Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Власов, Гравитационное поле вращающейся массивной сферической оболочки в РТГ, *ТМФ*, 1996, том 106, номер 2, 315–319

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1117>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 13:21:09

А. А. Власов

ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ МАССИВНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В РТГ

Получено непрерывное решение для гравитационного поля вращающейся массивной оболочки в РТГ в приближении, линейном по скорости расширения, но произвольном по величине статического гравитационного поля. Показано, как координатно-инвариантный эффект увлечения в полости оболочки может служить для определения глобальной инерциальной системы координат.

Как в общей теории относительности (ОТО), так и в релятивистской теории гравитации (РТГ) задача о гравитационном поле вращающегося сферически-симметричного тела наталкивается на серьезные технические трудности при попытке сшить внутреннее гравитационное поле с внешним, и поэтому точное решение полной задачи еще не найдено, хотя для внешнего гравитационного поля точное решение известно – в ОТО это метрика Керра [1], в РТГ аналогичное внешнее решение исследовалось в работах [2, 3].

Для сшивки решений в ОТО использовались различные приближения. Так, в работах [4] было выяснено, что в первом по частоте вращения приближении, но при произвольной величине статического гравитационного поля (т.е. в первом по частоте вращения приближении к точному статическому решению) внешняя метрика вращающегося шара в ОТО отличается от точного решения Шварцшильда только недиагональным членом известного простого вида. В работе [5] в первом по частоте вращения приближении было построено сшивающееся решение для вращающейся массивной сферической оболочки, так же отличающееся от шварцшильдова решения простым недиагональным членом.

Целью нашей работы является рассмотрение в РТГ аналогичной [5] задачи, т.е. нахождение сшивающегося гравитационного поля вращающейся массивной сферической оболочки в первом по частоте вращения приближении.

Пусть t, r, θ, ϕ – глобальные инерциальные сферические координаты с метрикой пространства Минковского $\gamma_{ij} = \text{diag}(1, -1, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta)$.

Пусть сферическая оболочка вращается с частотой ω_0 и имеет радиус $r = R_0$. Тогда точное решение уравнений Эйнштейна внутри (индекс $(-)$) и вне (индекс $(+)$) оболочки в первом по ω_0 приближении в шварцшильдовых координатах $\tau_{\pm}, r_{\pm}$ есть

$$ds_{\pm}^2 = \left(1 - \frac{2m_{\pm}}{r_{\pm}}\right) d\tau_{\pm}^2 - \left(1 - \frac{2m_{\pm}}{r_{\pm}}\right)^{-1} dr_{\pm}^2 - r_{\pm}^2 d\Omega_{\pm}^2, \quad (1)$$

где

$$m_{\pm} = \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d\Omega_{\pm}^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta) (d\phi - \omega_{\pm} d\tau_{\pm})^2, \quad \omega_{\pm} = \begin{pmatrix} 2ma(r_{\pm})^{-3} \\ \text{const} \end{pmatrix},$$

и a , const – параметры, пропорциональные частоте вращения ω_0 .

Внутри, $r < R_0$, оболочки решение (1) сводится переходом к новой угловой переменной $\phi' = \phi - \omega_- \tau_-$ к диагональной метрике типа Минковского, тождественно обращающей в нуль как четырехиндексный, так и двухиндексный тензоры кривизны (в линейном по ω_0 приближении).

Вне, $r > R_0$, оболочки решение (1) сводится в первом по ω_0 приближении к решению Керра в координатах Бойера–Лидквиста.

Связь шварцшильдовых координат решения (1) с глобальными инерциальными координатами в РТГ задается уравнением

$$D_i \left(\sqrt{\frac{g}{\gamma}} g^{ij} \right) = 0, \quad (2)$$

где D – ковариантная по γ_{ij} производная.

Непосредственной подстановкой проверяется, что уравнениям (2) удовлетворяют следующие решения:

внутри, $r < R_0$, оболочки

$$\tau_- = \tau_0 t, \quad r_- = r_0 r, \quad (3a)$$

вне, $r > R_0$, оболочки

$$\tau_+ = t, \quad r = r_+ - m + D \left[\frac{r_+ - m}{2m} \ln \left(1 - \frac{2m}{r_+} \right) + 1 \right], \quad (3b)$$

здесь τ_0 , r_0 , D – произвольные пока параметры.

Решение (3) стандартно для точной статической задачи в РТГ (см., например, [6]), т.е. вращение в рассматриваемом приближении не изменило решения уравнений (2) при использовании (1).

