Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. В. Ефимов, О стабильности квантовой электродинамики и квантовой хромо-
динамики, *ТМФ*, 2004, том 141, номер 1, 80–99

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf112>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 15:45:59

© 2004 г.

Г. В. Ефимов*

О СТАБИЛЬНОСТИ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И КВАНТОВОЙ ХРОМОДИНАМИКИ

Рассматривается энергия вакуума в КЭД как в системе заряженных фермионов и бозонов и в КХД как в системе кварков (фермионов) и глюонов (бозонов) в самодуальном поле с постоянной напряженностью. Показано, что причиной неустойчивости является неустойчивость бозонов в самодуальном вакуумном поле. Для глобальной устойчивости системы, состоящей из фермионов и бозонов, необходимо, чтобы фермионов было “достаточно” много. Ненулевое самодуальное поле, ведущее к конфайнменту фермионов, реализует минимум энергии вакуума в случае, когда наименьшую массу в системе частиц имеет бозон. Поэтому конфайнмент не возникает в КЭД, где наименьшую массу в системе частиц имеет фермион – электрон, и возникает в КХД, где наименьшую массу имеет бозон – глюон.

Ключевые слова: квантовая электродинамика, квантовая хромодинамика, конфайнмент, самодуальное поле, энергия вакуума, устойчивость.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время общепринято считать, что конфайнмент связан с возникновением кварк-кваркового линейно растущего потенциала или кварк-антикварковой “струны” и может быть объяснен только вне рамок теории возмущений (см., например, последний обзор на эту тему [1]). При этом проблема конфайнмента одного изолированного кварка вообще не ставится и, по всей видимости, не может быть поставлена. Попытки аналитического описания конфайнмента встречают отрицательное предубежденное отношение, и причина такого отношения, по нашему мнению, состоит в том, что до сих пор не найдено простое и удобное аналитическое представление для пропагаторов кварков и глюонов в области конфайнмента, которое сделало бы вычисления с ними не столь громоздкими (см., например, [2]).

Наша точка зрения состоит в том, что все явления адронной физики описываются в рамках квантовой теории поля. Это значит, что имеется КХД-лагранжиан кварков

* Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия. E-mail: efimovg@thsun1.jinr.ru

и глюонов, при этом эффективная константа связи должна быть малой и все расчеты можно проводить в рамках теории возмущений, включая образование связанных состояний, которые должны описываться уравнениями типа уравнения Бете–Солпитера. Основной вопрос заключается в том, какие пропагаторы должны быть использованы для описания кварков и глюонов в области конфайнмента. Ясно, что стандартные пропагаторы Дирака для кварков и Клейна–Гордона для глюонов, соответствующие плоским волнам, не дают правильного описания этих частиц в рассматриваемой области.

Мы считаем, что конфайнмент не связан с так называемым переходом к режиму сильной связи в КХД, т.е. конфайнмент не возникает в результате суммирования диаграмм теории возмущений.

Мы придерживаемся гипотезы, что самодуальное глюонное поле с постоянной напряженностью является хорошим кандидатом на роль вакуумного глюонного поля, поскольку оно удовлетворяет уравнениям Янга–Миллса и ведет к аналитическому конфайнменту, т.е. пропагаторы кварков в этом поле становятся целыми аналитическими функциями гауссовского типа в импульсном пространстве, и кварки не могут существовать как обычные частицы.

Следует особо отметить, что гауссовский характер поведения пропагаторов приводит к реджевскому поведению спектра адронов – мезонов и барионов. В частности, было показано [3], что основные черты адронного спектра можно объяснить, предположив, что пропагаторы кварков и глюонов являются просто гауссовскими экспонентами и адроны возникают как решения уравнения Бете–Солпитера. Была построена модель индуцированных кварковых токов (см. [4], [5]), основанная на предположении, что вакуум КХД реализуется самодуальным глюонным полем с постоянной напряженностью. Проведенные расчеты показали, что модель согласуется с имеющимися экспериментальными данными.

Другим аргументом в пользу серьезного отношения к самодуальным полям с постоянной напряженностью является тот факт, что эти поля, будучи точными решениями уравнений Янга–Миллса, приводят к минимуму энергии глюонного вакуума при ненулевой напряженности поля [6], [7]. Однако самодуальное поле и в КЭД является решением уравнений Максвелла. Поэтому небезынтересно сравнить роль самодуального поля в КЭД и КХД и понять, в чем состоит принципиальная разница мира КЭД и мира КХД с точки зрения влияния самодуальных полей на стабильность систем частиц в этих двух мирах.

В работах [6], [7], посвященных вычислению энергии вакуума в самодуальном поле, рассматривалась система, состоящая только из глюонов. Нам такой подход представляется недостаточным, поскольку кварки и глюоны представляют единую систему и находятся в едином вакууме. Поэтому в КХД физическая система состоит из кварков и глюонов, а в КЭД – из всех заряженных частиц (фермионов и бозонов) и электромагнитного поля.

Наше предположение состоит в том, что вакуумное поле и константа связи должны быть полностью независимыми параметрами в лагранжианах КЭД и КХД. Это означа-

ет, что при равенстве нулю одного из них зависимость от другого не должна исчезать из соответствующего лагранжиана. Обычно вакуумное поле рассматривается как внешнее поле, на практике это означает, что в лагранжиане производится замена $A \rightarrow A + B$, где A и B – внешнее и квантованное поля, затем рассматривается получившийся лагранжиан, в который внешнее поле входит в комбинации eB и появляется кинетический вклад внешнего поля в энергию вакуума, пропорциональный B^2 . Если же производится замена $A \rightarrow A + B/e$, то в лагранжиан внешнее поле войдет без множителя e , но кинетический вклад внешнего поля в энергию вакуума будет пропорционален B^2/e^2 , и переход к пределу $e \rightarrow 0$ при отличном от нуля поле B невозможен.

Мы придерживаемся точки зрения, что если поле B реализует вакуум КЭД или КХД, то это означает, что оно внутренне присуще рассматриваемой системе частиц, т.е. оно не является внешним полем в обычном понимании и изначально должно быть введено в лагранжиан системы полей так же, как вводится масса частиц. При этом вакуумное поле непосредственно не связано с зарядом и может быть отлично от нуля даже при равенстве нулю заряда $e = 0$ или константы связи $g = 0$, которые определяют силу взаимодействия частиц с фотонами или глюонами. Величина напряженности вакуумного поля должна определяться минимумом энергии системы частиц, находящихся в этом вакууме. Таким образом, вакуумное поле объединяет частицы даже в отсутствие квантового взаимодействия.

Лагранжиан системы частиц в вакуумном поле получим следующим образом. В исходном лагранжиане произведем замену $A \rightarrow A + B/e$, а затем опустим кинетический вклад внешнего поля в энергию вакуума, пропорциональный B^2/e^2 . Выбор лагранжиана таким способом согласуется с общей формулировкой лагранжевой динамики, поскольку к лагранжиану всегда можно добавить полную производную, что не меняет динамические уравнения, описывающие рассматриваемую систему полей.

Теперь о способе вычислений. Мы считаем, что гамильтонов подход при вычислениях энергии вакуума не является наилучшим, поскольку, во-первых, гамильтониан в КТП не является хорошо определенным оператором (см., например, [8]) и, во-вторых, не ясно, имеем ли мы гамильтонову систему при включении самодуального поля, поскольку лагранжиан оказывается явно зависящим от времени, а все вычисления проводятся в евклидовой метрике. