Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Е. Шишанин, Применение асимптотических методов к исследованию свойств синхротронного излучения с учетом бетатронных колебаний, *ТМФ*, 1996, том 106, номер 2, 285–299

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1114>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 14:14:28

О. Е. Шишанин

ПРИМЕНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ К ИССЛЕДОВАНИЮ СВОЙСТВ СИНХРОТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С УЧЕТОМ БЕТАТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Рассмотрены динамика и магнитотормозное излучение электрона в периодических магнитных системах с прямолинейными промежутками. Предложены способы решения соответствующих дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Показано, что угловые характеристики синхротронного излучения существенно зависят от параметров магнитной структуры ускорителей.

ВВЕДЕНИЕ

Влияние бетатронных колебаний на формирование синхротронного света было рассмотрено, в частности, в работе [1], где задача была решена для кругового аксиально-симметричного магнитного поля.

Переход к переменным магнитным системам FD (фокусировка–дефокусировка) в [2, 3] потребовал аналитического описания движения частицы, пригодного для всей замкнутой орбиты, что привело к значительным трудностям. Вследствие этого изучение данного вопроса заняло длительное время и свелось к трем этапам.

Вначале нужно было найти сравнительно простую систему дифференциальных уравнений, адекватно описывающую сложное движение заряженной частицы хотя бы на одном периоде системы, с тем чтобы задача об излучении была доведена до конца. Существующие методы давали аналитические выражения на отдельных участках периода и их нужно было “сшивать” [4] или, как, например, метод бетатронных функций, сводились в основном к численным расчетам. Причем, начиная с классической работы Куранта и Снайдера [5] и кончая современными обзорами [6–8], теория для линейных уравнений не претерпела каких-либо изменений.

Наиболее приемлемым оказался способ разложения градиента или компонент магнитного поля в ряд Фурье [9]. Такой прием позволяет перейти от набора обыкновенных дифференциальных уравнений для отдельных элементов орбиты к одному уравнению типа Хилла. Оказалось, что этот подход имеет и более глубокий физический смысл, поскольку, по-видимому, близко определяет “средний” путь частицы, который она выбирает при таких экстремальных условиях.

Второй этап заключался в разработке методов решения полученных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Здесь теорию усреднения [10] необходимо было дополнить до третьего и четвертого порядков точности, которые бы гарантировали необходимую точность расчетов по излучению. Кроме того, в рамках теории возмущений [11] была найдена процедура, которая приводила к тем же результатам, что и метод усреднения. Это подтвердило надежность обоих подходов.

Наконец, с помощью операторного метода Ю.Швингера [12, 13] и способа перевала удалось получить спектрально-угловые распределения интенсивности излучения в первом квантовом приближении.

1. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ

Пусть электрон движется в периодическом магнитном поле $H = b r^{-n}$ (b – константа, n – градиент поля) по замкнутой орбите из N элементов, где один элемент состоит последовательно из фокусирующего участка дуги длиной a и с градиентом поля n_1 , затем прямолинейного промежутка длиной l_1 , дефокусирующего магнита с градиентом n_2 и снова свободного промежутка длиной l_2 . Это один из вариантов модели FODO, где O означает участок без поля.

Обозначим радиусы кривизны магнитов R . Тогда $a = \pi R/N$ и длина всей орбиты

$$S = 2\pi R + Nl_1 + Nl_2 = 2\pi R_0,$$

где R_0 – так называемый средний радиус. Будем считать отношение длин свободных пробегов и магнитов $k = (l_1 + l_2)/2a$ малым параметром. Тогда $R_0 = R(1 + k)$, а период системы по азимутальному углу φ определится как $T = 2\pi/N$.

Градиент магнитного поля $n(\varphi)$ можно рассматривать как ступенчатую функцию с разрывами первого рода. Раскладывая ее в ряд Фурье, получим

$$n(\tau) = \frac{a(n_1 - n_2)}{L} + \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} g_{\nu}(n_1 \cos \nu \tau_1 - n_2 \cos \nu \tau_2), \quad (1)$$

где $\tau = N\varphi$,

$$g_{\nu} = \sin \pi \nu \frac{a}{L} / \nu, \quad L = 2a + l_1 + l_2, \quad \tau_1 = \tau - \frac{\pi a}{L}, \quad \tau_2 = \tau - \pi \frac{3a + 2l_1}{L}.$$

Следует заметить, что в выражении (1) физически более оправданным был бы, возможно, переход от ряда к частичной сумме, поскольку на границе магнита возникают краевые эффекты и переход от значения n_1 к n_2 будет более плавный. Здесь, например при $\varphi = 0$, получаем в соответствии с теоремой Дирихле, что $n(\tau) = n_1/2$; при $\varphi = (3a/2 + l_1)/L(2\pi/N)$ (середина второго магнита) будет $n(\tau) = -n_2$ и т.д.

В конечном итоге уравнения малых бетатронных колебаний в линейном приближении примут вид

$$\frac{d^2 \rho}{d\tau^2} + \frac{1}{N^2} (1 - (1 + k)^2 n(\tau)) \rho = 0, \quad (2)$$

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} + \frac{(1 + k)^2}{N^2} n(\tau) z = 0, \quad (3)$$

где $\rho = r - R_0$.

Что касается основного орбитального движения частицы, то здесь имеются особенности, связанные с переходом от вращения на прямолинейную траекторию и наоборот. Поскольку на свойства излучения влияют только вертикальные колебания (см. ниже), то внесем ряд упрощений. Усредним ведущее магнитное поле H_0 по всему периоду системы и будем считать, что электрон вращается со средним радиусом R_0 .

Угловую скорость после этого можно выразить следующим образом:

$$\dot{\varphi} = \frac{\omega_0}{1+k} \left[1 - \frac{\rho}{R_0} + \frac{3}{2} \frac{\rho^2}{R_0^2} + \int n(\varphi) \left(\frac{z\dot{z}}{R^2} - \frac{\rho\dot{\rho}}{R^2} \right) dt \right], \quad (4)$$

где $\omega_0 = ceH_0/E$.

