Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Ю. Лернер, Фейнмановские интегралы от p -адического аргумента в импульсном пространстве III. Перенормировка, *ТМФ*, 1996, том 106, номер 2, 233–249

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1110>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 07:03:40

Э.Ю. Лернер

ФЕЙНМАНОВСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ ОТ p -АДИЧЕСКОГО АРГУМЕНТА В ИМПУЛЬСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ III. ПЕРЕНОРМИРОВКА

Найдены инфракрасная и ультрафиолетовая серии полюсов безмассовых фейнмановских интегралов от p -адического аргумента с произвольными степенями пропагаторов. В рамках схемы минимальных вычитаний для аналитической R^* -операции доказана конечность перенормированных амплитуд. Даны простые формулы для вычисления контрчленов (вершинных частей) в координатном и импульсном пространствах.

1. ВВЕДЕНИЕ

Один из аргументов в пользу изучения p -адических моделей состоит в том, что p -адические теории [1, 2] могут оказаться полезными с методологической точки зрения в сложных задачах квантовой теории поля и статистической механики, поскольку ультраметричность p -адической нормы сильно облегчает вычисления. В частности, если в обычной вещественной квантовой теории поля исследование различных схем перенормировки проводится в рамках α -представления [3, 4], то в p -адическом случае основой доказательства теоремы о перенормируемости [5] могут служить явные выражения для фейнмановских амплитуд [6, 7].

Данная статья посвящена исследованию p -адического аналога аналитической перенормировки, введенной Спиром, и аналитической R^* -операции, введенной в вещественном случае в работах Четыркина, Ткачева, Смирнова (см. монографию [8] и ссылки в ней). Теорема о конечности аналитически перенормированных фейнмановских интегралов от p -адического аргумента (ФИ p -А) для φ_d^4 -модели в рамках теории обобщенных функций была доказана в [5]. Возможность применения других перенормировочных схем на простых примерах была продемонстрирована в [9]. $(4 - \epsilon)$ -разложение и размерная перенормировка амплитуд φ_d^4 -теории рассматривались в [10]. В работе [11] оператор перенормировки в p -адической $(\bar{\psi}\psi)^2$ -модели описан как нормализующее отображение к преобразованию ренормгруппы Каданова. Это преобразование задает конечномерную динамическую систему в пространстве констант связи. В этой статье мы выпишем серии полюсов безмассовой p -адической амплитуды с однородными пропагаторами и с пропагаторами, обрезанными в нуле или на бесконечности (аналогичные задачи в вещественном случае были решены в работах [12–15]). В рамках схемы мини-

мальных вычитаний мы докажем конечность аналитически R^* -нормированных p -адических амплитуд с однородными пропагаторами.

Основой наших доказательств является полученное в [16, 17] представление ФИ с однородным пропагатором в виде линейной комбинации ФИ с ограниченным пропагатором. Коэффициенты этой линейной комбинации представляют собой вакуумные амплитуды с пропагатором, обрезанным в нуле или на бесконечности. Заметим, что это представление опирается на простое следствие ультраметричности p -адической нормы, заключающееся в том, что значение ФИ p -А с пропагатором, являющимся функцией от $\|k_l\|(1 - \chi_r(k_l))$, не зависит от конкретных значений внешних импульсов, принадлежащих шару $\Omega_r = \{x \in Q_p^d : \|x\| \leq r\}$. Здесь $k_l \in Q_p^d$ — импульс внутреннего ребра l , а χ_r — индикатор шара Ω_r .

В этой работе, следуя [18], мы будем называть остовным подграфом связного графа G любой его подграф H , множество вершин которого $V(H)$ совпадает с $V(G)$ (в статье [17] мы дополнительно предполагали связность остовного подграфа H). Очевидно, что существует взаимно однозначное соответствие между остовными подграфами H графа G и наборами непересекающихся связных подграфов $\pi \equiv \pi(H) = \{H_1, \dots, H_n\}$ таких, что $\bigcup_i V(H_i) = V(G)$ (подграфы из набора $\pi(H)$ суть компоненты связности графа H). Мы будем употреблять одни и те же обозначения как для некоторых совокупностей остовных подграфов H , так и для множеств соответствующих им наборов $\pi(H)$. Существенным подграфом [15] называется подграф, содержащий все внешние вершины графа G в одной компоненте связности. Пусть $\mathcal{P}(G)$ — совокупность всех остовных подграфов графа G ; $\mathcal{P}'(G)$ — часть $\mathcal{P}(G)$, состоящая из существенных подграфов. Если $H \in \mathcal{P}'(G)$, то множество внешних линий графа H мы определим как множество E всех внешних линий исходного графа G . Заметим, что это нестандартное определение; обычно в качестве внешних линий графа H рассматривают более богатое множество. Звездой $St(v)$ вершины v называется множество всех ребер, инцидентных вершине v . Определения всех остальных терминов теории ФИ, используемых в данной работе, можно найти в [8] (см. также приложение к [13]).

Обозначим через $F_G(q; \lambda; m, M)$ ФИ p -А:

$$\int d\underline{p} \prod_{l \in L(G)} \|k_l\|^{\lambda_l} (\chi_M(k_l) - \chi_m(k_l)) \Big|_{k=k(q, \underline{p})}.$$

Здесь $q = (q_l, l \in E)$ и $\underline{p} = (p_1, \dots, p_{|L(G)| - |V(G)| + 1})$ — наборы внешних и петлевых импульсов, соответственно, $\lambda_l, l \in L(G)$, — комплексные параметры (по поводу остальных обозначений см. [16, 17]). Основным объектом наших исследований — интеграл $F_G(q; \lambda) \equiv F_G(q; \lambda; 0, \infty)$. Простейший вариант упомянутого выше представления имеет вид

$$F_G(q; \lambda) = \sum_{H_1 \in \mathcal{P}'(G)} \sum_{H_2 \in \mathcal{P}(H_1)} g_{G/H_1}(\lambda; 0, m) F_{H_1/H_2}(q; \lambda; m, M) g_{H_2}(\lambda; M, \infty). \quad (1)$$

Здесь $g_H(\cdot)$ — вакуумный интеграл $F_H(0; \cdot)$; $M \geq \max_{l \in E} \|q_l\|$ и $m < \min_{E' \subset E} \|\sum_{l \in E'} q_l\|$. Мы полагаем, что интегралы, индексруемые графами, не имеющими ребер, равны единице по определению. В формуле (1) и везде ниже будем предполагать, что вектор внешних импульсов q не принадлежит сингулярному множеству Симанзика $\bigcup_{E' \subset E} \{q \in Q_p^{d|E|} : \sum_{l \in E'} q_l = 0\}$. Несколько более сложные формулы

возникают, если в (1) ограничиться суммированием только по множеству $P(G)$ остовных подграфов графа G , все компоненты связности которых являются полными подграфами. А именно, имеет место представление, найденное в работе [17],

$$F_G(q; \lambda) = \sum_{H_1 \in P'(G)} \sum_{H_2 \in P(H_1)} f_{G/H_1}(\lambda; 0, m) \Phi_{H_1/H_2}(q; \lambda; m, M) f_{H_2}(\lambda; M, \infty). \quad (2)$$

Здесь $\Phi_G(q; \lambda; m, M)$ есть сумма ФИ

$$\sum_{S \in \tau(G)} \int d\underline{p} \prod_{l \in L(S)} (\chi_M(k_l) - \chi_m(k_l)) \|k_l\|^{\lambda_l} \prod_{l \in L(G) \setminus L(S)} \chi_m(k_l) \|k_l\|^{\lambda_l} \Big|_{k=k(q, \underline{p})},$$

где $\tau(G)$ — набор связных остовных подграфов графа G ; $f_G(\cdot)$ есть вакуумный интеграл $\Phi_G(0; \cdot)$; $P'(G)$ — часть $P(G)$, состоящая из существенных подграфов. Очевидно, что $\Phi_G(q; \lambda; 0, m) = F_G(q; \lambda; 0, m)$.

