные, то данные условия можно рассматривать как локальное обобщение общепринятой “глобальной” калибровки светового конуса

$$n_\mu \partial_\pm X^\mu = \pm p_+ / 2,$$

где $n_\mu = (1, 0, 0, -1)$. Разумеется, при наложении условий (6) мы ограничиваем множество допустимых струнных конфигураций, изначально требуя выполнения неравенств $\pm \bar{\Psi}_\pm \Gamma^\mu \Psi_\pm \partial_\pm X_\mu > 0$.

Предлагаемая в данной работе гамильтонова структура динамической системы (3)–(5) является следствием следующей, естественной на взгляд автора, геометрической конструкции. Введем обозначения:

$$L_\pm^\mu = \frac{1}{\kappa} \bar{\Psi}_\pm \Gamma^\mu \Psi_\pm, \quad G_\pm^{\mu\nu} = \frac{i}{2\kappa} \bar{\Psi}_\pm (\Gamma^\mu \Gamma^\nu - \Gamma^\nu \Gamma^\mu) \Psi_\pm.$$

Определим далее пару векторов $N_{\pm}^{\mu}$:

$$N_{\pm}^{\mu} = \frac{1}{\kappa} \partial_{\pm} X^{\mu} + \frac{i}{\kappa} \bar{\Psi}_{\pm} \partial_{\pm} \Psi_{\pm} L_{\pm}^{\mu}.$$

В силу условий (5) и (6) данные векторы являются светоподобными и удовлетворяют условиям

$$L_{\pm}^{\mu} N_{\mu \pm} = \pm \frac{1}{2}. \quad (7)$$

Нам понадобятся также свойства “тензорного агрегата” $(L_{\mu}, G_{\mu\nu})$, который находится с 4-спинором Ψ во взаимно однозначном соответствии [11]:

$$L_{\mu} G^{\mu\nu} = 0, \quad L^{\mu} L^{\nu} = G^{\mu}_{\rho} G^{\rho\nu}. \quad (8)$$

Соотношения (7) и (8) позволяют нам корректно определить в каждой точке мирового листа струны пару ортонормированных базисов $\mathbf{e}_{\mu+}$ и $\mathbf{e}_{\mu-}$ пространства $E_{1,3}$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_{0\pm})^{\mu} &= L_{\pm}^{\mu} \pm N_{\pm}^{\mu}, & (\mathbf{e}_{3\pm})^{\mu} &= \pm L_{\pm}^{\mu} - N_{\pm}^{\mu}, \\ (\mathbf{e}_{1\pm})^{\mu} &= \mp 2G_{\pm}^{\mu\nu} N_{\pm\nu}, & (\mathbf{e}_2)^{\mu} &= \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} (\mathbf{e}_3)_{\nu} (\mathbf{e}_0)_{\lambda} (\mathbf{e}_1)_{\rho}. \end{aligned}$$

Для величин $(\mathbf{e}_{\mu\pm})^{\nu}$ индекс внутри скобок – это номер базисного вектора $\mathbf{e}_{\pm}$, внешний индекс – лоренцев индекс в пространстве $E_{1,3}$ по отношению к некоторому фиксированному базису η_{μ} ($\mu = 0, 1, 2, 3$). Как следствие (3), выполняются следующие уравнения:

$$\partial_{\pm} \mathbf{e}_{\mu\mp} = 0. \quad (9)$$

Мы будем считать преобразование Лоренца от базиса $\mathbf{e}_{\mu+}$ к базису $\mathbf{e}_{\mu-}$, которое определено в каждой точке (ξ^0, ξ^1) мирового листа, собственным и ортохронным. Это дает нам возможность ввести определенное с точностью до знака $SL(2, C)$ -значное киральное поле $K = K(\xi^0, \xi^1)$ посредством формулы

$$\mathbf{E}_{-} = K \mathbf{E}_{+} K^{\dagger}, \quad (10)$$

где $\mathbf{E}_{+}$ и $\mathbf{E}_{-}$ – матричная форма записи введенных базисов $\mathbf{e}_{\mu\pm}$:

$$\mathbf{E}_{\pm} = \mathbf{e}_{\pm}^{\mu} \sigma_{\mu}, \quad \sigma_0 = 1.$$

Уравнения (9) в терминах поля $K = K(\xi^0, \xi^1)$ однозначно приводят к следующим:

$$\partial_{-} (K^{-1} \partial_{+} K) = 0. \quad (11)$$

Здесь мы имеем, очевидно, частный случай общего уравнения модели Весса–Зумино–Новикова–Виттена [12, 13]:

$$a \partial_{-} (K^{-1} \partial_{+} K) + b \partial_{+} (K^{-1} \partial_{-} K) = 0.$$

Определим далее левый и правый токи введенного кирального поля:

$$Q_{-} = -(\partial_{-} K) K^{-1}, \quad Q_{+} = K^{-1} (\partial_{+} K).$$

Отметим, что $Q_{\pm} = Q_{\pm}(\xi_{\pm})$.

Справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Функция*

$$Q(\xi) = \begin{cases} Q_+(\xi), & \xi \in [0, \pi], \\ -\sigma_1 Q_-(-\xi)\sigma_1, & \xi \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

является непрерывной и продолжается непрерывно 2π -периодическим образом на всю вещественную ось.