2. МЕТОД БОГОЛЮБОВА–МИТРОПОЛЬСКОГО

Согласно теории усреднения [10] представим уравнение (3) в стандартной форме:

$$\frac{dZ}{d\tau} = \varepsilon \cdot G \cdot Z, \quad (5)$$

где компоненты вектора Z равны z и $(1/\varepsilon)dz/d\tau$, а

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g(\tau) & 0 \end{pmatrix}, \quad g(\tau) = (1+k)^2 n(\tau),$$

малый параметр $\varepsilon = 1/N$.

Можно рассмотреть более общее матричное уравнение вида

$$dZ/d\tau = \varepsilon \cdot Y(\tau, Z).$$

Для функции $Y(\tau, Z)$ определяется операция усреднения как

$$\langle Y(\tau, Z) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T Y(\tau, Z) d\tau \quad (6)$$

и вводится интегрирующий оператор

$$\tilde{Y}(\tau, \xi) = \int [Y(\tau, \xi) - \langle Y(\tau, \xi) \rangle] d\tau.$$

Вектор ξ находится из системы

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \varepsilon \langle Y(\tau, \xi) \rangle,$$

а первое приближение определяется как

$$Z(\tau) = \xi(\tau) + \varepsilon \tilde{Y}(\tau, \xi).$$

Интересно отметить, что линейная система (5) оказалась системой дифференциальных уравнений Каратеодори [14, 15]. Действительно, матрица $G(\tau)$ определена и непрерывна при почти всех τ , кроме точек, образующих множество меры нуль; кроме того, видим, что она ограничена. Таким образом, элементы матрицы суммируемы на каждом отрезке, содержащемся в интервале $(0, 2\pi)$. Тогда согласно теореме 3 гл. I из [15], решение системы (5) с любым начальным условием $Z(\tau_0) = Z_0$ существует на всем интервале $(0, 2\pi)$. Так как здесь

$$|Y(\tau, Z_2) - Y(\tau, Z_1)| \leq |G| \cdot |Z_2 - Z_1|,$$

т.е. условие Липшица выполняется, то данное решение будет и единственным. Это объясняет, почему произвольный выбор начальной точки можно использовать и при матричном способе расчета траектории, где перемножаются матрицы каждой структуры и происходит возврат в начальную точку.

Вернемся к общему методу, который в [4] был расписан до второго приближения. Используя способ итерации, когда последовательно добавляется новая поправка, можно описать любое приближение.

Если взять первые четыре порядка, то получим, что

$$Z(\tau) = \xi + \sum_{i=1}^4 \varepsilon^i Y_i, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} Y_1 &= \widetilde{Y}, \quad Y_2 = \widetilde{\frac{\partial Y}{\partial \xi} Y_1} - \int \frac{\partial Y_1}{\partial \xi} d\tau \langle Y \rangle, \\ Y_3 &= \widetilde{\frac{\partial Y}{\partial \xi} Y_2} - \int \frac{\partial Y_1}{\partial \xi} d\tau \left\langle \frac{\partial Y}{\partial \xi} Y_1 \right\rangle - \int \frac{\partial Y_2}{\partial \xi} d\tau \langle Y \rangle, \\ Y_4 &= \widetilde{\frac{\partial Y}{\partial \xi} Y_3} - \int \frac{\partial Y_1}{\partial \xi} d\tau \left\langle \frac{\partial Y}{\partial \xi} Y_2 \right\rangle - \\ &\quad - \int \frac{\partial Y_2}{\partial \xi} d\tau \left\langle \frac{\partial Y}{\partial \xi} Y_1 \right\rangle - \int \frac{\partial Y_3}{\partial \xi} d\tau \langle Y \rangle. \end{aligned}$$

Согласно [10] погрешность данного приближения будет ε^5 . Положим теперь $Y(\tau, Z) = G \cdot Z$. Тогда из (7) найдем, что

$$Z(\tau) = \left(1 + \sum_{i=1}^4 \varepsilon^i G_i \right) \xi, \quad (8)$$

где

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \varepsilon \left\langle G \left(1 + \sum_{i=1}^4 \varepsilon^i G_i \right) \right\rangle \xi. \quad (9)$$

Процедуру дифференцирования по вектору ξ можно проиллюстрировать следующим примером:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} Y(\tau, \xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} (g_{11} \xi_1 + g_{12} \xi_2) & \frac{\partial}{\partial \xi_2} (g_{11} \xi_1 + g_{12} \xi_2) \\ \frac{\partial}{\partial \xi_1} (g_{21} \xi_1 + g_{22} \xi_2) & \frac{\partial}{\partial \xi_2} (g_{21} \xi_1 + g_{22} \xi_2) \end{pmatrix} = G.$$

Матрицы G_i примут вид:

$$\begin{aligned} G_1 &= \widetilde{G}, & G_2 &= \widetilde{G\widetilde{G}_1} - \widetilde{G}_1 \langle G \rangle, \\ G_3 &= \widetilde{G\widetilde{G}_2} - \widetilde{G}_1 \langle GG_1 \rangle - \widetilde{G}_2 \langle G \rangle, \\ G_4 &= \widetilde{G\widetilde{G}_3} - \widetilde{G}_1 \langle GG_2 \rangle - \widetilde{G}_2 \langle GG_1 \rangle - \widetilde{G}_3 \langle G \rangle. \end{aligned}$$