Заметим, что первое суммирование в формулах (1), (2) достаточно вести по множеству $\tilde{\mathcal{L}}(G)$ подграфов H таких, что граф G/H одночастично неприводим. Второе суммирование в этих формулах достаточно вести по множеству $\hat{\mathcal{L}}(G)$ подграфов H , каждая компонента которых представляет собой одночастично неприводимый подграф. В дальнейшем мы будем использовать обозначение $\mathcal{L}(G)$ для пересечения множеств $\tilde{\mathcal{L}}(G)$ и $\hat{\mathcal{L}}(G)$.

Разложения (1) и (2) позволяют свести анализ сингулярностей интеграла $F_G(q; \lambda)$ к анализу полюсов $\lambda^* = (\lambda_l^*, l \in L(G))$ вакуумных интегралов с пропагатором, обрезанным в нуле или на бесконечности. Более того, R^* -операция сводится к устранению расходимостей из вакуумных интегралов. Явные формулы для этих интегралов (см. раздел 2 работы [17]) приводят к существенному упрощению доказательств результатов теории R^* -операции в p -адическом случае.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы выпишем ультрафиолетовую (УФ) и инфракрасную (ИК) серии полюсов ФИ $F_G(q; \lambda; m, \infty)$, $F_G(q; \lambda; 0, M)$ и $F_G(q; \lambda)$. Из этих результатов следует полное отсутствие ИК-полюсов у интеграла $F_G(q; \lambda)$, если степени пропагаторов удовлетворяют соотношениям $\lambda_l > -d$ для всех $l \in L(G)$ и $\sum_{l \in St(v)} (\lambda_l + d) = 2d$ для всех внутренних вершин v (таким соотношениям удовлетворяют, например, степени пропагаторов в диаграммах φ_4^4 и φ_6^3 -моделей). В разделе 3 мы определим аналитическую R^* -операцию и докажем конечность R -нормированных амплитуд $F_G(q; \lambda; m, \infty)$, $\tilde{R}$ -нормированных амплитуд $F_G(q; \lambda; 0, M)$ и R^* -нормированных амплитуд $F_G(q; \lambda)$. Последний результат обобщает теорему о конечности перенормированных амплитуд безмассовой φ^4 -теории, доказанную в [5]. В разделе 4 мы определим R^* -операцию для координатного представления ФИ p -А и установим связь между вершинными частями, возникающими при устранении расходимостей в координатном и импульсном пространствах. Эта связь дает возможность находить контрчлены в импульсном пространстве с помощью простых “координатных” формул.

2. ПОЛЮСЫ ФЕЙНМАНОВСКИХ ИНТЕГРАЛОВ В ИМПУЛЬСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Как показано в [16, 17], аналитическое продолжение мероморфной функции $F_G(q, \lambda)$ определено для любых значений параметров λ , если граф G имеет не менее двух внеш-

них вершин и не содержит отдельных подграфов. Если последние условия не выполнены и граф G нетривиален, то положим, что $F_G(q, \lambda) \equiv 0$ по определению. Заметим, что интеграл $f_G(\lambda; M, \infty)$ имеет непустую область сходимости только, если граф G не содержит лепестков. В противном случае мы также положим, что $f_G(\lambda; M, \infty) \equiv 0$. Все остальные интегралы в импульсном пространстве, рассматриваемые в данной статье, определены как мероморфные функции параметров λ для любых графов G .

Обозначим через $\mathcal{Q}$ (через $\mathcal{Q}'$) совокупность двусвязных редуцированных графов $Q = G/H$ таких, что H принадлежит $P(G)$ (принадлежит $P'(G)$). Пусть $\mathcal{Q}'_0$ – совокупность всевозможных редуцированных графов $Q = G/H$ таких, что $H \in P'(G)$ и $|V(H')| = 1$ для всех компонент связности H' графа H , кроме компоненты с множеством вершин $V' \supseteq V_{\text{ext}}$. Через $\mathcal{H}$ (через $\mathcal{H}_0$) обозначим множество всевозможных (множество полных) двусвязных подграфов графа G . Пусть $\beta(G) = |L(G)| - |V(G)| + 1$, $\text{Ind}(G) = d\beta(G) + \sum_{l \in L(G)} \lambda_l$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – связный граф, не содержащий отдельных подграфов, и $|E(G)| \geq 2$. Тогда

$$F_G(q; \lambda) \prod_{l \in L(G)} (1 - p^{\lambda_l + d}) \prod_{H \in \mathcal{H}_0} (1 - p^{\text{Ind}(H)}) \prod_{Q \in \mathcal{Q}'_0} (1 - p^{\text{Ind}(Q)}) \quad (3)$$

– целая функция от переменных λ .

Заметим, что произведение

$$\Phi_G(q; \lambda; m, M) \prod_{l \in L(G)} (1 - p^{\lambda_l + d}), \quad 0 < m, M < \infty, \quad (4)$$

представляет собой целую функцию от переменных λ , поскольку

$$\Phi_G(q; \lambda; m, M) = \sum_{S \in \tau(G)} F_S(q; \lambda; m, M) \prod_{l \in L(G) \setminus L(S)} \left(p^{m(\lambda_l + d)} \frac{\Psi(\lambda_l + d)}{\Psi(d)} \right),$$

а $p^{-\text{Ind}(S)} F_S(q; \lambda; m, M)$ – полином от p^{λ_l} . Частный случай произведения (4) есть $f_G(\lambda; p^{-1}, 1) \prod_{l \in L(G)} (1 - p^{\lambda_l + d})$. Это замечание мы будем часто использовать в дальнейшем.

ЛЕММА 1. Пусть G – произвольный связный граф. Для любых параметров $m > 0$ и $M < \infty$ произведения

$$\begin{aligned} g_G(\lambda; M, \infty) & \prod_{H \in \mathcal{H}} (1 - p^{\text{Ind}(H)}), \\ f_G(\lambda; M, \infty) & \prod_{l \in L(G)} (1 - p^{\lambda_l + d}) \prod_{H \in \mathcal{H}_0} (1 - p^{\text{Ind}(H)}), \\ f_G(\lambda; 0, m) & \prod_{l \in L(G)} (1 - p^{\lambda_l + d}) \prod_{Q \in \mathcal{Q}} (1 - p^{\text{Ind}(Q)}) \end{aligned}$$

– целые функции от переменных λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Поскольку

$$\begin{aligned} g_G(\lambda; M, \infty) &= M^{\text{Ind}(G)} g_G(\lambda; 1, \infty), \\ f_G(\lambda; M, \infty) &= M^{\text{Ind}(G)} f_G(\lambda; 1, \infty), \\ f_G(\lambda; 0, m) &= m^{\text{Ind}(G)} f_G(\lambda; 0, 1), \end{aligned}$$

то без ограничения общности можно считать, что $M = 1$, $m = 1$. Легко видеть, что если граф G одночастично приводим, то $f_G \equiv g_G \equiv 0$. Если же граф G распадается на блоки (компоненты двусвязности) $G_1, \dots, G_n$, то

$$g_G(\cdot) = \prod_{i=1}^n g_{G_i}(\cdot), \quad f_G(\cdot) = \prod_{i=1}^n f_{G_i}(\cdot) = \prod_{i=1}^n f_{G/(G \setminus G_i)}(\cdot), \quad (5)$$