Для доказательства запишем граничные условия (4) в следующем виде:

$$\mathbf{E}_- \Big|_{\xi^1=0, \pi} = \sigma_1 \mathbf{E}_+ \Big|_{\xi^1=0, \pi} \sigma_1, \quad (12)$$

условие совместности этих двух равенств – это существование непрерывной 2π -периодической матричной вектор-функции $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\xi)$ такой, что

$$\mathbf{E}(\xi) = \begin{cases} \mathbf{E}_+(\xi), & \xi \in [0, \pi], \\ \sigma_1 \mathbf{E}_-(-\xi)\sigma_1, & \xi \in [-\pi, 0]. \end{cases}$$

Функция $\mathbf{E}(\xi)$ является также непрерывно дифференцируемой. Действительно, поля X_μ и $\Psi_\pm$ являются соответственно дважды и один раз непрерывно дифференцируемыми функциями как решения уравнений (3). Это, в свою очередь, означает, что от равенств (12), зависящих от ξ^0 как от параметра, можно перейти к равенству производных, так что

$$\mathbf{E}'_- \Big|_{\xi^1=0, \pi} = -\sigma_1 \mathbf{E}'_+ \Big|_{\xi^1=0, \pi} \sigma_1.$$

Данные равенства совместно с определением функции $\mathbf{E}(\xi)$ доказывают сделанное утверждение о классе ее гладкости. Пусть $\mathbf{E}_0 = \eta^\mu \sigma_\mu$, где η^μ – введенный ранее постоянный базис. В силу определения вектор-матриц $\mathbf{E}_\pm$

$$\mathbf{E}_\pm(\xi_\pm) = T_\pm(\xi_\pm) \mathbf{E}_0 T_\pm^\dagger(\xi_\pm), \quad (13)$$

где $T_\pm \in \text{SL}(2, C)$. В силу вышесказанного матрицы $T_\pm(\xi)$ являются непрерывно дифференцируемыми 2π -периодическими (либо антипериодическими) матрицами. Далее, как следствие формул (10) и (13) получаем

$$K(\xi^0, \xi^1) = T_-(\xi_-) T_+^{-1}(\xi_+). \quad (14)$$

Используя соответствующие определения, находим $Q_\pm = -T'_\pm T_\pm^{-1}$, а как следствие граничных условий (12) – соотношение

$$T_-(\xi) = i\sigma_1 T_+(-\xi).$$

Последние формулы совместно с определением функции $Q(\xi)$ позволяют непосредственно убедиться в справедливости доказываемого предложения.

Итак, мы будем рассматривать далее вспомогательную линейную систему с непрерывными 2π -периодическими коэффициентами

$$T'(\xi) + Q(\xi)T(\xi) = 0. \quad (15)$$

Сделанные построения показывают, что матрицы $T_\pm$ выражаются через матрицу решений T_1 системы (15), удовлетворяющую условию $\det T_1 = 1$, следующим образом:

$$T_+(\xi_+) = T_1(\xi_+), \quad T_-(\xi_-) = i\sigma_1 T_1(-\xi_-).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Имеется взаимно однозначное соответствие*

$$(\partial_{\pm} X_{\mu}, \Psi_{\pm}^A) \longleftrightarrow T(\xi),$$

где $T(\xi)$ – матрица решений системы (15), такая, что $\det T = \kappa$.

Выведем явные выражения, которые такое соответствие устанавливают. С помощью формул (13) можно легко показать

$$(\mathbf{e}_{0\pm})^{\mu} \sigma_{\mu} = T_{\pm}^{\dagger} T_{\pm}, \quad (\mathbf{e}_{i\pm})^{\mu} \sigma_{\mu} = -T_{\pm}^{\dagger} \sigma_i T_{\pm}. \quad (16)$$

Отсюда с использованием определения базисных векторов $\mathbf{e}_{\mu\pm}$ находим

$$\hat{N}_{\pm} = \frac{1}{2} T_{\pm}^{\dagger} (\pm 1 + \sigma_3) T_{\pm}, \quad \hat{L}_{\pm} = \frac{1}{2} T_{\pm}^{\dagger} (1 \mp \sigma_3) T_{\pm}, \quad (17)$$

где $\hat{N} = N^{\mu} \sigma_{\mu}$ и $\hat{L} = L^{\mu} \sigma_{\mu}$. В дальнейшем мы будем переходить там, где это удобно, от координатного представления векторов A_{μ} и тензоров $A_{\mu\nu}$ к матричному $\hat{A} = A^{\mu} \sigma_{\mu}$ и $\hat{A} = A^{\mu\nu} \sigma_{\mu} \otimes \sigma_{\nu}$, не оговаривая это особо. Соотношения (8) вместе с определением векторов $\mathbf{e}_{1\pm}$ позволяют получить представление для введенных ранее тензоров $G_{\pm}^{\mu\nu}$:

$$G_{\pm}^{\mu\nu} = L_{\pm}^{\mu} (\mathbf{e}_{1\pm})^{\nu} - (\mathbf{e}_{1\pm})^{\mu} L_{\pm}^{\nu},$$

так что в силу (16) и (17) получаем для $\hat{G}$

$$\hat{G}_{\pm} = \frac{1}{2} (T_{\pm}^{\dagger} \otimes T_{\pm}^{\dagger}) [\sigma_1 \otimes (1 \mp \sigma_3) - (1 \mp \sigma_3) \otimes \sigma_1] (T_{\pm} \otimes T_{\pm}). \quad (18)$$

