Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. А. Арбузов, О квантово-механическом описании движения с трением, *ТМФ*, 1996, том 106, номер 2, 300–305

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1115>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 06:14:12

Б. А. Арбузов
О КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКОМ
ОПИСАНИИ ДВИЖЕНИЯ С ТРЕНИЕМ

Рассматривается вариант описания движения с трением в рамках квантовой механики, приводящий к интегродифференциальному уравнению. Приводится точное решение для свободного движения с трением. Развита метод решения для потенциала с бесконечными стенками. На этом примере показано, что для квантовых систем с трением возникает зависимость параметров системы от времени, истекшего с момента ее рождения. Этот эффект может в дальнейшем послужить для интерпретации возможной временной зависимости эффективных сечений адронов, на которую имеются экспериментальные указания.

Описание движения с трением в рамках квантовой механики является открытой проблемой. Предлагались разные подходы к этой задаче (см., например, [1–4]). Часто высказывается мнение, что и не следует искать решение этой проблемы, поскольку в атомах и вообще на микроуровне трения нет. Нам представляется, что проблема представляет интерес как задача математической физики, и, кроме того, существование квантовых систем, в которых следует в какой-то форме учитывать трение, совсем исключить нельзя. Например, тяжелые ядра можно рассматривать как вязкую среду, в которой движутся нуклоны оболочки. Возможно, вязкость следовало бы учитывать и в адронах, где сопротивление движению валентных кварков могут оказывать морские составляющие – кварки и глюоны.

В настоящей работе мы рассмотрим новый метод учета трения, который сводится к нелинейному интегродифференциальному уравнению, обобщающему уравнение Шредингера. Если имеется сила трения $\vec{F}(\vec{r})$, то энергия частицы имеет вид

$$H = \frac{p^2}{2} + V(\vec{r}) + \int_{t_0}^t (\vec{F} \vec{v}) dt. \quad (1)$$

Пусть $\vec{F}$ пропорциональна плотности потока частицы:

$$\vec{F}(\vec{r}) = g \vec{j}(\vec{r}) = \frac{i}{2} g \cdot \left(\vec{\partial} \Psi^*(\vec{r}) \Psi(\vec{r}) - \Psi^*(\vec{r}) \vec{\partial} \Psi(\vec{r}) \right). \quad (2)$$

Тогда уравнение Шредингера принимает вид

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \vec{r}^2} + V(\vec{r}) \Psi(\vec{r}) + \frac{i}{2} g \cdot \Psi(\vec{r}) \cdot \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \left(\vec{\partial} \Psi^*(\vec{x}) \Psi(\vec{x}) - \Psi^*(\vec{x}) \vec{\partial} \Psi(\vec{x}) \right) d\vec{x}. \quad (3)$$

Отметим, что нелинейное уравнение (3) отличается от нелинейных уравнений, рассмотренных в [1–3], в которых трение описывается нелинейным потенциалом вида

$$V_f(\vec{r}) = \frac{\mu}{2i} \ln \frac{\Psi(\vec{r})}{\Psi^*(\vec{r})}.$$

Член с трением в (3) зависит от пути интегрирования. Это, разумеется, дополнительное усложнение, но оно отсутствует в одномерном случае, который мы далее и будем рассматривать. Заметим, что некоторые физические задачи как раз соответствуют одномерному случаю, например задача струнного описания адронов.

Итак, основное уравнение, которое мы будем изучать, имеет вид

$$i \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x) \Psi(x, t) + \frac{i}{2} g \cdot \Psi(x, t) \cdot \int_{x_0}^x \left(\partial_y \Psi^*(y, t) \Psi(y, t) - \Psi^*(y, t) \partial_y \Psi(y, t) \right) dy. \quad (4)$$

Нетрудно видеть, что уравнение (4) сохраняет вероятность, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t) \Psi(x, t) dx = 0,$$

если $\Psi(x, t)$ есть решение уравнения (4), удовлетворяющее граничным условиям на бесконечности.