где $G \setminus G_i$ — дополнение графа G_i . Для вычисления интегралов, индексируемых каждым из графов G_i , можно воспользоваться рекуррентными формулами (см. формулу (4) и теоремы 2, 2' в [17])

$$g_G(\lambda; 1, \infty) = -\Psi(\text{Ind}(G)) \sum_{\substack{H \in \mathcal{L}(G), \\ H \neq G}} g_{G/H}(\lambda; p^{-1}, 1) g_H(\lambda; 1, \infty), \quad (6)$$

$$f_G(\lambda; 1, \infty) = -\Psi(\text{Ind}(G)) \sum_{\substack{H \in P(G) \cap \mathcal{L}(G), \\ H \neq G}} f_{G/H}(\lambda; p^{-1}, 1) f_H(\lambda; 1, \infty), \quad (7)$$

$$f_G(\lambda; 0, 1) = \Psi(\text{Ind}(G)) \sum_{\substack{H \in P(G) \cap \mathcal{L}(G), \\ L(H) \neq \emptyset}} p^{-\text{Ind}(G/H)} f_{G/H}(\lambda; 0, 1) f_H(\lambda; p^{-1}, 1), \quad (8)$$

где $\Psi(\alpha) = (1 - p^{-\alpha})^{-1}$.

Формулы (5)–(8) позволяют выразить интегралы $g_G(\lambda; 1, \infty)$, $f_G(\lambda; 1, \infty)$, $f_G(\lambda; 0, 1)$ в виде сумм произведений функций Ψ , $f_G(\lambda; p^{-1}, 1)$ и функций, не зависящих от λ . Утверждение леммы 1 следует непосредственно из этих выражений. ■

Пусть G — связный граф, имеющий одну внешнюю вершину v_0 . Обозначим через $P_0(G)$ часть $P(G)$, состоящую из подграфов, имеющих в качестве одной из компонент связности подграф с множеством вершин $\{v_0\}$.

ЛЕММА 2. Пусть G — произвольный связный граф, имеющий лишь одну внешнюю вершину, $0 < m < \infty$ и

$$\widehat{f}_G(\lambda; m) = \sum_{H \in P_0(G)} f_{G/H}(\lambda; 0, m) f_H(\lambda; m, \infty).$$

Тогда произведение

$$\widehat{f}_G(\lambda; m) \prod_{l \in L(G)} (1 - p^{\lambda_l + d}) \prod_{H \in \mathcal{H}_0} (1 - p^{\text{Ind}(H)}) \prod_{Q \in \mathcal{Q}'_0} (1 - p^{\text{Ind}(Q)})$$

— целая функция от переменных λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемму 2 мы будем доказывать индукцией по $|V(G)|$. Воспользуемся леммой 1 работы [17], утверждающей, что для любого нетривиального графа G

$$\sum_{H \in P(G)} f_{G/H}(\lambda; 0, m) f_H(\lambda; m, \infty) = 0,$$

отсюда

$$\begin{aligned} \widehat{f}_G(\lambda; m) &= - \sum_{H \in P(G) \setminus P_0(G)} f_{G/H}(\lambda; 0, m) f_H(\lambda; m, \infty) = \\ &= - \sum_{H'} \widehat{f}_{G/H'}(\lambda; m) f_{H'}(\lambda; m, \infty), \end{aligned}$$

где суммирование в последнем выражении ведется по всем полным связным нетривиальным подграфам, содержащим внешнюю вершину графа G . Утверждение леммы 2 следует из индукционного предположения и леммы 1 настоящей работы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Из формулы (2) и соотношения

$$f_G(\lambda; 0, M) = \sum_{H \in P(G)} f_{G/H}(\lambda; 0, m) f_H(\lambda; m, M)$$

(формула (6) работы [17]) следует, что

$$F_G(q; \lambda) = \sum_{H_1 \in \mathcal{H}'_0} \sum_{H_2 \in P(H_1)} \widehat{f}_{G/H_1}(\lambda; m) \Phi_{H_1/H_2}(q; \lambda; m, M) f_{H_2}(\lambda; M, \infty),$$

где $\mathcal{H}'_0$ – совокупность всевозможных подграфов H таких, что $H \in P'(G)$ и $|V(H')| = 1$ для всех компонент связности H' графа H , кроме компоненты с множеством вершин $V' \supseteq V_{\text{ext}}$. Утверждение теоремы 1 следует из последней формулы, лемм 1, 2 и замечания перед ними. ■

Множитель $\prod_{l \in L(G)} (1 - p^{\lambda_l + d}) \prod_{H \in \mathcal{H}_0} (1 - p^{\text{Ind}(H)})$ в формуле (3) связан с УФ-расходимостями фейнмановской амплитуды, и его нули определяют УФ-серии полюсов интеграла $F_G(q; \lambda)$. Аналогично значения λ_l , $l \in L(G)$, удовлетворяющие равенству $\text{Ind}(Q) + 2\pi i n (\ln p)^{-1} = 0$ для некоторых $Q \in \mathcal{Q}'_0$ и $n \in \mathbb{Z}$, определяют ИК-серии полюсов.

Утверждение, близкое по формулировке к теореме 1, в вещественном случае было получено в работе Спира [12] (аналог функции Ψ есть обычная Γ -функция половинного аргумента).

Пусть $V_{\text{in}}(G)$ – множество всех внутренних вершин графа G .

СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $\lambda_l = \lambda_l^* + \varepsilon$, $l \in L(G)$, где λ_l^* – вещественные числа, удовлетворяющие соотношениям

$$\lambda_l^* > -d \text{ для всех } l \in L(G), \quad \sum_{l \in St(v)} (\lambda_l^* + d) = 2d \text{ для всех } v \in V_{\text{in}}(G). \quad (9)$$

Тогда $F_G(q; \lambda)$ не имеет ИК-полюсов при $\varepsilon = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $Q \in \mathcal{Q}'_0$, то

$$\text{Ind}(Q)|_{\lambda=\lambda^*} = \sum_{l \in L(Q)} (\lambda_l^* + d) - d(|V(Q)| - 1) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{v \in V(Q), \\ v \neq v_0}} \frac{\sum_{l \in St(v)} (\lambda_l^* + d)}{2} - d(|V(Q)| - 1) + \sum_{l \in L(Q)} |i_l^{v_0}| (\lambda_l^* + d)/2 = \\
&= \sum_{l \in L(Q)} |i_l^{v_0}| (\lambda_l^* + d)/2 > 0,
\end{aligned}$$

где v_0 – единственная внешняя вершина графа Q , (i_l^v) – матрица инцидентности графа G . ■

Пусть теперь $\lambda^* = (\lambda_l^*, l \in L(G))$ – полюс функции $g_G(\lambda; m, \infty)$, или функции $f_G(\lambda; m, \infty)$, или же функции $f_G(\lambda; 0, M)$. Пусть $\lambda_l = \lambda_l^* + \varepsilon$, $l \in L(G)$. Обозначим через S оператор взятия главной части ряда Лорана мероморфной функции по переменной ε . Лемму 1 дополняет следующее утверждение, которое мы также будем использовать в дальнейшем

ЛЕММА 3. Пусть G – произвольный связный граф. Имеем

$$S \left(\varepsilon^{\beta(G)} g_G(\lambda; M, \infty) \right) = S \left(\varepsilon^{\beta(G)} g_G(\lambda; 0, m) \right) = 0.$$