Через функцию $g(\tau)$ они выразятся следующим образом:

$$\begin{aligned} G_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\widetilde{g} & 0 \end{pmatrix}, & G_2 &= \begin{pmatrix} -\widetilde{\widetilde{g}} & 0 \\ 0 & \widetilde{\widetilde{g}} \end{pmatrix}, \\ G_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 2\widetilde{\widetilde{g}} \\ \widetilde{\widetilde{g\widetilde{g}}} + \gamma_{z1}^2 \widetilde{\widetilde{g}} & 0 \end{pmatrix}, & G_4 &= \begin{pmatrix} \widetilde{\widetilde{g\widetilde{g}}} + 3\gamma_{z1}^2 \widetilde{\widetilde{g}} & 0 \\ 0 & -2\widetilde{\widetilde{g\widetilde{g}}} - \widetilde{\widetilde{g\widetilde{g}}} - \gamma_{z1}^2 \widetilde{\widetilde{g}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь $\gamma_{z1}^2 = (n_1 - n_2)(1 + k)/2$, причем

$$\begin{aligned} g(\tau) &= \gamma_{z1}^2 + \frac{2(1+k)^2}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} g_{\nu} (n_1 \cos \nu \tau_1 - n_2 \cos \nu \tau_2), \\ \langle g(\tau) \rangle &= \gamma_{z1}^2, & \widetilde{g(\tau)} &= \frac{2(1+k)^2}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{g_{\nu}}{\nu} (n_1 \sin \nu \tau_1 - n_2 \sin \nu \tau_2) \end{aligned}$$

и т. д. Из (9) получим, что

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} = -\frac{1}{N^2} \left[\gamma_{z1}^2 - \frac{1}{N^2} \langle \widetilde{g\widetilde{g}} \rangle + \frac{1}{N^4} \langle \widetilde{g\widetilde{g\widetilde{g}}} + 3\gamma_{z1}^2 \widetilde{\widetilde{g\widetilde{g}}} \rangle \right] \cdot \xi.$$

Обозначим в последнем выражении квадратную скобку через ν_z^2 . Тогда $\xi = B \cos(\frac{\nu_z}{N} \tau + \psi)$, где B и ψ — произвольные константы, а квадрат частоты

$$\nu_z^2 = \frac{n_1 - n_2}{2} (1 + k) + \frac{\pi^2}{N^2} \frac{N_1}{48} + \frac{\pi^4}{N^4} \frac{(n_1 - n_2) N_2}{5 \cdot 48(1 + k)}, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} N_1 &= (n_1^2 + n_2^2)(1 + 2k)^2 + 2n_1 n_2 (1 + 4k + 4k_1 k_2 - k_1^2 - k_2^2), \\ N_2 &= (n_1 + n_2)^2 \left(1 + 6k + \frac{2}{3} k^2 (19 + 16k + 4k^2) \right) + n_1 n_2 N_3, \\ N_3 &= -\frac{32}{3} k^2 (1 + 4k + k^2) + 10k_1 k_2 (1 + 4k + k_1 k_2), \end{aligned}$$

а $k_1 = l_1/a$, $k_2 = l_2/a$. Подробная формула (10) может служить иллюстрацией эффективности метода.

Подставляя G_i в матричное равенство (8), найдем решение исходного уравнения (3) в виде

$$z = \left[1 - \frac{1}{N^2} \tilde{g} + \frac{1}{N^4} \left(\tilde{g}\tilde{g} + 3\gamma_{z1}^2 \tilde{g} \right) \right] \cdot \xi + \frac{2}{N^3} \cdot \tilde{g} \cdot \frac{d\xi}{d\varphi}.$$

Окончательно асимптотика запишется с точностью $1/N^4$ как

$$z = B \cos \left(\frac{\nu_z}{N} \tau + \psi \right) (1 + S_1 + \gamma_{z1}^2 S_2 + S_3) + B \sin \left(\frac{\nu_z}{N} \tau + \psi \right) \gamma_{z1} S_4, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{2(1+k)^2}{\pi N^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{g_\nu}{\nu^2} (n_1 \cos \nu \tau_1 - n_2 \cos \nu \tau_2), \\ S_2 &= \frac{8(1+k)^2}{\pi N^4} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{g_\nu}{\nu^4} (n_1 \cos \nu \tau_1 - n_2 \cos \nu \tau_2), \\ S_3 &= \frac{(1+k)^4}{2\pi^2 N^4} \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} (g_\nu^2 / \nu^4) (n_1^2 \cos 2\nu \tau_1 + n_2^2 \cos 2\nu \tau_2 - 2n_1 n_2 \cos 2\nu \tau_3) + \right. \\ &\quad + 4 \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{g_\mu}{\mu^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu \left[n_1^2 \left(\frac{\cos \mu_+ \tau_1}{\mu_+^2} + \frac{\cos \mu_- \tau_1}{\mu_-^2} \right) + n_2^2 \left(\frac{\cos \mu_+ \tau_2}{\mu_+^2} + \frac{\cos \mu_- \tau_2}{\mu_-^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. \left. - 2n_1 n_2 \left(\cos \mu_+ \pi \frac{a+l_1}{L} \cdot \frac{\cos \mu_- \tau_3}{\mu_-^2} + \cos \mu_- \pi \frac{a+l_1}{L} \cdot \frac{\cos \mu_+ \tau_3}{\mu_+^2} \right) \right] \right\}, \quad \mu \neq \nu; \\ S_4 &= \frac{4(1+k)^2}{\pi N^3} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{g_\nu}{\nu^3} (n_1 \sin \nu \tau_1 - n_2 \sin \nu \tau_2), \\ \tau_3 &= \tau - \pi \frac{2a+l_1}{L}, \quad \mu_+ = \mu + \nu, \quad \mu_- = \mu - \nu. \end{aligned}$$

Перейдем к уравнению (2). Здесь будут свои особенности. В частности, $\gamma_{\rho 1} = 1 - \gamma_{z1}^2$,

$$\begin{aligned} G &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1+g & 0 \end{pmatrix}, \quad G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{g} & 0 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} \tilde{g} & 0 \\ 0 & -\tilde{g} \end{pmatrix}, \\ G_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -2\tilde{g} \\ \tilde{g}\tilde{g} - (1+\gamma_{\rho 1}^2)\tilde{g} & 0 \end{pmatrix}, \quad G_4 = \begin{pmatrix} \tilde{g}\tilde{g} - (1+3\gamma_{\rho 1}^2)\tilde{g} & 0 \\ 0 & (3+\gamma_{\rho 1}^2)\tilde{g} - 2\tilde{g}\tilde{g} - \tilde{g}\tilde{g} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Уравнение для ξ будет иметь вид