Рассмотрим прежде всего решение уравнения (4) для плоской волны, т.е. при $V(x) = 0$. Будем искать решение в виде

$$\Psi(x, t) = A \exp \left(i(-\Phi(t) + p(t) \cdot x) \right). \quad (5)$$

Тогда имеем систему уравнений

$$\dot{\Phi}(t) = \frac{p^2(t)}{2} - gp(t)x_0; \quad \dot{p}(t) = -gp(t); \quad (6)$$

откуда получаем решение

$$p(t) = p_0 e^{-gt}; \\ \Phi(t) = \frac{p_0^2}{4g} (1 - e^{-2gt}) - x_0 p_0 (1 - e^{-gt}) + \text{const}. \quad (7)$$

Полученное решение вполне согласуется с качественной картиной движения с трением – импульс экспоненциально убывает и частица останавливается за бесконечное время.

Переходя к рассмотрению примеров на связанные состояния, отметим сразу, что все стационарные решения уравнения Шредингера удовлетворяют и уравнениям (3) или (4), поскольку для действительной волновой функции поток (2) равен нулю и, таким образом, рассматриваемая модификация уравнения Шредингера не искажает связанных состояний. Это обстоятельство является преимуществом рассматриваемого варианта, поскольку снимает вопросы о возможных противоречиях наблюдениям. В частности, точности, достигнутые, например, в атомной физике, не накладывают ограничений на связанный с трением член в (3) или (4). Однако для нестационарного случая,

который описывается комплексной волновой функцией, вполне могут возникнуть новые явления. Для того чтобы судить об этом, нужно иметь нетривиальное решение хотя бы одной задачи на собственные значения. Мы рассмотрим здесь задачу о потенциальной яме с бесконечными стенками: $V(x) = 0$, $0 < x < \pi$; $V(x) = \infty$, $x < 0$; $x > \pi$. В этом случае на интервале $[0, \pi]$ имеем уравнение

$$i \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + \frac{i}{2} g \cdot \Psi(x, t) \cdot \int_{x_0}^x \left(\partial_y \Psi^*(y, t) \Psi(y, t) - \Psi^*(y, t) \partial_y \Psi(y, t) \right) dy \quad (8)$$

с граничными условиями $\Psi(0, t) = \Psi(\pi, t) = 0$.

Решение уравнения будем искать в виде

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin(nx), \quad 0 < x < \pi; \\ \Psi(x, t) &= 0, \quad x < 0; \quad x > \pi. \end{aligned} \quad (9)$$

Подставляя (9) в (8) и выбирая симметричную точку $x_0 = \frac{\pi}{2}$, получаем бесконечную систему на коэффициенты $a_k(t)$

$$\begin{aligned} i\dot{a}_k &= \frac{1}{2} \left(k^2 + g \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n} \cos \frac{n\pi}{2} \right) a_k - \\ &\quad - \frac{g}{4} \left\{ \sum_{n=1}^{k-1} \frac{s_n a_{k-n}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{s_n a_{n+k}}{n} - \frac{s_{n+k} a_n}{n+k} \right) \right\}; \\ s_k &= \frac{i}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{k-1} a_n^* a_{k-n} (2n-k) + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+k) (a_n^* a_{n+k} - a_{n+k}^* a_n) \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Решение системы (10) представляет собой особую сложную задачу. Для начала мы здесь рассмотрим оборванную систему, в которой положены нулю все коэффициенты, кроме первого и второго. Выписывая явно действительные и мнимые части коэффициентов

$$a_n = b_n + ic_n, \quad n = 1, 2,$$

и учитывая, что теперь отличны от нуля только s_1 и s_3 , имеем систему

$$\begin{aligned} -\dot{c}_1 - \frac{b_1}{2} + \frac{5g}{6} b_2 (c_1 b_2 - c_2 b_1) &= 0; \\ \dot{b}_1 - \frac{c_1}{2} + \frac{5g}{6} c_2 (c_1 b_2 - c_2 b_1) &= 0; \\ -\dot{c}_2 - 2b_2 + \frac{5g}{6} b_1 (c_1 b_2 - c_2 b_1) &= 0; \\ \dot{b}_2 - 2c_2 + \frac{5g}{6} c_1 (c_1 b_2 - c_2 b_1) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Определим следующие комбинации:

$$\begin{aligned} A_1 &= b_1^2 + c_1^2; \quad A_2 = b_2^2 + c_2^2; \\ K &= c_1 b_2 - c_2 b_1; \quad Y = b_1 b_2 + c_1 c_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда система (11) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 - \frac{5g}{3} \cdot K^2 &= 0; \\ \dot{A}_2 + \frac{5g}{3} \cdot K^2 &= 0; \\ \dot{K} - \frac{3}{2}Y + \frac{5g}{6}(A_1 - A_2) \cdot K &= 0; \\ \dot{Y} + \frac{3}{2}K &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Сумма первых двух уравнений дает условие

$$A_1 + A_2 = A = \text{const}, \quad (14)$$

т.е. нормировочный множитель не зависит от времени, что отражает свойство сохранения вероятности. Проводя очевидные выкладки, получаем систему двух уравнений

$$\dot{B} - \frac{10g}{3}K^2 = 0; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \ddot{K} + \frac{9}{4}K + \frac{5g}{6}B\dot{K} + \frac{25g^2}{9}K^3 &= 0; \\ B &= A_1 - A_2. \end{aligned} \quad (16)$$

Система (15), (16) линеаризуется в приближении $B \sim A$, что означает $A_2 \ll A_1$, а это соответствует малому возбуждению квантовой системы (см. ниже). Итак, рассмотрим приближенную систему

$$\ddot{K} + \frac{5g}{6}AK\dot{K} + \frac{9}{4}K = 0; \quad (17)$$

$$\dot{B} - \frac{10g}{3}K^2 = 0. \quad (18)$$

Для получения решения уравнения (17) необходимы начальные условия. Мы сформулируем их исходя из постановки физической задачи. Вычислим начальный импульс системы

$$p = \frac{i \int_0^\pi (\partial \Psi^*(x, 0) \Psi(x, 0) - \partial \Psi(x, 0) \Psi^*(x, 0)) dx}{2 \cdot \int_0^\pi \Psi^*(x, 0) \Psi(x, 0) dx}. \quad (19)$$

Учитывая (9), (12), (14), отсюда получаем

$$K(0) = \frac{3\pi A}{16} \cdot p. \quad (20)$$

Начальное условие для производной K получим из соотношения $Y^2 + K^2 = A_1 A_2$, откуда

$$\dot{K}(0) = \frac{3}{2} \sqrt{A_1(0)A_2(0) - \frac{9\pi^2}{256}A^2p^2} - \frac{5\pi g}{32}A^2p. \quad (21)$$

Решение уравнения (17) имеет вид

$$K(t) = \exp\left(-\frac{5gA}{12}t\right) \cdot \left(K(0) \cos \omega t + \frac{12\dot{K}(0) + 5gAK(0)}{12\omega} \sin \omega t\right);$$

$$\omega = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{25g^2A^2}{144}}. \quad (22)$$

Подставляя (22) в (18), фиксируя окончательно начальные условия из требования убывания A_2 при $t \rightarrow \infty$ и учитывая нормировку, имеем

$$A_2(t) = \frac{9\pi p^2}{128} \exp\left(-\frac{5g}{3\pi}t\right) \cdot \left\{1 + \frac{25g^2}{81\pi^2} \cos 2\omega t - \frac{10g\omega}{27\pi} \sin 2\omega t\right\};$$

$$A_1(t) = A - A_2(t); \quad A = \frac{2}{\pi}; \quad (23)$$

$$\dot{K}(0) = -\frac{5gA}{12}K(0).$$

Быстро осциллирующие члены в (23) при усреднении по времени дают ноль, поэтому наблюдаемым является лишь первый, экспоненциально убывающий член. Обратим внимание на то, что коэффициент при этом члене не содержит постоянной g , но это не означает, что он присутствует в стандартной квантовой теории при $g = 0$. В этом случае решением является просто $A_2 = 0$. Таким образом, в (23) мы имеем дело с непериодическим эффектом. Это, на наш взгляд, еще одна поучительная особенность рассматриваемой задачи.