Как уже отмечалось, тензорный агрегат $(L_{\mu}, G_{\mu\nu})$ определяет спинор Ψ однозначно [11]. Для вейлевского представления Γ -матриц соответствующая процедура восстановления приводит к наиболее простому ответу (выписанному, конечно, с точностью до знака)

$$\Psi_{\pm} = \begin{pmatrix} \varphi_{\pm} \\ -\sigma_2 \varphi_{\pm}^* \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где $\varphi_{\pm}(\xi_{\pm}) = \begin{pmatrix} t_{21}(\pm \xi_{\pm}) \\ t_{22}(\pm \xi_{\pm}) \end{pmatrix}$ – вейлевские спиноры, выраженные через матричные элементы t_{ij} матрицы T решений системы (15) такой, что $\det T = \kappa$. Используя представление (19), легко найти

$$\bar{\Psi} \Psi' = -2i\kappa \operatorname{Re} Q_{21}.$$

Последнее равенство совместно с определением векторов $N_{\pm}^{\mu}$, а также совместно с равенствами (17) позволяет получить представление для векторов $\partial_{\pm} X^{\mu}$:

$$\partial_{\pm} \hat{X}(\xi_{\pm}) = \pm T^{\dagger}(\pm \xi_{\pm}) R(\pm \xi_{\pm}) T(\pm \xi_{\pm}), \quad (20)$$

где матрица $R(\xi) = \operatorname{diag}(1, -2 \operatorname{Re} Q_{21}(\xi))$ и $\det T = \kappa$.

Формулы (19) и (20) доказывают тот факт, что струнные переменные $\partial_{\pm} X_{\mu}$, $\Psi_{\pm}$ восстанавливаются по матрице T решений системы (15) однозначно. Поскольку обратная процедура, описанная при доказательстве предложения 1, также однозначна, то предложение 2 доказано.

Полученные представления для векторов $\partial_{\pm} X^{\mu}$ и спиноров $\Psi_{\pm}$ позволяют легко доказать важное для дальнейшего

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для выполнения граничных условий (4) необходимо и достаточно, чтобы на элементы матрицы $Q(\xi)$ было наложено условие

$$\mathcal{M}_1 = \epsilon 1, \quad (21)$$

где $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_1(Q)$ – матрица монодромии системы (15), определенная соотношением $T(\xi + 2\pi) = T(\xi)\mathcal{M}_1$

3. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ИСХОДНЫХ СТРУННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

В данном разделе мы определим фундаментальные переменные, взаимно однозначно параметризующие множество решений уравнений (3), удовлетворяющих условиям (4)–(6). Вводимые переменные естественным образом делятся на “внутренние”, которые описывают динамику кирального поля $K(\xi^0, \xi^1)$ в двумерном пространстве-времени (мировой лист), и конечное число “внешних”, которые задают вложение мирового листа в пространство $E_{1,3}$. Отметим, что идея подобного отделения “внешних” переменных высказывалась ранее [14] в другой модели.

Итак, в силу доказанного предложения 2 для восстановления исходных струнных переменных $(X_\mu, \Psi_\pm; \kappa)$ нам необходимо иметь:

1) матрицу $Q(\xi)$, такую, что $\text{Tr } Q(\xi) \equiv 0$; 2π -периодические функции $Q_{ij}(\xi)$ являются пуанкаре-инвариантными и подчинены дополнительным условиям (21);

2) конечный набор констант $\{B\}$, содержащий, во-первых, 7 констант A_{ij} , которые необходимо задать, поскольку матрица T решений (15) определена с точностью до преобразований

$$T(\xi) \longrightarrow \tilde{T}(\xi) = T(\xi)B, \quad (22)$$

где, не ограничивая общности, можно считать, что $\text{Im } \det B = 0$; во-вторых, 4 константы $\overline{Z}_\mu$, восстанавливающие радиус-вектор X_μ по производным $\partial_\pm X_\mu$.

В дальнейшем нам удобно выделить динамическую переменную q , положив

$$\overline{Z}_\mu = Z_\mu + qP_\mu,$$

где P_μ – вектор энергии-импульса струны и $Z_\mu P^\mu = 0$. Заметим, что выбор матрицы A констант A_{ij} существенно неоднозначен: можно, например, положить

$$T(0) = A \quad \text{или} \quad \int_0^{2\pi} T(x) e^{inx} dx = A \quad \text{при некотором } n$$

и т.д. Формулы (19) и (20) показывают, что преобразования (22) для $B \in SL(2, C)$ являются глобальными лоренц-преобразованиями (аффинных) векторов $\partial_\pm X_\mu$ и спиноров $\Psi_\pm$. Это позволяет предположить, что тот или иной конкретный выбор констант $\mathcal{B}$ существенно повлияет на явный вид аномалий в (квантовой) алгебре Пуанкаре.

Далее мы покажем, что при определенных условиях в качестве набора $\mathcal{B}$ можно выбрать компоненты вектора P_μ и момента струны $M_{\mu\nu}$. Действительно, рассмотрим известные формулы, выражающие данные инварианты через исходные струнные переменные X_μ и $\Psi_\pm$ в силу теоремы Нетер ($1/4\pi\alpha' = 1$):

$$P_\mu = \int_0^\pi \dot{X}_\mu d\xi^1,$$

$$M_{\mu\nu} = \int_0^\pi \left(X_\mu \dot{X}_\nu - X_\nu \dot{X}_\mu \right) d\xi^1 - \frac{i\kappa}{2} \sum_{\epsilon=\pm} \int_0^\pi \bar{\Psi}_\epsilon (\Gamma_\mu \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \Gamma_\mu) \Psi_\epsilon d\xi^1.$$

С использованием формул (18)–(20) находим (подробные вычисления аналогичны тем, что приведены в работах [9])

$$\widehat{P} = \int_0^{2\pi} T^\dagger(\xi) R(\xi) T(\xi) d\xi, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \widehat{M} &= \widehat{Z} \otimes \widehat{P} - \widehat{P} \otimes \widehat{Z} + \\ &+ \int_0^{2\pi} (T^\dagger(\xi) \otimes T^\dagger(\eta)) W(\xi, \eta) (T(\xi) \otimes T(\eta)) d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (24)$$

где $\det T(\xi) = \kappa$, а матричная функция

$$\begin{aligned} W(x, y) &= \left(\frac{x-y}{4\pi} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left[\frac{x-y}{4\pi} \right] \right) R(x) \otimes R(y) + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \delta(x-y) (\sigma_1 \otimes (1 - \sigma_3) - (1 - \sigma_3) \otimes \sigma_1) \end{aligned}$$

выражена через функции $\delta(x) = \sum_n e^{inx}$ и $[x]$ – целую часть числа x .