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + \frac{\nu_\rho^2}{N^2} \xi = 0,$$

где $\xi = A \cos\left(\frac{\nu_\rho}{N}\tau + \chi\right)$, а квадрат частоты

$$\nu_\rho^2 = \gamma_{\rho 1}^2 - \frac{1}{N^2} \langle g\tilde{g} \rangle - \frac{1}{N^4} \left\langle g\tilde{g}\tilde{g} - (1 + 3\gamma_{\rho 1}^2)\tilde{g}\tilde{g} \right\rangle,$$

или после усреднения

$$\nu_\rho^2 = 1 - \frac{n_1 - n_2}{2}(1 + k) + \frac{\pi^2}{N^2} \frac{N_1}{48} + \frac{\pi^4}{N^4} \frac{(2 - (1 + k)(n_1 - n_2))N_2}{5 \cdot 48(1 + k)^2}. \quad (12)$$

В общем виде решение выглядит следующим образом:

$$\rho = \left[1 + \frac{1}{N^2} \tilde{g} + \frac{1}{N^4} \left(\tilde{g}\tilde{g} - (1 + 3\gamma_{\rho 1}^2)\tilde{g}\tilde{g} \right) \right] \cdot \xi - \frac{2}{N^3} \cdot \tilde{g} \cdot \frac{d\xi}{d\varphi},$$

или

$$\rho = A \cos\left(\frac{\nu_\rho}{N}\tau + \chi\right) (1 - S_1 - \gamma_{\rho 1}^2 S_2 + S_3) - A \sin\left(\frac{\nu_\rho}{N}\tau + \chi\right) \gamma_{\rho 1} S_4. \quad (13)$$

Если в асимптотических выражениях (11), (13) провести усреднение по быстрым осцилляциям, то останутся только первые слагаемые. Следовательно, A и B можно трактовать как амплитуды основных косинусоидальных колебаний, а χ и ψ — как их начальные фазы.

Однако дополнительные члены показывают, насколько это движение частицы является сложным. По-видимому, наглядно такую траекторию в какой-то степени иллюстрирует рис. 22 в [16].

Заметим, что все полученные результаты верны и для протона, только в (4) справа нужно изменить знак.

В формулах (11), (13) отсутствуют расходящиеся гиперболические функции, что находится в соответствии с принципом сильной фокусировки, приводящей к устойчивости движения в целом.

Имеющиеся здесь ряды или выражаются через многочлены Бернулли $B_i(x)$ или являются настолько быстро сходящимися, что могут быть найдены численно. Например, в первом случае

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{g_\nu}{\nu^2} (n_1 \cos \nu \tau_1 - n_2 \cos \nu \tau_2) &= \frac{\pi^3}{3} \left[n_1 \left(B_3\left(\frac{\tau}{2\pi}\right) - B_3\left(\frac{\tau}{2\pi} - \frac{a}{L}\right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + n_2 \left(B_3\left(\frac{\tau}{2\pi} - \frac{2a + l_1}{L}\right) - B_3\left(\frac{\tau}{2\pi} - \frac{a + l_1}{L}\right) \right) \right], \\ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{g_\nu}{\nu^3} (n_1 \sin \nu \tau_1 - n_2 \sin \nu \tau_2) &= \frac{\pi^4}{6} \left[n_1 \left(B_4\left(\frac{\tau}{2\pi}\right) - B_4\left(\frac{\tau}{2\pi} - \frac{a}{L}\right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + n_2 \left(B_4\left(\frac{\tau}{2\pi} - \frac{2a + l_1}{L}\right) - B_4\left(\frac{\tau}{2\pi} - \frac{a + l_1}{L}\right) \right) \right]. \end{aligned}$$

Здесь для аргументов многочленов $x \in [0, 2\pi]$; если это условие не выполняется, то нужно переходить к другому периоду. Таким образом, вопрос о сходимости отдельных слагаемых в асимптотиках не вызывает сомнений.

Для изучения этого вопроса в целом нужно снова обратиться к уравнению (5), где $G \cdot Z = Y(\tau, Z)$.

Вектор-функция $Y(\tau, Z)$ удовлетворяет условиям Каратеодори существования непрерывного решения, так как она измерима по τ при каждом фиксированном Z и непрерывна по Z при каждом фиксированном τ . Для этой функции и ее усредненного значения

$$\langle Y(\tau, \xi) \rangle = \langle G \rangle \cdot \xi$$

выполняется условие Липшица. Кроме того, можно показать, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{Y}(\tau, Z) d\tau = 0.$$

Таким образом, все условия теоремы 1.1 из монографии [17] выполняются, а это говорит о близости решений z и ξ начальной и усредненной систем.

3. ТЕХНИКА ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Попытаемся теперь найти выражение (11) другим способом. Будем искать решение уравнения (3) в виде $z = \exp(i\gamma_z \tau) \cdot \varphi_z(\tau)$, где $\varphi_z(\tau)$ – периодическая функция. Поскольку нас интересует движение только внутри стабильной области, называемой “галстуком” устойчивости, то будем считать, что $\text{Im } \gamma_z = 0$. Аналогичное условие нужно добавить и для γ_ρ . Рассматриваемый подход близок к методам Уиттекера и растянутых параметров для уравнения Матье в монографии [11].

Для функции $\varphi_z(\tau)$ получим новое дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 \varphi_z}{d\tau^2} + 2i\gamma_z \frac{d\varphi_z}{d\tau} + \left[\frac{(1+k)^2 n(\tau)}{N^2} - \gamma_z^2 \right] \varphi_z = 0,$$

решение которого определим в виде следующих асимптотических рядов:

$$\varphi_z(\tau) = \varphi_0(\tau) + \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(\tau)/N^i, \quad \gamma_z = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_{zi}/N^i.$$

Роль малого параметра по-прежнему играет величина $1/N$.

Приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых степенях параметра, приходим к следующей цепочке уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_0 &= 0, \quad \ddot{\varphi}_1 + 2i\gamma_{z1}\dot{\varphi}_0 = 0, \\ \ddot{\varphi}_2 + 2i(\gamma_{z1}\dot{\varphi}_1 + \gamma_{z2}\dot{\varphi}_0) + ((1+k)^2 n(\tau) - \gamma_{z1}^2)\varphi_0 &= 0, \\ \ddot{\varphi}_3 + 2i(\gamma_{z1}\dot{\varphi}_2 + \gamma_{z2}\dot{\varphi}_1 + \gamma_{z3}\dot{\varphi}_0) + ((1+k)^2 n(\tau) - \gamma_{z1}^2)\varphi_1 - 2\gamma_{z1}\gamma_{z2}\varphi_0 &= 0 \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Согласно [10, 11] в решениях этих уравнений нужно исключать секулярные члены. В теории усреднения это соответствует тому, что предел справа в (6) существует.

Тогда из первых двух уравнений получим, что $\varphi_0 = b$, $\varphi_1 = b_1$, где b, b_1 – константы. Из третьего выражения вытекает равенство $\gamma_{z1}^2 = (n_1 - n_2)(1 + k)/2$. Само решение запишется как

$$\varphi_2 = b \frac{2(1+k)^2}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{g_{\nu}}{\nu^2} (n_1 \cos \nu \tau_1 - n_2 \cos \nu \tau_2).$$

Затем последовательно найдем

$$\begin{aligned} \gamma_{z2} &= 0, \\ \varphi_3 &= -i\gamma_{z1} b \frac{4(1+k)^2}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{g_{\nu}}{\nu^3} (n_1 \sin \nu \tau_1 - n_2 \sin \nu \tau_2) + \frac{b_1}{b} \varphi_2, \quad \gamma_{z3} = \frac{\pi^2 N_1}{96\gamma_{z1}}, \\ \varphi_4 &= \gamma_{z1}^2 b N^2 S_2 - i\gamma_{z1} b_1 N^3 S_4 + b N^4 S_3, \quad \gamma_{z4} = 0 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Квадрат частоты $\nu_z = N\gamma_z$ определится как $\nu_z^2 = \gamma_{z1}^2 + 2\gamma_{z1}\gamma_{z3}/N^2$. Подставляя сюда γ_{z1} и γ_{z3} , получим формулу (10) с точностью до $1/N^2$. Если в выражении для ν_z положить $n_1 = n_2$ и $l_1 = l_2$, то набег фазы $\mu_z = 2\pi\nu_z/N$ совпадет с формулой (6.17) из [9].

Общее решение можно построить в виде

$$z = C \exp(i\gamma_z \tau) \cdot \varphi_z(\tau) + C^* \exp(-i\gamma_z \tau) \cdot \varphi_z^*(\tau).$$

Переобозначив произвольные постоянные как $C \cdot (b + b_1/N) = (B/2) \cdot \exp(i\psi)$, снова придем к выражению (11).

Частоту (12) и асимптотику (13) можно получить аналогичным образом, если решение уравнения (2) искать в виде $\rho = \exp(i\gamma_{\rho} \tau) \cdot \varphi_{\rho}(\tau)$.

Оказывается, параметром разложения в формулах (11), (13) является n/N^2 . Например, для синхротрона DESY он равен 0.15. Поправка следующего порядка будет около 2%.

Если квадрат полной скорости усреднить по периоду, то получим, что

$$\langle v^2 \rangle = R_0^2 \left(\frac{\omega_0}{1+k} \right)^2 \left(1 + \nu_{\rho}^2 \frac{A^2}{R_0^2} + \nu_z^2 \frac{B^2}{R_0^2} \right).$$

В соответствии с [18] угловая частота обращения ω_0 становится меньше в $1 + k$ раз из-за влияния прямолинейных промежутков.

По итогам последних двух разделов можно сформулировать следующую теорему.

ТЕОРЕМА. *Приближенные решения, найденные для уравнений (2) и (3) методом усреднения и способом возмущений, предложенным в этом разделе, для всех порядков приводят к одинаковому результату.*

Доказательство можно провести, например, методом индукции.

4. ОСОБЕННОСТИ СИНХРОТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Рассмотрим теперь вопросы, связанные с излучением электрона в такой системе. Наиболее полно поляризационные и спектральные свойства синхротронного излучения в однородном и слабофокусирующем магнитном полях рассмотрены в монографиях [19–20]. В данном случае будем использовать так называемую операторную формулировку квазиклассического приближения [12, 13].

Если пренебречь квантованием движения электрона в магнитном поле и учесть только квантовую отдачу при испускании фотона (они отличаются в $(m_0 c^2 / E)^3$ раз), то вероятность излучения можно получить в виде

$$dw = \frac{d^3 \kappa}{(2\pi)^3} \frac{ce^2 \nu'}{R h \omega \nu} \int dt_1 \int dt_2 (\mathbf{v}_2 \mathbf{e})(\mathbf{v}_1 \mathbf{e}^*) \exp \left[i \frac{\nu'}{\nu} (\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - \omega(t_2 - t_1)) \right],$$

где $\mathbf{e}$ – единичный вектор поляризации фотона, $\nu' = \nu(1 + h\omega/E)$, ν – номер гармоники, частота излучения $\omega = \nu\omega_0/(1+k)$. Классический радиус-вектор электрона $\mathbf{r} = \{R_0 \cos \varphi, R_0 \sin \varphi, z\}$ и скорость $\mathbf{v} = c\boldsymbol{\beta}$ определим, используя результаты предыдущих разделов.