Если к тому же $p^{\lambda_l^* + d} \neq 1$ для всех $l \in L(G)$, то

$$S \left(\varepsilon^{|V(G)|-1} f_G(\lambda; M, \infty) \right) = S \left(\varepsilon^{|V(G)|-1} f_G(\lambda; 0, m) \right) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3 достаточно провести для случаев $m = 1$, $M = 1$. Это доказательство легко получается индукцией по $|L(G)|$ для функции g и индукцией по $|V(G)|$ для функции f , если воспользоваться формулами (7), (8) для функции f , “УФ-формулой” (6) и аналогичной ей “ИК-формулой” для функции g . Последняя имеет вид:

$$g_G(\lambda; 0, 1) = \Psi(\text{Ind}(G)) \sum_{\substack{H \in \mathcal{L}(G), \\ L(H) \neq \emptyset}} p^{-\text{Ind}(G/H)} g_{G/H}(\lambda; 0, 1) g_H(\lambda; p^{-1}, 1). \quad (10)$$

Рассмотрим, наконец, аналитические свойства ФИ с обрезанным пропагатором. Из леммы 1 и формул

$$F_G(q; \lambda; m, \infty) = \sum_{H \in \mathcal{P}(G)} F_{G/H}(q; \lambda; m, R) g_H(\lambda; R, \infty), \quad R \geq \max_{l \in E} \|q_l\|, \quad (11)$$

(см. введение к работе [17]) и

$$F_G(q; \lambda; 0, M) = \sum_{H \in \mathcal{P}'(G)} f_{G/H}(\lambda; 0, r) \Phi_H(q; \lambda; r, M), \quad r < \min_{E' \subset E} \left\| \sum_{l \in E'} q_l \right\|, \quad (12)$$

(см. теорему 1' той же работы) следует теорема:

ТЕОРЕМА 2. Пусть G – произвольный связный граф, $m > 0$, $M < \infty$. Тогда

$$\begin{aligned}
&F_G(q; \lambda; m, \infty) \prod_{H \in \mathcal{H}} (1 - p^{\text{Ind}(H)}), \\
&F_G(q; \lambda; 0, M) \prod_{l \in L(G)} (1 - p^{\lambda_l^* + d}) \prod_{Q \in \mathcal{Q}'} (1 - p^{\text{Ind}(Q)})
\end{aligned}$$

– целые функции от переменных λ .

Заметим, что полюсы Φ И с обрезанным пропагатором в вещественном случае рассматривались в работе [13]. Аналитические свойства вещественных интегралов с пропагатором, обрезанным в нуле, аналогичны свойствам амплитуд с ненулевой массой.

3. R^* -ОПЕРАЦИЯ

Для более последовательного введения R^* -операции нам удобно сначала рассмотреть перенормировку Φ И с пропагатором, обрезанным в нуле или на бесконечности.

Пусть λ^* — полюс функции $F_G(q; \lambda; t, \infty)$ или же функции $F_G(q; \lambda; 0, M)$ и пусть $\lambda = \lambda^* + \varepsilon$, где ε — комплексное число. Сопоставим каждому связному подграфу H графа G некоторый полином

$$O(H) = \sum_{\beta(H) \leq j \leq -1} a_j \varepsilon^j,$$

зависящий только от H и λ^* . Аналогично каждому редуцированному графу $Q = G/H$, $H \in \mathcal{P}'(G)$, сопоставим полином

$$\tilde{O}(Q) = \sum_{\beta(Q) \leq j \leq -1} \tilde{a}_j \varepsilon^j.$$

При этом $O(H) = 1$ ($\tilde{O}(Q) = 1$), если граф H (граф Q) тривиален. Определим оператор аналитической перенормировки $R^{ar} \equiv R$ по формуле

$$R F_G = \sum_{\pi \in \mathcal{P}(G)} F_{G|_\pi} \prod_{H \in \pi} O(H). \quad (13)$$

Здесь π есть набор компонент связности подграфа $H \in \mathcal{P}(G)$, а $G|_\pi$ — редуцированный граф G/H . $\tilde{R}$ -операция определяется как

$$\tilde{R} F_G = \sum_{H \in \mathcal{P}'(G)} \tilde{O}(G/H) F_H. \quad (14)$$

В частности,

$$\tilde{R} g_G = \sum_{H \in \mathcal{P}(G)} \tilde{O}(G/H) g_H. \quad (15)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть G — произвольный связный граф, $t > 0$, $M < \infty$. Существует такой набор полиномов $O(H)$, $\tilde{O}(H)$, при котором интегралы $R F_G(q; \lambda; t, \infty)$ и $\tilde{R} F_G(q; \lambda; 0, M)$ являются мероморфными функциями переменной ε , аналитическими при $\varepsilon = 0$. При этом $O(H)$, $\tilde{O}(H)$ равны нулю, если граф H одночастично приводим или $\text{Re}(\text{Ind}(H)|_{\lambda=\lambda^*}) \neq 0$. Если граф H распадается на блоки $H_1, \dots, H_n$, то $O(H) = \prod_{i=1}^n O(H_i)$, $\tilde{O}(H) = \prod_{i=1}^n \tilde{O}(H_i)$.

Рассмотрим всевозможные вакуумные Φ И с обрезанным пропагатором $g_H(\lambda; t, \infty)$, $H \in \mathcal{P}(G)$ и $g_Q(\lambda; 0, M)$, $Q = G/H$, $H \in \mathcal{P}'(G)$. Заметим, что если $H' \in \mathcal{P}(Q) \equiv \{H' \in \mathcal{P}(G) : H' \subseteq H\}$, то редуцированный граф $Q' = Q/H'$ совпадает с графом G/H' .

ЛЕММА 4. Существует единственно возможный выбор полиномов $O(H)$, где $H \in \pi$, $\pi \in \mathcal{P}(G)$, и полиномов $\tilde{O}(Q)$, где $Q = G/H$, $H \in \mathcal{P}'(G)$, при котором все вакуумные нормированные интегралы $R g_H(\lambda; t, \infty)$, где $H \in \mathcal{P}(G)$, и $\tilde{R} g_Q(\lambda; 0, M)$, где $Q = G/H$, $H \in \mathcal{P}'(G)$, являются мероморфными функциями переменной ε , аналитичными при $\varepsilon = 0$. При этом указанные полиномы обладают всеми свойствами, описанными в теореме 3.

Заметим, что в случае φ_d^4 -теории аналогичное утверждение для полиномов $O(H)$ было доказано в [5]. Мы рассмотрим доказательство леммы 4 и теоремы 3 только в ИК-случае. УФ-случай рассматривается аналогично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4 (ИК-случай). Заметим сначала, что единственно возможный выбор полиномов $\tilde{O}(Q)$, при котором функции $\tilde{R} g_Q(\lambda; 0, M)$ будут аналитичны при $\varepsilon = 0$, задается рекуррентным соотношением

$$\tilde{O}_M(Q) = -S \sum_{\substack{H' \in \mathcal{P}(Q), \\ |L(H')| \geq 1}} \tilde{O}_M(Q/H') g_{H'}(\lambda; 0, M). \quad (16)$$

Здесь рекурсия ведется по мощности $L(Q)$; если $|L(Q)| = 0$, то $\tilde{O}(Q) = 1$ по определению. Заметим, что равенство

$$S \left(\varepsilon^{\beta(Q)} \tilde{O}_M(Q) \right) = 0 \quad (17)$$

следует из индукционного предположения и леммы 3. Нам надо доказать, что полиномы $\tilde{O}_M(Q)$ не зависят от M . Пусть операция $\tilde{R}_M$ определяется по формуле (15), где в качестве $\tilde{O}(Q)$ взяты полиномы $\tilde{O}_M(Q)$. Воспользуемся формулой (3) из работы [17]:

$$g_{H'}(\lambda; 0, M) = \sum_{H'' \in \mathcal{P}(H')} g_{H'/H''}(\lambda; 0, m) g_{H''}(\lambda; m, M), \quad (18)$$

здесь $m < M$. Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{R}_m g_Q(\lambda; 0, M) &= \sum_{H' \in \mathcal{P}(Q)} \sum_{H'' \in \mathcal{P}(H')} \tilde{O}_m(Q/H') g_{H'/H''}(\lambda; 0, m) g_{H''}(\lambda; m, M) = \\ &= \sum_{H'' \in \mathcal{P}(Q)} g_{H''}(\lambda; m, M) \sum_{H' \in \mathcal{P}(Q/H'')} \tilde{O}_m(Q/H') g_{H'/H''}(\lambda; 0, m) = \\ &= \sum_{H'' \in \mathcal{P}(Q)} g_{H''}(\lambda; m, M) \tilde{R}_m g_{Q/H''}(\lambda; 0, m). \end{aligned}$$

Поскольку все функции в последней сумме аналитичны при $\varepsilon = 0$, то $\tilde{O}_M(Q) \equiv \tilde{O}_m(Q) \equiv \tilde{O}(Q)$ для всех $Q = G/H$, $H \in \mathcal{P}'(G)$.