Введем следующие обозначения. Пусть $T_0(\xi) \in SL(2, C)$ – матрица решений вспомогательной линейной задачи (15), фиксированная какими-либо специальными условиями. При доказательстве утверждений данного раздела их конкретный вид не имеет значения, например, можно считать, что $\int_0^{4\pi} T_0(\xi) d\xi = c\mathbf{1}$. Важным здесь является тот факт, что матричные элементы $(T_0(\xi))_{ij}$ суть однозначные функционалы матричных элементов Q_{ij} . Обозначим далее символами $\widehat{P}_{(0)}$, $\widehat{M}_{(0)}$ величины, построенные согласно формулам (23) и (24), но при $Z_\mu = 0$ и замене $T(\xi) \rightarrow T_0(\xi)$. Данные матрицы – также однозначные функционалы Q_{ij} . Пусть далее $S_\mu = - (1/2\sqrt{P_\omega P^\omega}) \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} M^{\nu\lambda} P^\sigma$ – вектор Любаньского–Паули, а вектор $S_{(0)\mu}$ строится так же, как и S_μ , но по величинам $P_{(0)}^\mu$ и $M_{(0)}^{\mu\nu}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Справедлива формула*

$$\Phi_2 \equiv (P_\mu P^\mu)^2 \left(S_{(0)\nu} S_{(0)}^\nu \right) - (S_\rho S^\rho) \left(P_{(0)\tau} P_{(0)}^\tau \right)^2 = 0. \quad (25)$$

Как следует из формул (23) и (24), произвольные преобразования (22) приводят к таким преобразованиям векторов P_μ и S_μ :

$$\begin{cases} P_\mu \longrightarrow \widetilde{P}_\mu = c\Lambda_{\mu\nu} P^\nu, \\ S_\mu \longrightarrow \widetilde{S}_\mu = c^2 \Lambda_{\mu\nu} S^\nu, \end{cases} \quad (26)$$

где $c = \det B$ и $(\Lambda_{\mu\nu}) \in SO(1, 3)$ – преобразование Лоренца, отвечающее матрице $(1/\sqrt{c})B \in SL(2, C)$. Учитывая определения величин с индексом (0), а также тот факт, что слагаемые в (24), содержащие $\widehat{Z}$, не дают вклада в компоненты вектора S_μ , мы непосредственно убеждаемся в справедливости формулы (25).

Докажем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Пусть даны произвольные вектор P_μ такой, что $(P)^2 > 0$, и антисимметричный тензор $M_{\mu\nu}$. Предположим, что их компоненты удовлетворяют условию (25), в котором величины $P_{(0)\mu}$ и $M_{(0)\mu\nu}$ построены, как это*

описано выше, по некоторой фиксированной 2π -периодической матрице $Q(\xi)$ такой, что $\text{Tr } Q = 0$. Тогда существует матрица $B \in GL(2, C)$, $\text{Im } \det B = 0$, и вектор Z_μ , удовлетворяющий условию $Z_\mu P^\mu = 0$, такие, что выполнены соотношения

$$\begin{aligned}\widehat{P} &= B^\dagger \widehat{P}_{(0)} B, \\ \widehat{M} &= \widehat{Z} \otimes \widehat{P} - \widehat{P} \otimes \widehat{Z} + (B^\dagger \otimes B^\dagger) \widehat{M}_{(0)} (B \otimes B).\end{aligned}$$

Произвол в выборе матрицы B может быть исчерпан преобразованиями

$$B \longrightarrow BU(\theta),$$

где $U(\theta)$ – однопараметрическая группа вращений в плоскости Π , ортогональной векторам P_μ и S_μ . Вектор Z_μ определяется по величинам P_μ , $M_{\mu\nu}$, $P_{(0)\mu}$, $M_{(0)\mu\nu}$, B однозначно.

Рассмотрим две пары ортогональных векторов (P_μ, S_μ) и $(P_{(0)\mu}, S_{(0)\mu})$. При преобразованиях (22) векторы $P_{(0)\mu}$ и $S_{(0)\mu}$ преобразуются по формулам (26). Равенство (25) означает, что в (26) существует константа $c = \det B$ такая, что $|\tilde{P}_\mu| = |P_\mu|$, $|\tilde{S}_\mu| = |S_\mu|$. Поскольку две пары ортогональных векторов, имеющих попарно одинаковые нормы, можно совместить преобразованием Лоренца, то мы имеем

$$\begin{cases} \widehat{P} = B^\dagger \widehat{P}_{(0)} B, \\ \widehat{S} = B^\dagger \widehat{S}_{(0)} B \det B. \end{cases} \quad (27)$$