Направление импульса фотона без нарушения общности зададим в плоскости YZ вектором $\mathbf{n} = \{0, \sin \theta, \cos \theta\}$, где θ – сферический угол, а $\kappa = (\nu/c)\omega_0/(1+k)$. Компоненты линейной поляризации (в плоскости орбиты и перпендикулярно ей) определим векторами

$$\mathbf{e}_\sigma = \{1, 0, 0\}, \quad \mathbf{e}_\pi = \{0, \cos \theta, -\sin \theta\}.$$

Соответствующие формулы для интенсивности излучения можно представить как

$$\begin{aligned} \frac{dW_\sigma}{d^3 \kappa} &= \frac{c^3 e^2 \nu'}{(2\pi)^3 R_0 \nu} \left| \int dt \cdot \beta_x \exp \left(i \frac{\nu'}{\nu} (\omega t - \boldsymbol{\kappa} \mathbf{r}) \right) \right|^2, \\ \frac{dW_\pi}{d^3 \kappa} &= \frac{c^3 e^2 \nu'}{(2\pi)^3 R_0 \nu} \left| \int dt \cdot (\beta_y \cos \theta - \beta_z \sin \theta) \exp \left(i \frac{\nu'}{\nu} (\omega t - \boldsymbol{\kappa} \mathbf{r}) \right) \right|^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Следует подчеркнуть, что излучение в данном направлении снимается с малого участка траектории, определяемого углом $\varphi \approx \omega_0 t/(1+k)$, и вблизи плоскости орбиты ($\cos^2 \theta \sim 1 - \beta^2$). Малыми параметрами также являются A^2/R_0^2 , B^2/R_0^2 .

Ограничиваясь членами, пропорциональными $1/N^2$, составляющие скорости в ультрарелятивистском случае найдем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \beta_x &\approx -\frac{\omega_0 t}{1+k} + \frac{A}{R_0} \left[\left(\frac{1 - \nu_\rho^2}{\nu_\rho} - \nu_\rho \frac{\pi^2 n_4}{12 N^2 (1+k)} \right) \sin \chi - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\pi n_3}{4N} - \frac{\pi^3 n_5}{48 N^2 (1+k)^2} \right) \cos \chi \right], \\ \beta_y &\approx 1, \quad \beta_z \approx \frac{B}{R_0} \left[\frac{\pi n_3}{4N} \cos \psi - \nu_z \sin \psi \left(1 - \frac{\pi^2 n_4}{12 N^2 (1+k)} \right) \right], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} n_3 &= n_1(1 + 2k) + n_2(1 + 2k_1 - 2k), \\ n_4 &= n_1k(1 + 2k) + n_2(5k - 3k_1 + 3k_1k_2 - 2k^2), \\ n_5 &= n_1(1 + 4k + 4k^2) + n_2(1 + 4k - 12k^2 + 20kk_1 - 6k_1^2 + \\ &\quad + 12kk_1^2 - 8k^2k_1 - 4k_1^3). \end{aligned}$$

Кроме того, нужно проинтегрировать выражение (4) для нахождения φ и определить параметр $R\omega_0/c$ из формулы для полной скорости. Это дает возможность найти величину

$$\omega t - \kappa \mathbf{r} \approx \nu \left[\omega_0 t - \frac{\omega_0}{c} (R_0 + \rho) \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6} \right) \sin \theta - \frac{\omega_0}{c} z \cos \theta \right].$$

Применяя подстановку $\omega_0 t_1 = -\beta_x$ при вычислении интегралов в формулах (14) и проводя усреднение по начальной фазе ψ (частицы инжектируются в основной ускоритель в течение одного или нескольких оборотов [4]), спектрально-угловые распределения компонент линейной поляризации можно представить окончательно в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{dW_\sigma(\nu)}{d\Omega} &= \frac{ce^2\nu\nu'}{12\pi^4 R_0^2} \int_0^{2\pi} d\psi \cdot \epsilon_1^2 K_{2/3}^2 \left(\frac{\nu'}{3} \epsilon_1^{3/2} \right), \\ \frac{dW_\pi(\nu)}{d\Omega} &= \frac{ce^2\nu\nu'}{12\pi^4 R_0^2} \int_0^{2\pi} d\psi \cdot \epsilon_1 \epsilon_2 K_{1/3}^2 \left(\frac{\nu'}{3} \epsilon_1^{3/2} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $\epsilon_1 = 1 - \beta^2 + \epsilon_2$, $\epsilon_2 = \left(\cos \theta - \nu_{ver} \frac{B}{R_0} \cos(\psi + \psi_0) \right)^2$, где

$$\nu_{ver} = \nu_z \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{2N^2} \left(\frac{n_3^2}{8\nu_z^2} - \frac{n_4}{3(1+k)} \right)}, \quad \cos \psi_0 = \frac{\pi n_3}{4N\nu_{ver}}.$$

В формулах (15) уже нет зависимости от малых радиальных колебаний. Это объясняется тем, что направление узкого конуса излучения мало изменяется при добавлении к R_0 величины ρ , в то время как координата z , подчиняясь в основном синусоидальному закону движения, резко меняет направление касательной вверх и вниз. Смещение ψ_0 не оказывает влияния на свойства излучения, после интегрирования по ψ оно исчезает. Можно перейти к более простой модели FODO, когда $l_1 = l_2$. Если еще и $n_1 = n_2$, то получим

$$\nu_z = \frac{\pi n}{2N} \sqrt{\frac{1 + 4k + 3k^2}{3}}, \quad n_3 = 2n(1 + k), \quad n_4 = 3nk(1 + k).$$

Если сделать переход от модифицированных функций Бесселя к функции Эйри и ее производной, то последние согласно таблицам [21] можно разложить в ряд по аргументам. Это дает возможность провести в (15) интегрирование по ψ . Кроме того, с ростом

угла, отсчитываемого от плоскости орбиты, можно провести разложение по параметру $(\nu_{ver} B/R_0)^2/\epsilon$, где $\epsilon = 1 - \beta^2 \sin^2 \theta$.

