Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Власов, Сферические почти ньютоновские пульсации звезды в РТГ, *ТМФ*, 1996, том 106, номер 2, 320–324

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1118>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 13:07:21

А. А. Власов

СФЕРИЧЕСКИЕ ПОЧТИ НЬЮТОНОВСКИЕ ПУЛЬСАЦИИ ЗВЕЗДЫ В РТГ

Показано, что в отличие от ОТО в РТГ сферические пульсации звезды приводят к появлению нестатичности во внешнем гравитационном поле.

Задача о пульсациях сферически-симметричной звезды в общей теории относительности (ОТО) решена давно (см., например, [1, 2]). В релятивистской теории гравитации (РТГ) внешне уравнения гравитационного поля схожи с ОТО [3]:

$$R^{ij} - g^{ij} R/2 = 8\pi T^{ij}, \quad (1)$$

$$\nabla_j T^{ij} = 0, \quad (2)$$

$$D_j \psi^{ij} = 0, \quad (3)$$

где ∇ — ковариантная производная по метрике g_{ij} , D — ковариантная производная по метрике γ_{ij} ,

$$\sqrt{g/\gamma} g^{ij} = \gamma^{ij} - \psi^{ij}.$$

Уравнение (2) является следствием тождеств Бианки для (1).

Однако в ОТО уравнение (3) отсутствует так же, как и пространство Минковского с метрикой γ_{ij} . Кроме того, в РТГ подход к описанию гравитационных явлений полевой: в РТГ рассматривают гравитацию как поле ψ^{ij} , существующее и действующее на фоне глобальной, например инерциальной, системы координат пространства Минковского, соответственно и постановка задачи в РТГ ставится в выбранной заранее глобальной системе координат.

В этой связи в РТГ теорема Биркгофа имеет свою специфику по сравнению с ОТО, а именно, в РТГ можно только утверждать [3], что существует система координат, в которой вакуумное сферически-симметричное поле принимает известный шварцшильдов вид, но нельзя утверждать, в отличие от ОТО [1, 2, 4], что обязательна статичность вакуумного сферически-симметричного поля независимо от характера радиального движения источника, сохраняющего сферическую симметрию задачи.

Поэтому традиционное решение задачи о пульсациях сферически-симметричной звезды необходимо пересмотреть с позиций РТГ. Пульсации звезды будем по стандартной схеме рассматривать как малые возмущения на фоне статического решения уравнений (1)–(3).

Для вещества звезды тензор энергии-импульса возьмем в виде

$$T^{ij} = (\rho + \rho\Pi + p)u^i u^j - g^{ij} p, \quad (4)$$

где ρ – плотность вещества, $\rho\Pi$ – плотность внутренней энергии, p – давление вещества. Плотность удовлетворяет закону сохранения массы

$$\nabla_i(\rho u^i) = 0, \quad (5)$$

плотность внутренней энергии – уравнению

$$d\Pi = \frac{p}{\rho^2} d\rho. \quad (6)$$

Уравнения (2) с учетом (4)–(6) можно переписать следующим образом:

$$(\rho + \rho\Pi + p) \frac{du^i}{ds} = \left(\partial^i - u^i \frac{d}{ds} \right) p. \quad (7)$$

Статическое решение уравнений (1)–(7) определяется соотношениями

$$\begin{aligned} u^0 &= (g_{00})^{-1/2}, \quad u^\alpha = 0, \quad g_{0\beta} = 0, \\ \frac{\rho + \rho\Pi + p}{2} \partial^\alpha g_{00} &= -\partial^\alpha p. \end{aligned} \quad (8)$$

Линеаризуем уравнения (1)–(7) относительно эйлеровых вариаций δu^0 , δu^α , $\delta\rho$, δp , δg_{ij} . Тогда пространственная часть уравнений (7) записывается так:

$$\begin{aligned} (\rho + \rho\Pi + p) (u^0 \partial_0 \delta u^\alpha + \delta \Gamma_{00}^\alpha (u^0)^2 + 2\Gamma_{j0}^\alpha \delta u^j u^0) = \\ = \partial^\alpha \delta p + \delta g^{\alpha\beta} \partial_\beta p - \frac{\partial^\alpha p \delta\rho}{\rho} - \frac{\partial^\alpha p \delta p}{\rho + \rho\Pi + p}. \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнение непрерывности (5) для возмущений есть

$$\partial_0(\delta\rho u^0) + \partial_0(\rho\delta u^0) + \partial_\beta(\rho\delta u^\beta) + \partial_0 \frac{\delta\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} \rho u^0 + \partial_\beta \ln \sqrt{-g} \rho \delta u^\beta = 0. \quad (10)$$

Вариация $\delta\vec{u}$ определяется через вектор координатного смещения $\vec{\xi}(\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{\xi})$ так: $\delta\vec{u} = u^0 \frac{d\vec{\xi}}{dt}$, а вариация давления при постоянной энтропии –

$$\delta p = \delta_L p - (\vec{\xi}, \nabla) p, \quad \delta_L p = \frac{p}{\rho} \Gamma_1 \delta_L \rho, \quad (11)$$

где Γ_1 – так называемый неравновесный показатель адиабаты, δ_L – лагранжева вариация.