Докажем теперь, что полиномы $\tilde{O}(Q)$, $Q = G/H$ равны нулю, если $\text{Re}(\text{Ind}(Q)|_{\varepsilon=0}) \neq 0$. Доказательство будем вести индукцией по $|L(Q)|$. Допустим, что это верно для всех графов $Q' = G/H'$, $H' \supset H$ и $\text{Re}(\text{Ind}(Q)|_{\varepsilon=0}) \neq 0$. Имеем $\tilde{O}(Q) = \tilde{O}_M(Q)$, где

$$O_M(Q) = -S \sum_{\substack{H' \in \mathcal{P}(Q), \\ |L(H')| \geq 1}} \tilde{O}(Q/H') g_{H'}(\lambda; 0, M) =$$

$$= -S \sum_{\substack{H' \in \mathcal{P}(Q), \\ |L(H')| \geq 1}} p^{M \text{Ind}(H')} \Big|_{\varepsilon=0} \tilde{O}(Q/H') p^{M |L(H')| \varepsilon} g_{H'}(\lambda; 0, 1). \quad (19)$$

В силу соотношения (17) вместо $p^{M |L(H')| \varepsilon}$ в последнем выражении можно подставить $\sum_{j=0}^k (M |L(H')| \varepsilon)^j / j!$, где $k \leq \beta(Q)$. Кроме того, вследствие предположения индукции для всех ненулевых слагаемых в последней сумме имеем

$$\|p^{M \text{Ind}(H')}\|_{\varepsilon=0} = \|p^{M \text{Ind}(Q)}\|_{\varepsilon=0}.$$

Устремив в равенстве (19) число M к плюс- или к минус-бесконечности (к чему именно — зависит от знака $-\text{Re}(\text{Ind}(Q)|_{\varepsilon=0})$), получаем, что $\tilde{O}(Q) = 0$.

Пусть теперь граф Q распадается на неприводимые подграфы $Q_1, \dots, Q_m$. Формула

$$\tilde{O}(Q) = \prod_{i=1}^m \tilde{O}(Q_i) \quad (20)$$

легко доказывается индукцией по $|L(Q)|$, поскольку только при таком выборе $O(Q)$ имеет место равенство

$$S(\tilde{R} g_Q) = S\left(\prod_{i=1}^m \tilde{R} g_{Q_i}\right) = 0.$$

Если $|L(Q)| = 1$, $|V(Q)| = 2$, то равенство $\tilde{O}(Q) = 0$ очевидно. Из этого равенства и формулы (20) следует, что $\tilde{O}(Q) = 0$ для любого одночастично приводимого графа Q . Лемма 4 доказана полностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3 (ИК-случай). Пусть $\tilde{O}(Q)$ определяются по формуле (16). По определению

$$\tilde{R} F_G(\lambda; 0, M) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}'(G)} \tilde{O}(G|_{\pi}) F_{\sigma(\pi)}(q; \lambda; 0, M) \prod_{\substack{H \in \pi, \\ H \neq \sigma(\pi)}} g_H(\lambda; 0, M), \quad (21)$$

где через $\sigma(\pi)$ обозначен подграф H из набора π , для которого $E(H) = E(G)$. Воспользуемся аналогом формулы (11) для ИК-случая:

$$F_{\sigma(\pi)}(q; \lambda; 0, M) = \sum_{H' \in \mathcal{P}'(\sigma(\pi))} g_{\sigma(\pi)/H'}(\lambda; 0, m) F_{H'}(q; \lambda; m, M), \quad (22)$$

здесь $m < \min_{E' \subset E(\sigma(\pi))} \|\sum_{l \in E'} q_l\|$. Подставив (22) и (18) в (21), получаем, что мероморфная функция

$$\tilde{R} F_G(\lambda; 0, M) = \sum_{H' \in \mathcal{P}'(G)} F_{H'}(q; \lambda; m, M) \tilde{R} g_{G/H'}(\lambda; 0, m)$$

аналитична по ε при $\varepsilon = 0$. Теорема доказана.

Заметим, что полиномы $O(H)$, $H \in \pi$, $\pi \in \mathcal{P}(G)$, могут быть найдены с помощью рекуррентного соотношения

$$O(H) = -S \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{P}(H), \\ |\pi| > 1}} g_{H|_{\pi}}(\lambda; 1, \infty) \prod_{H' \in \pi} O(H').$$

В следующем разделе мы дадим более эффективный алгоритм для нахождения вершинных частей в случае, если $p^{\lambda_l^* + d} \neq 1$ для всех $l \in L(G)$.

Пусть теперь $\lambda^* = (\lambda_l^*, l \in L(G))$ – УФ- или (и) ИК-полюс функции $F_G(q; \lambda)$ и пусть $\lambda = \lambda^* + \varepsilon$. R^* -операция определяется как композиция R - и $\tilde{R}$ -операций, определяемых по формулам (13) и (14):

$$\begin{aligned} R^* F_G(q; \lambda) &= \tilde{R} R F_G(q; \lambda) = \\ &= \sum_{H' \in \mathcal{P}'(G)} \sum_{\pi \in \mathcal{P}(H')} \tilde{O}(G/H') F_{H'|\pi}(q; \lambda; 0, \infty) \prod_{H'' \in \pi} O(H''). \end{aligned}$$

Полиномы $O(H)$, $H \in \pi$, $\pi \in \mathcal{P}(G)$, и $\tilde{O}(G/H)$, $H \in \mathcal{P}'(G)$, определены выше.

ТЕОРЕМА 4. Пусть G – связный граф, не содержащий отдельных подграфов, и $|E(G)| \geq 2$. Тогда R^* -нормированный интеграл $R^* F_G(q; \lambda)$ является мероморфной функцией ε , аналитичной при $\varepsilon = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим вместо каждого интеграла $F_{H'|\pi}(q; \lambda; t, M)$ его представление (1) в виде линейной комбинации Φ И с ограниченным пропагатором. Имеем

$$R^* F_G(q; \lambda) = \sum_{H_1 \in \mathcal{P}'(G)} \tilde{R} g_{G/H_1}(\lambda; 0, t) \sum_{\pi \in \mathcal{P}(H_1)} F_{H_1|\pi}(q; \lambda; t, M) \prod_{H_2 \in \pi} R g_{H_2}(\lambda; M, \infty).$$