Для наглядности результатов во втором случае формулы (15) с точностью до $q^2 = \nu_{ver}^2 (B^2/R_0^2)/2\epsilon$ можно представить в классическом приближении как

$$\begin{aligned} \frac{dW_\sigma(\nu)}{d\Omega} &= \frac{ce^2\epsilon^2\nu^2}{6\pi^3 R_0^2} \left[K_{2/3}^2 + q^2\epsilon \cos^2 \theta \nu^2 (K_{1/3}^2 + K_{2/3}^2) - \right. \\ &\quad \left. - q^2\sqrt{\epsilon}\nu(1 + 2\cos^2 \theta/\epsilon)K_{1/3}K_{2/3} \right], \\ \frac{dW_\pi(\nu)}{d\Omega} &= \frac{ce^2\epsilon\nu^2}{6\pi^3 R_0^2} \left[(\cos^2 \theta + q^2)K_{1/3}^2 + q^2\epsilon \cos^4 \theta \nu^2 (K_{1/3}^2 + K_{2/3}^2) - \right. \\ &\quad \left. - 5q^2\sqrt{\epsilon}\cos^2 \theta \nu K_{1/3}K_{2/3} \right], \end{aligned} \quad (16)$$

где $K_i = K_i(\nu\epsilon^{3/2}/3)$.

Эти выражения перейдут в соответствующие формулы для однородного магнитного поля, если положить $q^2 = 0$ и заменить R_0 на R . Полученные выражения (15), (16) позволяют построить теоретические кривые для конкретных установок, хотя, по-видимому, до сих пор соответствующие эксперименты (в отличие от слабофокусирующих магнитных полей) не проводились.

Роль бетатронных колебаний сводится к тому, что пики σ - и π -компонент излучения становятся более низкими по сравнению с соответствующим случаем для однородного магнитного поля, а минимум π -компоненты в плоскости орбиты ($\cos \theta = 0$) отличается от нуля и с ростом амплитуды вертикальных колебаний может превратиться в максимум. Такая же картина наблюдается и для угловых распределений, если в формулах (15) провести суммирование по всему спектру.

Тогда получим, что

$$\begin{aligned} \frac{dW_\sigma}{d\Omega} &= \frac{7ce^2}{64\pi^2 R_0^2} \int_0^{2\pi} d\psi \left(\frac{1}{\epsilon_1^{5/2}} - \frac{320}{7\sqrt{3}\pi} \frac{1}{\epsilon_1^4} \frac{h\omega_0}{E} \right), \\ \frac{dW_\pi}{d\Omega} &= \frac{5ce^2}{64\pi^2 R_0^2} \int_0^{2\pi} d\psi \epsilon_2 \left(\frac{1}{\epsilon_1^{7/2}} - \frac{256}{5\sqrt{3}\pi} \frac{1}{\epsilon_1^5} \frac{h\omega_0}{E} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь правые части в классическом случае выражаются через полные эллиптические интегралы $K(r)$, $E(r)$.

Если же в (15) выполнить интегрирование по углам θ и ψ , то спектральные формулы будут мало отличаться от соответствующих выражений для однородного поля. Это позволяет до сих пор в современных обзорах (см., например, [22, 23]) строить спектральные кривые только с учетом радиуса ускорителя R и энергии E , игнорируя неоднородность магнитного поля.

Таким образом, для улучшения поляризации необходимо, чтобы источник синхротронного излучения работал в режиме с наименьшими амплитудами бетатронных колебаний.

5. ДРУГИЕ МОДЕЛИ

Используя рассмотренный метод теории возмущений, можно исследовать излучение и в таких системах, как FOFDOD и как система со слабой фокусировкой.

В первом случае пусть длины дуг магнитов равны a , а длины прямолинейных промежутков — l_1 и l_2 . Здесь $k = (l_1 + l_2)/4a$ и по-прежнему $R_0 = R(1 + k)$. Показатель спада магнитного поля после разложения имеет вид

$$n(\tau) = \frac{n_1 - n_2}{2(1 + k)} + \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} p_{\nu} \cos \nu \left(\tau - \pi \frac{2a + l}{L} \right),$$

где $L = 4a + l_1 + l_2$,

$$p_{\nu} = \frac{\sin \pi \nu a / L}{\nu} \left(n_1 \cos \pi \nu \frac{a + l_1}{L} - n_2 \cos \pi \nu \frac{3a + l}{L} \right).$$

Проведенные расчеты показали, что в выражениях (15) параметры

$$\nu_{ver} = \nu_z \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{16N^2} \left(\frac{n_7^2}{4\nu_z^2} - \frac{n_6}{3(1 + k)} \right)}, \quad \cos \psi_0 = \frac{\pi n_7}{8N\nu_{ver}},$$

где

$$\begin{aligned} \nu_z^2 &= \frac{n_1 - n_2}{2}(1 + k) + \frac{\pi^2}{48N^2} \left[(n_1 + n_2)^2 + k_1(n_1 - n_2)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2l_2 - l_1}{2a}n_1^2 + \frac{2l_1 - l_2}{2a}n_2^2 + 2n_1n_2k \right], \quad k_1 = \frac{l_1^2 + l_2^2 - l_1l_2}{4a^2}, \\ n_6 &= n_1 \left[8k(1 + 2k) - 3\frac{l_1}{a} \left(1 - \frac{l_1}{a} + 4k \right) \right] + n_2 \left[4k(1 - 4k) - 3\frac{l_1}{a} \left(1 - 4k + \frac{l_1}{a} \right) \right], \\ n_7 &= n_1 \left(2 + 4k - \frac{l_1}{a} \right) + n_2 \left(2 + \frac{l_1}{a} \right). \end{aligned}$$

При $n_1 = n_2$ эти результаты совпадут с данными работы [24].

Кроме того, имеется ряд отечественных и зарубежных ускорителей, где дипольные магнитные поля с показателем $n \in (0, 1)$ чередуются с участками, свободными от поля. Пусть в этом случае длина магнита будет a , а свободный пробег частицы равен l . Тогда для градиента получаем такую ступенчатую функцию:

$$n(\tau) = \frac{n}{1 + k} + \frac{2n}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu \tau_4}{\nu} \cos \nu(\tau - \tau_4),$$

где $k = l/a$, $\tau_4 = \pi/(1 + k)$. Число периодов N здесь обычно равно 4.