Очевидно, данные равенства определяют матрицу B неоднозначно: допустимы любые замены вида

$$B \longrightarrow U_0(\theta_0) B U(\theta),$$

где $U_0(\theta_0)$ – матрица вращений в плоскости Π_0 , ортогональной векторам $P_{(0)\mu}$ и $S_{(0)\mu}$, а матрица $U(\theta)$ определена в формулировке предложения. Однако в действительности произвол здесь содержит лишь единственный параметр. В этом можно убедиться, записав равенство

$$U_0(\theta_0) B U(\theta) = B [B_0^{-1} U_0(\theta_0) B_0 U(\theta)],$$

где $B_0 = (B/\sqrt{\det B}) \in \text{SL}(2, C)$. Но выражение в квадратных скобках – это поворот в плоскости Π на угол $\theta + \theta_0$, так что, не ограничивая общности, можно считать $U_0 = 1$. Заметим далее, что момент $M_{\mu\nu}$ может быть представлен в виде

$$M_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{(P)^2}} (Y_\mu P_\nu - Y_\nu P_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} S^\lambda P^\rho),$$

где $Y_\mu = M_{\mu\nu} P^\nu / \sqrt{(P)^2}$. Записав такое же представление для тензора $M_{(0)\mu\nu}$, мы убедимся в справедливости предложения, если воспользуемся формулами (27) и положим $\widehat{Z} = \widehat{Y} - B^\dagger \widehat{Y}_{(0)} B$.

Результат разделов 2 и 3 может быть резюмирован в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Соответствие между множеством исходных струнных переменных $(X_\mu, \Psi_\pm; \kappa)$, удовлетворяющих уравнениям (3) и условиям (4)–(6), и множеством введенных выше переменных $(Q; P_\mu, M_{\mu\nu}; q, \theta)$, удовлетворяющих условиям (21) и (25), является взаимно однозначным:*

$$(X_\mu, \Psi_\pm, \kappa) \longleftrightarrow (Q; P_\mu, M_{\mu\nu}; q, \theta).$$

Для наглядности нам осталось лишь выписать явное представление для радиус-вектора $X_\mu(\xi^0, \xi^1)$, которое легко получить, используя формулы (20) для производных, а также определение переменной q . В итоге имеем

$$\hat{X}(\xi^0, \xi^1) = \hat{Z} + \frac{\xi^0 + q}{\pi} \hat{P} - \frac{i}{\pi} \sum_{n \neq 0} \frac{\hat{C}_n}{n} e^{in\xi^0} \cos n\xi^1, \quad (28)$$

где

$$\hat{C}_n = \int_0^{2\pi} T^\dagger(x) R(x) T(x) e^{-inx} dx.$$

Данная формула совместно с формулой (19) устанавливает рассматриваемое соответствие явно.

Уравнения (3) определяют динамику переменных $Q, P_\mu, M_{\mu\nu}, q, \theta$:

$$\dot{Q} = Q', \quad \dot{q} = 1, \quad \dot{P}_\mu = \dot{M}_{\mu\nu} = \dot{\theta} = 0, \quad (29)$$

где $\dot{Q} \equiv \partial_0 Q$, $Q' \equiv \partial_1 Q$, и т.д.

4. ГАМИЛЬТОНОВА СТРУКТУРА ТЕОРИИ

В настоящем разделе будут введены фундаментальные гамильтоновы переменные, в терминах которых затем будет определена пуассонова структура теории. Будет предъявлен также гамильтониан, задающий в соответствии с построенными скобками Пуассона динамику (29). Вначале докажем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $Q(\xi)$ – определенная выше матрица коэффициентов вспомогательной линейной задачи (15). Тогда существует матрица $\mathcal{G}$, обладающая свойствами $\mathcal{G}_{21} = 0$, $\mathcal{G}_{11} > 0$, $\mathcal{G}_{22} > 0$, такая, что три функции $j_a = j_a(\xi)$, $a = 1, 2, 3$,

$$j_a = -i \operatorname{Tr} \sigma_a Q_g,$$

где

$$Q_g = \mathcal{G}^{-1} Q \mathcal{G} + \mathcal{G}^{-1} \mathcal{G}',$$

являются вещественными.

Для доказательства выполним разложение Ивасава для введенной ранее матрицы $T_0(\xi) \in \operatorname{SL}(2, C)$, которое мы запишем в виде $T_0 = \mathcal{E} \mathcal{N} \mathcal{U}$, где $\mathcal{U} \in \operatorname{SU}(2)$, а матрицы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{N}$ суть

$$\mathcal{E} = \operatorname{diag} (e^{j_0}, e^{-j_0}), \quad \mathcal{N} = \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выберем $\mathcal{G} = \mathcal{E} \mathcal{N}$. Элементы этой матрицы, очевидно, удовлетворяют свойствам, перечисленным в предложении. Далее, после того как выполнено калибровочное преобразование $Q_g \rightarrow Q$, система (15) переходит в такую:

$$\mathcal{U}' + Q_g \mathcal{U} = 0. \quad (30)$$

Вещественность компонент “тока” $j_a(\xi)$ ($a = 1, 2, 3$) следует теперь из того факта, что $\mathcal{U} \in \operatorname{SU}(2)$.

Выясним произвол в определении комплексной функции $f(\xi)$ и вещественных функций $j_a(\xi)$ ($a = 0, 1, 2, 3$). В силу единственности разложения Ивасавы данные величины однозначно определяются по матрице T_0 ; однако остается свобода в выборе самой матрицы T_0 . С учетом (22) заключаем, что элементы множества $(f(\xi), j_a(\xi))$ определены по матрице $Q(\xi)$ с точностью до автоморфизмов, группа G_{aut} которых изоморфна группе $SL(2, C)$.