Решение (23) качественно согласуется с интуитивными представлениями, а именно, в момент удара с передачей импульса p происходит возмущение волновой функции, которое затухает со временем, так что система возвращается в исходное основное состояние. Рассмотрим зависимость энергии возмущенного состояния от времени

$$E = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Psi^*(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) dx = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3\pi}{2} A_2(t)\right). \quad (24)$$

Интересно также рассмотреть средний размер состояния, который можно сопоставить эффективному поперечному сечению

$$\langle r^2 \rangle = \int_0^\pi \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \Psi^*(x, t) \Psi(x, t) dx =$$

$$= \left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\right) + \frac{27\pi^2 p^2}{2048} \exp\left(-\frac{5g}{3\pi}t\right), \quad (25)$$

где мы сразу опустили осциллирующие члены. Эффект (25) вполне мог бы быть наблюдаемым, поскольку он означает, что в момент $t = 0$, когда системе передан импульс p , сечение ее взаимодействия оказывается больше обычного. С течением времени оно убывает и стремится к нормальному уровню. Хотя рассмотренный пример с бесконечно высокими стенками далек от реалистических моделей и, кроме того, по ходу дела мы сделали ряд приближений, приведем численную оценку возрастания сечения в начальный момент времени. Для $p^2 = 3$, что соответствует максимальному импульсу, при котором еще не возбуждается следующее состояние, мы имеем

$$\frac{\langle r^2(0) \rangle}{\sigma_0} = 1 + \frac{243\pi^2}{512(\pi^2 - 6)}, \quad (26)$$

т.е. начальное сечение более чем вдвое превышает нормальное. Обратим внимание на то, что указания на усиление сечения взаимодействия только что родившихся адронов неоднократно получались в экспериментах на протяжении почти 40 лет вплоть до настоящего времени (см., например, [5–7]). Вопрос о возможной физической природе трения при движении составляющих адронов (кварков и глюонов) мы здесь обсуждать не будем.

Работа частично поддержана РФФИ в рамках проекта 95-02-03704.

Список литературы

- [1] *Kan K.K., Griffin J.J.* // Phys.Lett. 1974. V. 50B. P. 241.
- [2] *Hasse R.W.* // Journ.Math.Phys. 1975. V. 16. P. 2005.
- [3] *Albrecht K.* // Phys.Lett. 1975. V. 56B. P. 127.
- [4] *Тарасов В.Е.* // ТМФ. 1994. Т. 100. С. 402.
- [5] *Alexander G., Johnston R.H.W., O'Ceallaigh C.* // Nouvo Cimento. 1957. V. 6. P. 478.
- [6] *Brandt R. et al.* // Phys.Rev. 1992. V. C45. P. 1194.
- [7] *Arisawa T., Fujimoto Y., Hasegawa S. et al.* // Nucl.Phys. 1994. V. B424 P. 241.

Институт физики высоких энергий
E-mail: arbuzov@mx.ihep.su

Поступила в редакцию
6.VI.1995 г.

В. А. Арбузов

ON QUANTUM DESCRIPTION OF MOTION WITH FRICTION

A method of quantum description of motion in a dissipative system is considered. One-dimensional problem is described by a nonlinear integro-differential generalization of the Schrödinger equation. The case of free motion with friction is solved exactly. The problem with the infinite-wall potential is considered and an approximate solution is obtained. The solution provides an example of a system with friction with time dependent parameters, expired from the moment of its production. This effect can be tentatively applied for an interpretation of experimental indications on a time dependence of hadron effective cross-sections.