Для вертикальных колебаний функцию $n(\tau)$ нужно подставить в (3), для радиальных можно воспользоваться тем же уравнением, заменив n на $1 - n$, а z на ρ . Соответствующее решение с точностью до $1/N^3$ имеет вид

$$z = B \cos\left(\frac{\nu_z}{N}\tau + \psi\right) \left[1 + \frac{2n(1+k)^2}{\pi N^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu \tau_4}{\nu^3} \cos \nu(\tau - \tau_4)\right] + \\ + B \sin\left(\frac{\nu_z}{N}\tau + \psi\right) \gamma_1 \frac{4n(1+k)^2}{\pi N^3} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu \tau_4}{\nu^4} \sin \nu(\tau - \tau_4),$$

где $\gamma_1 = \sqrt{(1+k)n}$, $\nu_z^2 = \gamma_1^2 + \frac{\pi^2 k^2 n^2}{3N^2}$.

В задаче об излучении нужно учесть, что

$$\nu_{ver} = \nu_z \sqrt{1 + \frac{\pi^2 nk(2+k)}{3(1+k)N^2}}, \quad \cos \psi_0 = \frac{\pi nk}{N\nu_{ver}}.$$

При $k = 0$, т.е. в случае аксиально-симметричного магнитного поля без промежутков, приходим к формулам, полученным в [1].

Сравнивая параметры ν_{ver} и $\sqrt{n}$, можно сделать вывод о том, что прямолинейные промежутки усиливают влияние бетатронных колебаний на характеристики излучения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Прежде всего нужно подчеркнуть, что выше был проведен подробный анализ для одного периода. Однако при переходе заряженной частицы в другой магнитный период те же условия повторяются и, таким образом, можно сделать обобщение на всю замкнутую траекторию. Более того, нас интересует (с точки зрения длительного использования излучения) только устойчивое движение частицы внутри огибающих, когда она проходит тысячи оборотов. Рассматривая всю проблему о движении частицы в ускорителе в целом, нужно отметить, что и в этом случае условия Каратеодори выполняются, поскольку здесь множество точек разрыва для градиента велико, но счетно.

Используя также близкие подходы работы [25], можно, по-видимому, рассмотреть аналогичным путем и для других физических задач более общее уравнение вида

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \epsilon^2 (a_0 + f(\tau))x = 0,$$

где $f(\tau)$ – периодическая функция, а ϵ – малый параметр.

Что касается полученных спектрально-угловых распределений излучения, то в них учтено влияние как основного синусоидального движения электрона, так и малых осцилляций.

Автор благодарит А.С.Вшивцева и М.М.Хапаева за полезные дискуссии.

Список литературы

- [1] Жуковский В.Ч., Шишанин О.Е. // ЖЭТФ. 1971. Т. 61. Вып. 4. С. 1371–1378.
- [2] Шишанин О.Е. // ЖЭТФ. 1993. Т. 103. Вып.4. С. 1117–1126.
- [3] Шишанин О.Е. Труды XIII Совещания по ускорителям заряженных частиц. Т. 1. Дубна: ОИЯИ, 1993. С. 419–423.
- [4] Коломенский А.А., Лебедев А.Н. Теория циклических ускорителей. М.: Физматгиз, 1962.
- [5] Courant E.D., Snyder H.S. // Ann. of Phys. 1958. Т. 3. С. 1–48.
- [6] Steffen K. CAS CERN Accelerator School. General Accelerator Physics. Proc. Editors: P.Bryant, S.Turner. Vol.1. Geneva, 1985. P. 25–63.
- [7] R. Talman. AIP Conference Proceedings 184. Physics of Particle Accelerators. Editors: Melvin Month, Margaret Dienes. Vol. 1. New York, 1989. P. 190–242.
- [8] Rossbach J., Schmuser P. CAS CERN Accelerator School. Fifth General Accelerator Physics Course. Proc. Editor: S.Turner. Vol. 1. Geneva, 1994.
- [9] Брук Г. Циклические ускорители заряженных частиц. М.: Атомиздат, 1970.
- [10] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
- [11] Нейфе А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984.
- [12] Schwinger J. // Proc. Nat. Acad. Sci. 1954. Т. 40. С. 132.
- [13] Байер В.Н., Катков В.М. // ЖЭТФ. 1967. Т. 53. С. 1478; 1968. Т. 55. С. 1542.
- [14] Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. II. М.: ИЛ, 1954.
- [15] Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
- [16] Коломенский А.А. Физические основы методов ускорения заряженных частиц. М.: Изд-во МГУ, 1980.
- [17] Хапаев М.М. Усреднение в теории устойчивости. М.: Наука, 1986.
- [18] Ускорители. Сб. подред. Б.Н.Яблокова. М.: Наука, 1962.
- [19] Соколов А.А., Тернов И.М. Релятивистский электрон. М.: Наука, 1983.
- [20] Тернов И.М., Михайлин В.В. Синхротронное излучение. Теория и эксперимент. М.: Энергоатомиздат, 1986.
- [21] Яковлева Г.Д. Таблицы функций Эйри и их производных. М.: Наука, 1969.
- [22] Hoffman A. CAS CERN Accelerator School. Synchrotron Radiation and Free Electron Lasers. Editor: S.Turner. Geneva, 1990. P. 115–141.
- [23] Maier R. CAS CERN Accelerator School. Fourth General Accelerator Physics Course. Proc. Editor: S.Turner. Geneva, 1991. P. 97–115.
- [24] Шишанин О.Е. // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20. Вып. 20. С. 4–9.
- [25] Шишанин О.Е. // Укр. мат. журнал. 1992. Т. 44. Вып. 1. С. 142–145.

Московский автомобильно-строительный
институт

Поступила в редакцию
12.V.1995 г.

О. Е. Shishanin

**APPLICATION OF ASYMPTOTIC METHODS TO THE
INVESTIGATION OF SYNCHROTRON RADIATION
PROPERTIES ON ACCOUNT OF BETATRON OSCILLATIONS**

Dynamics and magnetobremssstrahlung of electron in the periodic magnetic systems with straight sections are considered. A method to solve the corresponding differential equations with periodic coefficients are proposed. It is shown that the angular characteristics of synchrotron radiation depend essentially on the parameters of an accelerator magnetic structure.