Введенные переменные $f(\xi), j_a(\xi)$ — это часть определяемого множества фундаментальных гамильтоновых переменных теории, поэтому нам необходимо зафиксировать указанный 6-параметрический произвол. Мы сделаем это, наложив дополнительные условия

$$\int_0^{2\pi} f(\xi) d\xi = z, \quad \int_0^{2\pi} j_0(\xi) d\xi = r, \quad \int_0^{4\pi} \mathcal{U}(\xi) d\xi = c\mathbf{1}, \quad (31)$$

где z и r — некоторые числа, комплексное и вещественное соответственно, а константа c определена условием $\det \mathcal{U} = 1$. Переформулируем далее условие (21) в терминах $(f, j_0, \mathcal{U})$. Заменим (21) условиями (вообще говоря, более сильными)

- 1) функции $f(\xi), j_0(\xi)$ являются 2π -периодическими;
- 2) матрица монодромии $\mathcal{M}$ линейной системы (30) удовлетворяет условию

$$\mathcal{M} = \epsilon \mathbf{1}. \quad (32)$$

Матрица $\mathcal{M} \in \text{SU}(2)$ и поэтому диагонализуема. Следовательно, условия (32) могут быть записаны в форме

$$\Phi_1 \equiv \arccos \left(\frac{1}{2} \text{Tr } \mathcal{M} \right) - \pi n = 0. \quad (33)$$

Целое число n имеет смысл некоторого топологического заряда в рассматриваемой модели, причем четные n отвечают $\epsilon = 1$, нечетные $-\epsilon = -1$.

Обозначим символом $\mathfrak{R}_0$ множество $(X_\mu(\xi), \Psi_\pm(\xi); \kappa)$, элементы которого связаны условиями (4)–(6), а символом $\mathfrak{R}'_1$ — множество $(f(\xi), j_a(\xi); P_\mu, M_{\mu\nu}; m^2, s^2, q, \theta)$, где m^2 и s^2 — некоторые дополнительные переменные. Данные величины — фундаментальные гамильтоновы переменные теории. Введем пару дополнительных условий:

$$\begin{cases} \Phi_m \equiv m^2 - P_\mu P^\mu = 0, \\ \Phi_s \equiv s^2 - S_\mu S^\mu = 0. \end{cases} \quad (34)$$

Пусть далее условиями (25), (31), (33) и (34) выделено подмножество $\mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{R}'_1$. Как следствие теоремы 1, а также сделанных в данном разделе построений справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Соответствие $\mathfrak{R}_0 \longleftrightarrow \mathfrak{R}_1$ является взаимно однозначным.*

Определим на $\mathfrak{R}'_1$ следующие скобки Пуассона:

$$\begin{aligned} \{f(\xi), \bar{f}(\eta)\} &= \delta'(\xi - \eta), & \{j_0(\xi), j_0(\eta)\} &= -2\delta'(\xi - \eta), \\ \{j_a(\xi), j_b(\eta)\}_0 &= -2\delta_{ab}\delta'(\xi - \eta) + 2\varepsilon_{abc}j_c(\xi)\delta(\xi - \eta) \end{aligned}$$

(здесь $a = 1, 2, 3$ и везде $\delta(\xi) = \sum_n e^{in\xi}$),

$$\begin{aligned} \{M_{\alpha\beta}, M_{\gamma\delta}\} &= g_{\alpha\delta}M_{\beta\gamma} + g_{\beta\gamma}M_{\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma}M_{\beta\delta} - g_{\beta\delta}M_{\alpha\gamma}, \\ \{M_{\alpha\beta}, P_\gamma\} &= g_{\beta\gamma}P_\alpha - g_{\alpha\gamma}P_\beta, & \{m^2, q\} &= 1, & \{s^2, \theta\} &= 1. \end{aligned}$$

Остальные возможные скобки равны нулю.

Здесь необходимо сделать следующее пояснение. Введение в теорию “лишних” степеней свободы m^2 и s^2 вместе со связями (34) необходимо для правильного согласования пуассоновой структуры с тензорной природой исходных струнных переменных. Не обсуждая в данной статье эти вопросы детально, приведем следующий пример. Используя явное представление (28) для радиус-вектора мирового листа $X_\mu(\xi^0, \xi^1)$, можно показать, что равенство

$$e^{a_\mu L^\mu(P)} X_\nu = X_\nu + a_\nu$$

выполняется для лиева оператора

$$L^\mu(P) = \{P^\mu, \dots + \pi \frac{P^\mu}{P^2} \{\Phi_m, \dots\}$$

Аналогичное слагаемое, пропорциональное Φ_s , содержится также в соответствующем операторе момента $L^{\mu\nu}(M)$. Поскольку скобки величин Φ_m и Φ_s между собой и с переменными P_μ и $M_{\mu\nu}$ нулевые (в сильном смысле), то алгебра Пуанкаре для операторов $L^\mu(P)$ и $L^{\mu\nu}(M)$ сохраняется.

Сделаем также замечание относительно мотивировки определения скобок $\{j_a, j_b\}$ ($a = 1, 2, 3$), которые не имеют канонического вида. Как следует из определения величин $j_a(\xi)$ (см. предложение 6), они могут рассматриваться как компоненты тока $SU(2)$ -значного кирального поля $\mathcal{K}(\xi^0, \xi^1) = \mathcal{U}(-\xi_-)\mathcal{U}^{-1}(\xi_+)$, удовлетворяющего уравнению (11) модели Весса–Зумино–Новикова–Виттена. Поскольку $SU(2)$ – компактная группа, то появление здесь в качестве основы пуассоновой структуры (центрально расширенной) алгебры токов является естественным и хорошо известным фактом [3, 12, 13].