В силу леммы 4 последнее выражение аналитично по ε в некоторой окрестности начала координат. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМЫ 4. Пусть G – связный граф, не содержащий отдельных подграфов, $|E(G)| \geq 2$, и пусть $\lambda = \lambda^* + \varepsilon$, где λ^* – вещественный вектор, удовлетворяющий соотношениям (9). Тогда R -нормированный интеграл $R F_G(q; \lambda)$ является мероморфной функцией ε , аналитичной при $\varepsilon = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что R -нормированный Φ И

$$R F_G(q; \lambda) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}(G)} F_{G|\pi}(q; \lambda) \prod_{H \in \pi} O(H) \quad (23)$$

представляет собой линейную комбинацию интегралов $F_{G|\pi}(q; \lambda)$, каждый из которых удовлетворяет условиям (9). Заметим, что ненулевые слагаемые в сумме (23) соответствуют наборам $\pi \in \mathcal{P}(G)$, для которых $\text{Ind}(H)|_{\lambda=\lambda^*} = 0$ для всех $H \in \pi$. Мы должны доказать, что если вершины полного связного графа H являются внутренними вершинами графа G и $\text{Ind}(H)|_{\lambda=\lambda^*} = 0$, то

$$\sum_{l \in L(G)} \sum_{v \in V(H)} |i_l^v|(\lambda_l^* + d) - \sum_{l \in L(H)} (\lambda_l^* + d) = 2d.$$

Действительно,

$$\sum_{l \in L(G)} \sum_{v \in V(H)} |i_l^v|(\lambda_l^* + d) - \sum_{l \in L(H)} (\lambda_l^* + d) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{v \in V(H)} \sum_{l \in St(v)} (\lambda_l^* + d) - 2 \sum_{l \in L(H)} (\lambda_l^* + d) = \\
&= 2 \left(d|V(H)| - d|L(H)| - \sum_{l \in L(H)} \lambda_l^* \right) = 2(d - \text{Ind}(H)|_{\lambda=\lambda^*}) = 2d.
\end{aligned}$$

Для доказательства утверждения следствия достаточно теперь доказать равенство $\tilde{R}F_G(q; \lambda) = F_G(q; \lambda)$. Оно вытекает из отсутствия ИК-полюсов у интеграла $F_G(q; \lambda)$.

4. КОНТРАЧЛЕНЫ В КООРДИНАТНОМ И ИМПУЛЬСНОМ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть $\Delta_{\lambda_l}(x)$ есть преобразование Фурье от функции $\|k_l\|^{\lambda_l}$. Оно имеет вид $\frac{\Psi(\lambda_l + d)}{\Psi(-\lambda_l)} \|x\|^{-\lambda_l - d}$, $x \in Q_p^d$. Обозначим через $\tilde{F}_G(x_1, \dots, x_{|E|}; \lambda; m, M)$ интеграл

$$\begin{aligned}
&\int \prod_{l \in L(G)} \Delta_{\lambda_l}(x_{i(l)} - x_{f(l)}) \times \\
&\quad \times (\chi_{1/m}(x_{i(l)} - x_{f(l)}) - \chi_{1/M}(x_{i(l)} - x_{f(l)})) \prod_{v \in V_{\text{in}}(G)} dx_v, \quad (24)
\end{aligned}$$

где $i(l)$ и $f(l)$ — соответственно начальная и конечная вершины ребра l . В дальнейшем для набора внешних переменных $(x_1, \dots, x_{|E|})$ мы будем использовать обозначение $y = (y_v, v \in V_{\text{ext}}(G))$, где $V_{\text{ext}}(G) = V(G) \setminus V_{\text{in}}(G)$. Как показано в [16, 17], аналитическое продолжение мероморфной функции $\tilde{F}_G(y; \lambda) \equiv \tilde{F}_G(y; \lambda; 0, \infty)$ определено для любых значений параметров λ , если граф G имеет не менее двух внешних вершин, не содержит отделимых подграфов и если

$$y \notin \bigcup_{v \neq v'} \left\{ y \in Q_p^{d|E|} : y_v = y_{v'} \right\}.$$

Последнее условие мы будем предполагать выполненным во всех формулах ниже. Если $(m, M) \neq (0, \infty)$, то интеграл $\tilde{F}_G(y; \lambda; m, M)$ определен для любого связного графа G , не содержащего лепестков. Если $|V_{\text{ext}}(G)| = 1$, то этот интеграл является функцией от λ , но не от y . Эту функцию мы будем обозначать через $\tilde{f}_G(\lambda; m, M)$. Заметим, что в работе [17] мы употребляли такое же обозначение для аналогичного интеграла с “пропагатором” $\|x\|^{-\lambda_l - d}$.

Пусть $\tilde{P}(G) = \{\pi \in P(G) : |V_{\text{ext}}(G) \cap V(H)| \leq 1 \text{ для всех } H \in \pi\}$. Для $\pi \in \tilde{P}(G)$ определим $\tilde{\Phi}_{G|\pi}(y; \lambda; m, M)$ по формуле (24), заменив в ней G на $G|\pi$ и отождествив вершины, принадлежащие $V(H)$ для каждого $H \in \pi$. Положим, что $\tilde{f}_\pi(\lambda; m, M) = \prod_{H \in \pi} \tilde{f}_H(\lambda; m, M)$. Формулы (11), (12) имеют следующие координатные аналоги (см. теоремы 3 и 3' в [17]):

$$\tilde{F}_G(y; \lambda; m, \infty) = \sum_{\pi \in \tilde{P}(G)} \tilde{\Phi}_{G|\pi}(y; \lambda; m, R) \tilde{f}_\pi(\lambda; R, \infty), \quad (25)$$

$$\tilde{F}_G(y; \lambda; 0, M) = \sum_{\pi \in P'(G)} \tilde{f}_{G|\pi}(\lambda; 0, r) \tilde{F}_{\sigma(\pi)}(y; \lambda; r, M) \prod_{H \in \pi \setminus \{\sigma(\pi)\}} \tilde{f}_H(\lambda; r, M), \quad (26)$$

здесь $R > (\min_{v \neq v'} \|y_v - y_{v'}\|)^{-1}$, $r \leq (\max_{v \neq v'} \|y_v - y_{v'}\|)^{-1}$.

Обозначим через $C_G(p^d)$ число способов раскраски вершин графа G с помощью p^d красок таким образом, чтобы смежные вершины имели разные цвета (хроматический многочлен графа G [18]). Пусть $C'_G = \gamma(G) C_G(p^d)/p^{d|V(G)|}$, где $\gamma(G) = \prod_{l \in L(G)} \frac{\Psi(\lambda_l + d)}{\Psi(-\lambda_l)}$. Вакуумные интегралы могут быть найдены с помощью следующих рекуррентных соотношений (теоремы 4 и 4' в [17]):

$$\tilde{f}_G(\lambda; 1, \infty) = \Psi(-\text{Ind}(G)) \sum_{\substack{\pi \in P(G), \\ |\pi| > 1}} p^{\text{Ind}(G) - \text{Ind}(G|_\pi)} C'_{G|_\pi} \tilde{f}_\pi(\lambda; 1, \infty), \quad (27)$$

$$\tilde{f}_G(\lambda; 0, 1) = -\Psi(-\text{Ind}(G)) \sum_{\substack{\pi \in P(G), \\ |\pi| < |V(G)|}} \tilde{f}_{G|_\pi}(\lambda, 0, 1) \prod_{H \in \pi} C'_H. \quad (28)$$

Эти формулы могут быть преобразованы. Пусть $V' \subseteq V(G)$. Обозначим через $H(V')$ полный подграф графа G , натянутый на множество вершин V' . Имеет место рекуррентное соотношение (см. [6, 5, 7, 16])

$$\begin{aligned} \tilde{f}_G(\lambda; 1, \infty) &= \Psi(-\text{Ind}(G)) \sum_{\substack{V(G) = \cup_{i=1}^n V_i, \\ n > 1}} c(n) \gamma(G|_{\{H(V_1), \dots, H(V_n)\}}) \times \\ &\times \prod_i p^{\text{Ind}(H(V_i))} \tilde{f}_{H(V_i)}(\lambda; 1, \infty), \end{aligned} \quad (29)$$

где $c(n) = (1 - p^{-d})(1 - 2p^{-d}) \dots (1 - (n-1)p^{-d})$ и суммирование ведется по всем разбиениям множества $V(G)$ на непересекающиеся подмножества $V_1, \dots, V_n$, $n > 1$. Подобная формула в ИК-случае имеет вид

$$\tilde{f}_G(\lambda; 0, 1) = -\Psi(-\text{Ind}(G)) \sum_{\substack{V(G) = \cup_{i=1}^n V_i, \\ n < |V(G)|}} \tilde{f}_{G|_{\{H(V_1), \dots, H(V_n)\}}}(\lambda; 0, 1) \prod_i c(|V_i|) \gamma(H(V_i)). \quad (30)$$

Она следует из формулы (28) и из предложения 2 работы [17].