В почти ньютоновском приближении при $g_{ij} \approx \gamma_{ij} + h_{ij}$, $h_{ij} = \psi_{ij} - \gamma_{ij}\psi/2$, $h_{ij} = \text{diag}(-2U, 0, 0, 0)$, $h_{ij} \ll \gamma_{ij}$, $\rho r^2 \ll 1$, $\delta\vec{u} = \vec{v} = \frac{d\vec{\xi}}{dt} \ll 1$ исходная система уравнений принимает следующий вид.

В случае статики из (8) получаем

$$\nabla p = \rho \nabla U, \quad (12)$$

$$\Delta U = -4\pi\rho. \quad (13)$$

При этом уравнение (3) удовлетворяется автоматически.

Для возмущений, полагая в нулевом приближении $\delta h_{ij} = \delta\psi_{ij} - \gamma_{ij}\delta\psi/2 = \text{diag}(-2\delta U, 0, 0, 0)$, имеем из (9)–(10)

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla \delta p + \frac{\delta \rho \nabla p}{\rho} + \rho \nabla \delta U, \quad (14)$$

$$\Delta \delta U = -4\pi \delta \rho, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} = -(\nabla, \vec{v} \rho). \quad (16)$$

Уравнение (3) записывается так:

$$D_j \delta \psi^{ij} = 0, \quad (17)$$

т.е. (17) связывает между собой различные компоненты возмущений гравитационного поля.

Рассмотрим частный случай постоянной плотности (в ОТО см., например, [1, 2]). Тогда при $\rho = \rho_0 = \text{const}$ из (12)–(13) получаем

$$U = \frac{2\pi\rho_0}{3}(3R^2 - r^2), \quad p = \frac{2\pi(\rho_0)^2}{3}(R^2 - r^2), \quad (18)$$

здесь R – радиус звезды в форме шара, потенциал $h_{00} = -2U$ гладко на границе сшит со статическим внешним гравитационным полем $h_{00} = -2\frac{m}{r}$ (остальные компоненты h_{ij} равны нулю), масса звезды m есть $\frac{4\pi\rho_0 R^3}{3}$.

Для гармонических сферических пульсаций $\vec{\xi}(t, \vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r} \exp(+i\omega t) \xi(r)$ рассматриваемой почти ньютоновской звезды из (12)–(18) с учетом (11) получаем следующее уравнение на ξ :

$$(1 - x^2)\xi'' + \left(-4x + \frac{2}{x}\right)\xi' + \left[-2 - \frac{2}{x^2} + \frac{\omega^2 + 16\pi\rho_0/3}{2\pi\rho_0\Gamma_1/3}\right]\xi = 0, \quad (19)$$

где $x = r/R$, $\xi' = d\xi/dx$.

Решение (19) с граничными условиями $\xi(0) = 0$, $\xi(1) = \text{const} \neq 0$ известно:

$$\xi = \sum_{n=0}^N a_n x^{n+1}, \quad a_{2n+1} = 0, \quad a_{n+2} = a_n \frac{n^2 + 5n + 4 - A}{n^2 + 7n + 10}, \quad A = \frac{3(\omega)^2}{2\pi\rho_0\Gamma_1} + \frac{8}{\Gamma_1} - 2, \\ (\omega)^2 = \frac{2\pi\rho_0}{3}[\Gamma_1(N+2)(N+3) - 8], \quad N = 0, 2, 4, \dots \quad (20)$$

Из (15) получаем

$$\delta U(r) = 4\pi\rho_0 R \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+2} (x^{n+2} - 1) + \text{const}. \quad (21)$$

Из (20), в частности, следует, что звезда неустойчива при $\Gamma_1 < 4/3$.

Итак мы повторили известные рассуждения ОТО [1, 2].

Теперь с использованием уравнения (17) выясним, как внутренние решения для $\delta\psi_{ij}$ в РТГ сшиваются с внешними.

Условия гладкой сшивки на границе $R + \xi(t, R)$ колеблющегося шара имеют вид

$$[\psi_{ij} + \delta\psi_{ij}]_{\text{in}} = [\psi_{ij} + \delta\psi_{ij}]_{\text{ex}}, \quad (22a)$$

$$\partial_k[\psi_{ij} + \delta\psi_{ij}]_{\text{in}} = \partial_k[\psi_{ij} + \delta\psi_{ij}]_{\text{ex}}, \quad (22b)$$

где внутреннее невозмущенное гравитационное поле $\psi_{ij} = \text{diag}(-4U, 0, 0, 0)$ строится с помощью (18), а внешнее невозмущенное равно $\psi_{ij} = \text{diag}(-4m/r, 0, 0, 0)$.