Следуя [3], будем называть допустимыми такие функционалы $F : \mathfrak{H}_1 \rightarrow C$, для которых вариационные производные любого порядка $\delta F / \delta f(\xi)$, $\delta F / \delta j_a(\xi)$, $\dots$ являются обобщенными 2π -периодическими функциями. Выписанные выше скобки означают, что на множестве допустимых функционалов определена следующая пуассонова структура:

$$\begin{aligned} \{F, G\} = & 2\pi \int_0^{2\pi} \left[\frac{\delta F}{\delta f(\xi)} \left(\frac{\delta G}{\delta \bar{f}(\xi)} \right)' - \frac{\delta G}{\delta f(\xi)} \left(\frac{\delta F}{\delta \bar{f}(\xi)} \right)' \right] d\xi + \\ & + 4\pi \sum_{a=0}^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\delta F}{\delta j_a(\xi)} \right)' \frac{\delta G}{\delta j_a(\xi)} d\xi + \\ & + 4\pi \sum_{a,b,c=1}^3 \varepsilon_{abc} \int_0^{2\pi} \frac{\delta F}{\delta j_a(\xi)} \frac{\delta G}{\delta j_b(\xi)} j_c(\xi) d\xi + \\ & + \frac{\partial F}{\partial M_{\alpha\beta}} \frac{\partial G}{\partial M_{\gamma\delta}} (g_{\alpha\delta} M_{\beta\gamma} + g_{\beta\gamma} M_{\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma} M_{\beta\delta} - g_{\beta\delta} M_{\alpha\gamma}) + \\ & + \left(\frac{\partial F}{\partial M_{\alpha\beta}} \frac{\partial G}{\partial P_\gamma} - \frac{\partial F}{\partial P_\gamma} \frac{\partial G}{\partial M_{\alpha\beta}} \right) (g_{\beta\gamma} P_\alpha - g_{\alpha\gamma} P_\beta) + \\ & + \left(\frac{\partial F}{\partial m^2} \frac{\partial G}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial G}{\partial m^2} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial s^2} \frac{\partial G}{\partial \theta} - \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial G}{\partial s^2} \right). \end{aligned} \quad (35)$$

Скобка (35), очевидно, антисимметрична и в силу теоремы 2 однозначно определена также и на множестве (допустимых) функционалов $F(X_\mu, \Psi_\pm, \kappa)$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что тождество Якоби также выполняется.

Равенства (25), (31), (33) и (34) должны рассматриваться как гамильтоновы связи. Чтобы убедиться в том, что это связи первого рода, докажем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Матрица монодромии $\mathcal{M}$ системы (30) является аннулятором введенной пуассоновой структуры на поверхности связей (33).*

Заметим вначале, что матрица $\mathcal{M} = \mathcal{M}(j_a)$ не зависит от переменных $f, j_0, P_\mu, M_{\mu\nu}, \theta, q$, поэтому нам достаточно вычислить скобки матричных элементов матриц $\mathcal{M}$ и $Q_g = (i/2) \sum_a j_a \sigma_a$. Наиболее просто это сделать, используя правило Лейбница $\{AB, C\} = A\{B, C\} + \{A, C\}B$, а также справедливое на $\mathcal{R}_1$ тождество

$$\{(\mathcal{U}'(\xi) + Q_g(\xi)\mathcal{U}(\xi)) \otimes, \mathcal{M}\} \equiv 0.$$

После несложных вычислений находим

$$\{Q_g(\xi) \otimes, \mathcal{M}\} = [1 \otimes \mathcal{M}, C(\xi)],$$

где квадратные скобки означают коммутатор матриц 4×4 . Явный вид матрицы $C(\xi)$ всегда можно вычислить, используя (35), но в этом нет необходимости: очевидно, что если $\mathcal{M} \propto 1$, то $\{Q_g(\xi) \otimes, \mathcal{M}\} \equiv 0$.

Доказанное предложение означает, что каков бы ни был произвольный функционал Φ_2 , мы имеем

$$\{\Phi_1, \Phi_2\} \propto \Phi_1.$$

Учитывая скобки $\{\Phi_m, \Phi_i\} = \{\Phi_s, \Phi_i\} = 0$, $i = 1, 2$, а также тот факт, что величины $\int_0^{2\pi} f d\xi$, $\int_0^{2\pi} j_0 d\xi$, $P_\mu P^\mu$ и $S_\mu S^\mu$ — аннуляторы введенной пуассоновой структуры, находим, что система связей

$$\Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = 0, \quad \Phi_m = 0, \quad \Phi_s = 0$$

есть система связей первого рода. Отметим, что явный вид связей (34) может быть выбран иным: в них допустимо присутствие в виде слагаемых произвольных функций аннуляторов.

Для завершения предлагаемой схемы предъявим гамильтониан, задающий динамику (29) новых гамильтоновых переменных. Как уже отмечалось, уравнения (29) однозначно соответствуют исходным динамическим уравнениям (3). Пусть $H = H_0 + \Phi_m$, где

$$H_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\xi)|^2 d\xi + \frac{1}{8\pi} \sum_{a=0}^3 \int_0^{2\pi} j_a^2(\xi) d\xi.$$

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 3. *В терминах определенных выше скобок Пуассона справедливы равенства*

$$\{H, X_\mu\} = \partial_0 X_\mu, \quad \{H, \Psi_\pm\} = \partial_0 \Psi_\pm.$$

Действительно, легко убедиться в том, что равенства

$$\{H, j_a\} = j'_a, \quad \{H, f\} = f', \quad \{H, P_\mu\} = \{H, M_{\mu\nu}\} = 0$$