Используя формулы (25), (26), (27), (28), легко доказать координатные аналоги теорем 1 и 2.

ТЕОРЕМА 5. Пусть G — связный граф, не содержащий отделимых подграфов, $|V_{\text{ext}}(G)| \geq 2$, и пусть $\tilde{\mathcal{H}}_0 = \mathcal{H}_0 \cap \{H \subseteq G : |V_{\text{ext}}(G) \cap V(H)| \leq 1\}$. Тогда

$$\tilde{F}_G(y; \lambda) \prod_{l \in L(G)} (1 - p^{\lambda_l + d}) \prod_{H \in \tilde{\mathcal{H}}_0} (1 - p^{\text{Ind}(H)}) \prod_{Q \in \mathcal{Q}'_0} (1 - p^{\text{Ind}(Q)})$$

— целая функция от переменных λ .

ТЕОРЕМА 6. Пусть G — связный граф, не содержащий лепестков, $m > 0$, $M < \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} F_G(q; \lambda; m, \infty) &\prod_{l \in L(G)} (1 - p^{\lambda_l + d}) \prod_{H \in \tilde{\mathcal{H}}_0} (1 - p^{\text{Ind}(H)}), \\ F_G(q; \lambda, 0, M) &\prod_{l \in L(G)} (1 - p^{\lambda_l + d}) \prod_{Q \in \mathcal{Q}'} (1 - p^{\text{Ind}(Q)}) \end{aligned}$$

– целые функции от переменных λ .

Пусть

$$p^{\lambda_l^* + d} \neq 1 \quad \text{для всех } l \in L(G) \quad (31)$$

и пусть $\lambda = \lambda^* + \varepsilon$. Условие (31) мы будем предполагать выполненным во всей оставшейся части статьи. Оно необходимо для конечности множителя $\gamma(G)$.

Определим полиномы $Y(H)$ для всех связных подграфов H графа G с помощью рекуррентной формулы

$$Y(H) = -S \sum_{\substack{\pi \in P(H), \\ |\pi| > 1}} \tilde{f}_{H|\pi}(\lambda; 1, \infty) \prod_{H' \in \pi} Y(H'). \quad (32)$$

Каждому редуцированному графу $Q = G/H$, $H \in \mathcal{P}'(G)$, сопоставим полином

$$\tilde{Y}(Q) = -S \sum_{\substack{\pi \in P(Q), \\ |\pi| < |V(Q)|}} \tilde{Y}(Q|_\pi) \prod_{H' \in \pi} \tilde{f}_{H'}(\lambda; 0, 1). \quad (33)$$

Заметим, что $\tilde{Y}(G/H) = 0$, если $H \in \mathcal{P}'(G) \setminus \mathcal{P}'(G)$.

Определим операцию R в координатном пространстве по формуле

$$R \tilde{F}_G = \sum_{\pi \in \tilde{\mathcal{P}}(G)} \tilde{F}_{G|\pi} \prod_{H \in \pi} Y(H). \quad (34)$$

$\tilde{R}$ -операция в координатном пространстве определяется как

$$\tilde{R} \tilde{F}_G = \sum_{\pi \in \mathcal{P}'(G)} \tilde{Y}(G|_\pi) \prod_{H \in \pi} \tilde{F}_H. \quad (35)$$

Положим, что $R^* \tilde{F}_G(y; \lambda) = \tilde{R} R \tilde{F}_G(y; \lambda)$, где операторы R и $\tilde{R}$ определяются по формулам (34) и (35).

ТЕОРЕМА 7. Пусть G – связный граф, выполнено условие (31) и $m > 0$, $M < \infty$. Перенормированные интегралы $R \tilde{F}_G(y; \lambda, m, \infty)$, $\tilde{R} \tilde{F}_G(y; \lambda, 0, M)$ и $R^* \tilde{F}_G(y; \lambda)$ являются мероморфными функциями ε , аналитичными при $\varepsilon = 0$. Полиномы $Y(H)$, $\tilde{Y}(H)$ имеют степень не более чем $|V(H)| - 1$. Они равны нулю, если граф H одночастично приводим или $\text{Re}(\text{Ind}(H)|_{\lambda=\lambda^*}) \neq 0$. Если граф H распадается на блоки $H_1, \dots, H_n$, то $Y(H) = \prod_{i=1}^n Y(H_i)$, $\tilde{Y}(H) = \prod_{i=1}^n \tilde{Y}(H_i)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7 полностью аналогично доказательству теорем 3, 4. Заметим, что утверждение о степени полиномов Y и $\tilde{Y}$ вытекает также из леммы 3 и следующей ниже теоремы 8, являющейся основным результатом данного раздела.

ТЕОРЕМА 8. Пусть G – связный граф и выполнено условие (31). Тогда имеет место тождественное равенство полиномов O и Y , а также полиномов $\tilde{O}$ и $\tilde{Y}$. При этом выполняются рекуррентные соотношения

$$O(H) = -S \sum_{\substack{\pi \in P(H), \\ |\pi| > 1}} f_{H|\pi}(\lambda; 1, \infty) \prod_{H' \in \pi} O(H') \quad (36)$$

для всех связанных подграфов H графа G и

$$\tilde{O}(G/H) = -S \sum_{\substack{H' \in P(G), \\ H' \subset H}} \tilde{O}(G/H') f_{H'}(\lambda; 0, 1) \quad (37)$$

для всех $H \in P'(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $p^{\lambda_l^* + d} \neq 1$, то для графа Q , состоящего из одного лепестка l , имеет место равенство $\tilde{O}(Q) = 0$. Из этого равенства и формулы (20) следует, что

$$\tilde{O}(G/H) = 0, \text{ если } H \in P'(G) \setminus P'(G). \quad (38)$$

Очевидно, что

$$g_{H'}(\lambda; 0, 1) = f_{H'}(\lambda; 0, 1). \quad (39)$$

Подставив равенства (38) и (39) в (16) получим (37).

Обозначим через $M(G)$ множество всевозможных фактор-графов подграфов графа G . Пусть $h_H(\varepsilon)$, $H \in M(G)$, — произвольные мероморфные по ε функции, принимающее нулевое значение в случае наличия лепестков у графа H . Пусть $Z(H')$, $H' \in \pi$, $\pi \in P(G)$, — некоторые полиномы от переменной ε^{-1} , причем $Z(H') = 1$, если граф H' тривиален; в противном случае свободный член полинома $Z(H')$ равен нулю. Определим оператор R_Z , действующий на функции h_H , $H \in P(G)$, по формуле

$$R_Z h_H = \sum_{\pi \in P(H)} h_{H|\pi} \prod_{H' \in \pi} Z(H') \equiv \sum_{\pi \in P(H)} h_{H|\pi} \prod_{H' \in \pi} Z(H').$$

Легко видеть, что существует единственный выбор $Z_h(H')$ полиномов $Z(H')$, при котором все функции $R_Z h_H$, $H \in P(G)$, аналитичны в окрестности $\varepsilon = 0$. Например, для функций $R f_H(\lambda; 1, \infty)$ такой выбор задается формулой (36), а для функций $R \tilde{f}_H(\lambda; 1, \infty)$ — формулой (32).