Из уравнения (17) для гармонических пульсаций по $\delta\psi^{00}$ определяем остальные компоненты:

$$i\omega\delta\psi^{00} = -\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\delta\psi^{0r}), \quad (23a)$$

$$i\omega\delta\psi^{0r} = -\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\delta\psi^{rr}) - \frac{2}{r}\delta\psi_{\theta}^{\theta}. \quad (23b)$$

Уравнения (23) показывают, что между вариациями компонент гравитационного поля существуют соотношения

$$\delta\psi^{or} \sim \rho^{1/r} R \delta\psi^{00}, \quad \delta\psi^{rr} \sim \rho^{1/r} R \delta\psi^{0r}, \quad \rho^{1/2} R \ll 1,$$

т.е. по сравнению с вариацией нулевой компоненты вариации остальных компонент являются величинами более высокого порядка малости и не дают вклада в результат (20)–(21), однако оказываются существенными при рассмотрении условий сшивки.

Совместное решение (20)–(23) приводит с учетом гладкой сшивки статических решений ψ_{ij} на границе $r = R$ к результату

$$[\delta\psi_{00}(R)]_{\text{in,ex}} = 0, \quad (24a)$$

т.е. константа в (21) равна нулю, и

$$[\delta\psi_{0r}(R)]_{\text{in}} = [\delta\psi_{0r}(R)]_{\text{ex}} = \frac{A}{R^2}, \quad (24b)$$

где

$$[\delta\psi_{0r}(R)]_{\text{in}} = -16\pi\rho_0 i\omega R^2 \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{3(n+5)}.$$

Из (20)–(24) следует, что (00) – компонента возмущенного внутреннего гравитационного поля, $\psi_{00} + \delta\psi_{00}$, гладко сшивается с упомянутым выше статическим внешним решением $\psi_{00} = -\frac{4m}{r}$, но уже (0r) – компонента внутреннего гравитационного поля, $\delta\psi_{0r}$, гладко сшивается с нестатическим внешним решением $\delta\psi_{0r} = \exp(+i\omega t) \frac{A}{r^2}$ (удовлетворяющим в рассматриваемом приближении уравнению $(\Delta\delta\psi)_{0r} = 0$); остальные компоненты гравитационного поля однозначно из уравнения (23b) не определяются.

Однако по аналогу теоремы Биркгофа в РТГ для слабых гравитационных полей все зависящие от времени возмущения δh^{ij} статической внешней метрики h^{ij} могут быть представлены в виде

$$\delta h^{ij} = D^i \eta^j + D^j \eta^i.$$

Это позволяет написать в сферических координатах с учетом (24) следующее:

$$\delta h^{0r} = \delta \psi^{0r} = -\exp(+i\omega t) \frac{A}{r^2} = D_0 \eta^r, \quad (25a)$$

$$\delta h^{rr} = 2D^r \eta^r = -2\partial_r \eta^r, \quad (25b)$$

$$\delta h^{\theta\theta} = 2D^\theta \eta^\theta = -\frac{2}{r} \eta^r. \quad (25b)$$

Из (25a) следует, что $\eta^r = -\exp(+i\omega t) \frac{A}{i\omega r^2}$, т.е. из формул (25b) и (25в) можно найти оставшиеся компоненты возмущенного внешнего гравитационного поля.

Таким образом, при пульсациях звезды, сохраняющих ее сферическую симметрию, внешнее гравитационное поле $h_{ij} + \delta h_{ij}$ в РТГ с необходимостью является нестатическим, явно зависящим от характеристик пульсаций (частот, амплитуд) и при гармонических пульсациях будет иметь гармонически меняющиеся со временем составляющие.

Такую периодичность внешнего гравитационного поля легко можно будет обнаружить, сравнивая, например, поля звезд с разными частотами колебаний, т.е. с разными векторами $\eta^i(\omega)$ (25).

Список литературы

- [1] Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. Т2. М.: Мир, 1977.
- [2] Шапиро С., Тьюколски С. Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды. Т1. М.: Мир, 1985.
- [3] Лозунов А.А., Мествиришвили М.А. Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 1989; Власов А.А. Некалибровочный подход в РТГ. М.: Изд-во МГУ, 1992.
- [4] Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Релятивистская астрофизика. М.: Наука, 1967; Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1973; Чандрасекар С. Математическая теория черных дыр. М.: Мир, 1986.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
10.III.1995 г.

A. A. Vlasov

SPHERICAL QUASI-NEWTONIAN STELLAR PULSATIONS IN RTG

It is shown that in Relativistic Theory of Gravity, in contrast to GTR the spherically symmetric stellar pulsations lead to the nonstatic behaviour of an external gravitational field.