выполнены, так что соответствие с динамическими уравнениями (29) имеется. С помощью данных формул находим для произвольной матрицы решений $U(\xi)$ системы (30)

$$\{H, U(\xi)\} = U'(\xi) + U(\xi)C(U),$$

где $C(U)$ – некоторая постоянная матрица, зависящая от способа фиксации $U(\xi)$. Интегрируя это равенство для матрицы $\mathcal{U}$, входящей в разложение Ивасава введенной выше матрицы $T_0(\xi)$, получаем

$$C(\mathcal{U}) = \propto (1 - \mathcal{M}^2),$$

так что на поверхности связей (32) выполняется $C(\mathcal{U}) = 0$. Последнее равенство означает, что $\{H, T_0\} = T'_0$. В явных формулах (19) и (28) $T(\xi) = T_0(\xi)B$, где B – матрица, введенная при доказательстве предложения 5. Используя сделанные там же построения, можно показать, что $\{H, B\} = 0$, так что в нашем случае $C(T) = 0$. Теперь, для того чтобы убедиться в справедливости теоремы, достаточно воспользоваться явными выражениями (19) и (28).

Отметим, что введенная система связей согласована с ξ_0 -динамикой: скобки $\{H, \Phi_i\}$ и т. д. к новым связям не приводят.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В настоящей статье предложена нестандартная гамильтонова структура струнной модели (1). Заметим, что построенное фазовое пространство со связями описывает, вообще говоря, более широкую динамическую систему, которая отвечает гамильтониану

$$H^* = H_0 + \lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2 + \lambda_m \Phi_m + \lambda_s \Phi_s.$$

В силу предложения 7 все динамические переменные рассматриваемой струнной теории являются по отношению к связи $\Phi_1 = 0$ величинами первого рода, так что, не ограничивая общности, можно считать $\lambda_1(\xi^0) \equiv 0$. Рассматривая гамильтониан H^* , мы получаем соответствие с исходной динамической системой, вообще говоря, только при наложении дополнительных калибровочных условий

$$\lambda_2(\xi^0) \equiv 0, \quad \lambda_m(\xi^0) \equiv 1, \quad \lambda_s(\xi^0) \equiv 0.$$

Использование гамильтониана H в предлагаемой теории является корректным, поскольку процедура введения новых фундаментальных гамильтоновых переменных является однозначной. Связи же возникают не как форма записи функционального произвола при выражении обобщенных скоростей через канонические переменные, а как некоторые дополнительные условия, непосредственно с гамильтоновым формализмом не связанные.

В рамках классической теории, по-видимому, не имеет смысла говорить о предпочтении той или иной гамильтоновой структуры по отношению к другой. Что касается квантовой версии предлагаемой модели, то некоторые предварительные результаты получены в работе [10]. Они позволяют сделать вывод о том, что модель, оставаясь ковариантной в $D = 1 + 3$ измерениях, имеет нетривиальный спектр: траектории Редже линейны лишь асимптотически и имеют различный наклон, определяемый квантовым состоянием внутренних степеней свободы струны. Известно (см., например, [15]), что подобное реджевское поведение встречается у экзотических адронов, удовлетворительное описание которых, по-видимому, возможно в рамках предлагаемой теории.

Автору приятно поблагодарить А.К. Погребкова за плодотворные обсуждения, а также Ю.М. Зиновьева, А.П. Зубарева, В.П. Павлова и Н.А. Славнова за ценные замечания.

Работа выполнена в рамках проекта № 95-01-00658, поддержанного Российским фондом фундаментальных исследований.

Список литературы

- [1] *Dirac P. A. M.* // Canadian Journ. Math. 1950. V. 2. № 2. P. 129–148 (перевод в кн.: П. А. М. Дирак. К созданию квантовой теории поля. М.: Наука, 1990).
- [2] *Березин Ф. А.* Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986.
- [3] *Таштадзян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
- [4] *Кулиш П. П., Рейман А. Г.* // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1978. Т. 77. С. 124–133.
- [5] *Медведев Б. В., Павлов В. П.* Гамильтонов формализм / Физическая энциклопедия. Т. 1. М.: Советская энциклопедия, 1988.
- [6] *Барбашов Б. М., Нестеренко В. В.* Модель релятивистской струны в физике адронов. М.: Энергоатомиздат, 1987.
- [7] *Грин М., Шварц Дж., Виттен Е.* Теория суперструн. Т. 1. М.: Мир, 1990.
- [8] *Грин М., Шварц Дж., Виттен Е.* Теория суперструн. Т. 2. М.: Мир, 1990.
- [9] *Талалов С. В.* // ТМФ. 1990. Т. 82. № 3. С. 199–207; Т. 83. № 1. С. 57–63.
- [10] *Talalov S. V.* // J. Phys. A. 1994. V. 27. P. 2443–2455.
- [11] *Желнорович В. А.* Тензорные представления спиноров и спинорных уравнений. М.: МГУ, 1979.
- [12] *Новиков С. П.* // ДАН СССР. 1981. Т. 260. № 1. С. 31–35.
- [13] *Witten E.* // Commun. Math. Phys. 1984. V. 92. P. 455–472.
- [14] *Pron'ko G. P.* // Rev. Math. Phys. 1990. V. 2. № 3. P. 355–398.
- [15] *Сергеев М. Н.* // ЯФ. 1993. Т. 56. Вып. 3. С. 140–150.

Тольяттинский филиал
Самарского государственного
педагогического университета

Поступила в редакцию
10.V.1995 г.

S. V. Talalov

STRING DYNAMICS IN $D = 4$ SPACE-TIME
I. HAMILTONIAN FORMALISM

A dynamics of a classical $D = 1 + 3$ string with spin degrees of freedom is described in terms of non-standard Hamiltonian variables.