Параметры τ_0 , r_0 , D , a , ω_- определяются из сшивки в глобальной инерциальной системе координат внутреннего (1), (3a) и внешнего (1), (3b) решений:

$$(\tau_0)^2 = 1 - \frac{2m}{x}, \quad (r_0)^2 = \frac{x'^2}{1 - \frac{2m}{x}}, \quad (r_0 R_0)^2 = x^2, \quad a = \frac{x^3 \omega}{2m}, \quad \omega_- \equiv \frac{\omega}{\tau_0}, \quad (4)$$

где введены обозначения $r_+(R_0) = x$, $r'_+(R_0) = x'$, а зависимость $r_+(R_0)$ определяется из соотношения (3b) при $r = R_0$. Соотношения (1)–(4) дают точное решение задачи в рассматриваемом приближении.

Нам осталось связать параметр ω , характеризующий скорость увлечения во вращение в полости оболочки, с собственным вращением оболочки ω_0 .

Для этого рассмотрим тензор энергии-импульса вещества T^{ij} , удовлетворяющий закону сохранения

$$\nabla_i T^{ij} = 0. \quad (5)$$

Симметрии задачи отвечают следующие ненулевые компоненты тензора T^{ij} : T^{00} , T^{03} , T^{22} , T^{33} , причем будем далее считать, что частота вращения оболочки определена так:

$\omega_0 = \frac{T^{03}}{T^{00}}$. Покомпонентное рассмотрение уравнения (5) показывает, что в силу дельта-образной особенности T^{ij} при $r = R_0$ должны выполняться следующие соотношения:

$$T^{33} \sin^2 \theta = T^{22}, \quad \frac{T^{00}}{T^{22}} = -\frac{[2\partial_1 g_{22}]_+}{[\partial_1 g_{00}]_+} = \frac{1}{\beta},$$

$$\beta = \frac{m\sqrt{1-2m/x}}{2x^3(\sqrt{1-2m/x} + 1)}, \quad (6)$$

где скобки $[\dots]_+$ означают полусумму выражений в скобках при $r = R_0 + 0$ и при $r = R_0 - 0$ (такие скобки возникают в силу свойства дельта-функции: $\delta(r - R_0)f(r) = \delta(r - R_0)(f(R_0 + 0) + f(R_0 - 0))/2$).

Теперь возьмем следующее уравнение Эйнштейна:

$$R_{03} = 8\pi(T_{03} - g_{03}T/2). \quad (7)$$

Вводя обозначения

$$g_{00} = U, \quad g_{01} = A \sin^2 \theta, \quad g_{11} = -V, \quad g_{22} = -W, \quad g_{33} = -W \sin^2 \theta,$$

где функции U, V, A, W зависят только от r , левую часть уравнения (7) можно записать так:

$$\sin^2 \theta \left[\frac{1}{2\sqrt{UVW^2}} \partial_1 (\sqrt{UW^2/V} \partial_1 A) + \text{члены, не содержащие вторых производных} \right]. \quad (8)$$

Правую часть уравнения (7) перепишем через верхние компоненты тензора энергии-импульса с учетом (6) и определения ω_0 :

$$T_{03} = \sin^2 \theta T_0^0 [A(1 - W\beta/U) - \omega W]. \quad (9)$$

Подставляя (8), (9) в (7), умножая (7) на $2\sqrt{UVW^2}$, интегрируя по тонкому слою оболочки $-\int_{R_0-0}^{R_0+0} dr$ с учетом непрерывности метрики и используя шварцшильдово определение массы оболочки $m = 4\pi \int dr T_0^0 \sqrt{UVW^2}$, получаем следующую связь между собственной частотой вращения оболочки и частотой в решении (1):

$$\omega = k\omega_0,$$

$$k = 1 - \frac{m}{2x\sqrt{1-2m/x}(1 + \sqrt{1-2m/x})}. \quad (10)$$

В пределе слабого поля при $x \rightarrow R_0$, $m \rightarrow 0$ имеем $k \approx 3R_0/(4m)$, т.е. с учетом (1), (3), (4), (10) найденное решение переходит в известное решение Лензе–Тирринга (см., например, [7]).

Полученное решение при внешней формальной аналогии с соответствующим решением ОТО имеет в РТГ существенно другую интерпретацию.

Следуя решению (1), (10), любое пробное тело, имеющее скорость $\vec{v}$, увлекается во вращение (прецессию) с частотой ω , равной в полости оболочки величине $k\omega_0$. Так как в полости оболочки существует система координат, получаемая из исходной переходом к новой угловой переменной: $\phi' = \phi - \omega t$ (см. (1), (3a)), в которой интервал риманова пространства-времени принимает лоренцев вид, то с точки зрения ОТО новую систему координат (t, r, θ, ϕ') можно было бы назвать “инерциальной” [7] (точнее, ее следует называть локально-инерциальной или локально-лоренцевой, [8]). На это указывает обращение в нуль в системе координат (t, r, θ, ϕ') всех символов Кристоффеля Γ_{mn}^i , а следовательно, равенство нулю 4-ускорения du^i/ds ($du^i/ds = -\Gamma_{mn}^i u^m u^n$) пробной частицы, обладающей 4-скоростью u^i , и соответственно отсутствие эффекта прецессии. Таким образом, эффект “увлечения” в ОТО имеет координатно-зависимый характер и, говоря о “увлечении” в ОТО, следует указывать, относительно какой системы координат оно происходит: например, относительно системы удаленного неподвижного наблюдателя или какой-либо другой системы.