Аналогичное утверждение верно и для $\tilde{R}$ -операции. Пусть $\tilde{Z}(G/H)$, $H \in P'(G)$ — некоторые полиномы от ε^{-1} , причем $\tilde{Z} = 1$, если $H = G$; в противном случае свободный член полинома $\tilde{Z}$ равен нулю. Определим оператор $\tilde{R}_{\tilde{Z}}$, действующий на функции $h_{G/H}$, $H \in P'(G)$, по формуле

$$\tilde{R}_{\tilde{Z}} h_Q = \sum_{\pi \in P(Q)} \tilde{Z}(Q|\pi) \prod_{H' \in \pi} h_{H'}.$$

Легко видеть, что существует единственный выбор полиномов $\tilde{Z}$, при котором все функции $\tilde{R}_{\tilde{Z}} h_{G/H}$, $H \in P'(G)$, аналитичны в окрестности $\varepsilon = 0$.

Воспользуемся теперь теоремой II. 2 работы [17], утверждающей, что

$$f_G(\lambda; 0, 1) = \sum_{H \in P(G)} \tilde{f}_{G/H}(\lambda; 0, 1) \prod_{l \in L(H)} \frac{\Psi(\lambda_l + d)}{\Psi(d)}.$$

Отсюда следует, что функция

$$\tilde{R}_{\tilde{Y}} f_{G/H}(\lambda; 0, 1) = \sum_{H' \in P(G/H)} \left(\tilde{R}_{\tilde{Y}} \tilde{f}_{G/H'}(\lambda; 0, 1) \right) \prod_{l \in L(H')} \frac{\psi(\lambda_l + d)}{\Psi(d)}$$

аналитична в окрестности $\varepsilon = 0$ для всех $H \in P'(G)$. Равенство полиномов $\tilde{O}$ и $\tilde{Y}$ доказано.

В УФ-случае мы воспользуемся теоремой П. 1 работы [17], утверждающей, что

$$\tilde{f}_H(\lambda; 1, \infty) = \sum_{\pi \in P(H)} \prod_{l \in L(H|_\pi)} \frac{\psi(\lambda_l + d)}{\Psi(d)} \prod_{H' \in \pi} f_{H'}(\lambda; 1, \infty). \quad (40)$$

Используя соотношение

$$f_{H'}(\lambda; 1, \infty) = \sum_{S \in \tau(G)} g_S(\lambda; 1, \infty) \prod_{l \in L(H') \setminus L(S)} \left(\frac{\Psi(\lambda_l + d)}{\Psi(d)} \right),$$

равенство (40) можно переписать в виде

$$\tilde{f}_H(\lambda; 1, \infty) = \sum_{H' \in \mathcal{P}(H)} g_{H'}(\lambda; 1, \infty) \prod_{l \in L(H/H')} \frac{\Psi(\lambda_l + d)}{\Psi(d)}.$$

Из равенства (40) следует, что функция

$$R_{Z_f} \tilde{f}_H(\lambda; 1, \infty) = \sum_{\pi \in P(H)} \prod_{l \in L(H|_\pi)} \frac{\psi(\lambda_l + d)}{\Psi(d)} \prod_{H' \in \pi} (R_{Z_f} f_{H'}(\lambda; 1, \infty))$$

аналитична в окрестности $\varepsilon = 0$. С другой стороны,

$$R_O \tilde{f}_H(\lambda; 1, \infty) = \sum_{\pi \in P(H)} \prod_{l \in L(H|_\pi)} \frac{\psi(\lambda_l + d)}{\Psi(d)} \prod_{H' \in \pi} (R g_{H'}(\lambda; 1, \infty)).$$

Следовательно, $O(H') = Y(H') = Z_f(H')$ для всех связных подграфов H' графа G , что и требовалось доказать.

Заметим, что теорема 8 и “УФ-формулы” (29), (32), “ИК-формулы” (30), (33) дают простой путь для вычисления контрчленов в импульсном пространстве.

Автор признателен М.Д. Миссарову за замечания, способствующие улучшению стиля изложения в данном цикле работ, а также В.А. Смирнову за замечания, благодаря которым удалось усилить результат теоремы 1.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 95-01-00270) и Международного научного фонда (код гранта RHA300).

Список литературы

- [1] Владимирова В.С., Волович И.В., Зеленев Е.И. *P*-адический анализ и математическая физика. М.: Наука, 1994.
- [2] Brekke L., Freund P.G.O. // Phys. Rep. 1993. P. 2–66.
- [3] Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984.
- [4] Завьялов О.И. Перенормированные диаграммы Фейнмана. М.: Наука, 1979.
- [5] Missarov M.D. Dynamical systems and statistical mechanics, ed. Ya.G. Sinai (Adv. Sov. Math. Vol. 3, Amer. Matn. Soc., 1991). P. 143–161.
- [6] Lerner E.Yu., Missarov M.D. // Commun. Math. Phys. 1989. V. 121. P. 35–48.
- [7] Smirnov V.A. // Commun. Math. Phys. 1992. V. 149. P. 623–636.

- [8] *Смирнов В.А.* Перенормировка и асимптотические разложения фейнмановских амплитуд. М.: Изд-во МГУ, 1990.
- [9] *Smirnov V.A.* // Mod. Phys. Lett. A. 1991. V. 6. P. 1421–1427.
- [10] *Missarov M.D.* // Lett. in Math. Phys. 1993. V. 27. P. 149–154.
- [11] *Missarov M.D.* // Lett. in Math. Phys. 1994. V. 32. P. 347–356.
- [12] *Speer E.R.* // Ann. Inst. H. Poincaré. 1973. V. 23. P. 1–21.
- [13] *Блехер П.М.* Препринт ИПМ АН СССР № 117. М.: 1979 (Rep. Math. Phys. 1984. V. 19. P. 117.)
- [14] *Смирнов В.А.* // ТМФ. 1980. Т. 44. № 3. С. 307–320; 1981. Т. 46. № 2. С. 199–212.
- [15] *Аникин С.А., Завьялов О.И., Карчев Н.И.* // ТМФ. 1980. Т. 44. № 3. С. 291–306; 1981. Т. 46. № 1. С. 3–26.
- [16] *Лернер Э.Ю.* // ТМФ. 1995. Т. 102. № 3. С. 367–377.
- [17] *Лернер Э.Ю.* // ТМФ. 1995. Т. 104. № 3. С. 371–392.
- [18] *Татт У.Т.* Теория графов. М.: Мир, 1988.
- [19] *Смирнов В.А., Четыркин К.Г.* Препринт НИИЯФ МГУ 89-2/79. М., 1989.

Казанский государственный
университет

Поступила в редакцию
4.IV.1995 г.

E. Yu. Lerner

FEYNMAN INTEGRALS OF p -ADIC ARGUMENT IN MOMENTUM SPACE. III. RENORMALIZATION

The ultraviolet and infrared sequences of the poles for the massless Feynman integrals of p -adic argument with the arbitrary power of propagators are found. Within the framework of MS-scheme for the analytic R^* -operation it is proved that the renormalized amplitudes are finite. Simple formulas for the calculation of counterterms (vertex parts) in coordinate and momentum spaces are given.