С точки зрения РТГ ситуация следующая. Во-первых, в РТГ глобальная инерциальная система координат задана – это система (t, r, θ, ϕ) , и она совпадает с системой удаленного покоящегося наблюдателя по терминологии ОТО. Во-вторых, увлечение во вращение движущегося пробного тела в РТГ, в отличие от ОТО, можно описать как координатно-инвариантный эффект гравитационного воздействия поля оболочки. Это легко увидеть, например, рассматривая модуль ускорения F пробной частицы.

Ковариантное выражение для 4-вектора ускорения F^i пробной частицы, обладающей 4-скоростью u^i , в РТГ дается выражением [6]

$$\frac{Du^i}{ds} = F^i = -\Delta_{mn}^i u^m u^n, \quad (11)$$

где Δ_{mn}^i – ковариантный символ Кристоффеля, построенный из традиционного символа Кристоффеля Γ_{mn}^i заменой частных производных ковариантными производными по метрике пространства Минковского γ_{ij} . Модуль ускорения $F = \sqrt{F^i F_i}$ является как явно координатно-инвариантной величиной, так и физически наблюдаемой величиной.

В частности, величина F внутри оболочки для решения (1), (3a) для движущегося наблюдателя с 4-скоростью $u^i = u^0(1, \vec{v})$ равна

$$F = (u^0)^2 r_0 |\vec{\omega}, \vec{v}|, \quad (12)$$

т.е. отлична от нуля и явно зависит как от скорости вращения оболочки, так и от ее массы и радиуса.

Таким образом, гравитационное воздействие вращающейся оболочки на движущегося наблюдателя, определяемое посредством (12), в РТГ существует в любых системах координат.

Система координат (t, r, θ, ϕ') имеет в РТГ неинерциальный (а не “инерциальный”, как в [7]) характер и вращается относительно глобальной инерциальной системы координат (t, r, θ, ϕ) в полости оболочки с частотой $\omega = k\omega_0$.

С учетом (1), (3а) уравнение (11) в рассматриваемом приближении в глобальной инерциальной системе координат внутри оболочки принимает вид

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{v}]. \quad (13)$$

Поэтому прецессию (13) можно использовать как одно из возможных экспериментально проверяемых определений глобальной инерциальной системы координат в РТГ: та система координат внутри вращающейся массивной оболочки, в которой прецессия удовлетворяет уравнению (13) в линейном по ω_0 приближении, будет глобально инерциальной системой координат в РТГ.

Автор благодарен А. А. Логунову за плодотворные обсуждения рассмотренных вопросов.

Список литературы

- [1] *Kerr R.P.* // Phys. Rev. Lett. 1963. V. 11. P. 918.
- [2] *Власов А.А., Логунов А.А.* // ТМФ. 1987. Т. 70. №2. С. 171.
- [3] *Карабут П.В., Чугреев Ю.В.* Препринт НИИЯФ МГУ 88-008/29. М.: МГУ, 1988.
- [4] *Дорошкевич А.Г., Зельдович Я.Б., Новиков И.Д.* // ЖЭТФ. 1965. Т. 49. С. 170; *Гурович В.П.* // Астрономич. ж. 1965. Т. 42. С. 974.
- [5] *Cohen J.M.* / Relativity and Astrophysics. 1. Relativity and Cosmology. Ed. J. Ehlers. Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1967. P. 200.
- [6] *Логунов А.А., Мествиришвили М.А.* Введение в РТГ. М.: Наука, 1989; *Власов А.А.* Некалибровочный подход в РТГ. М.: Изд-во МГУ, 1992.
- [7] *Вейнберг С.* Гравитация и космология. М.: Мир, 1975.
- [8] *Новиков И.Д., Фролов В.П.* Физика черных дыр. М.: Наука, 1986.

Московский
государственный
университет

Поступила в редакцию
2.III.1995 г.,
после доработки
5.X.1995 г.

A. A. Vlasov

GRAVITATIONAL FIELD OF ROTATING MASSIVE SPHERICAL COVER IN RTG

A continuous solution for the gravitational field of a rotating massive spherical cover in RTG is obtained by using the approximation linear in the velocity of expansion but arbitrary in static gravitational field. It is shown how the dragging effect in the cavity of the cover can be used to define a global inertial coordinate system.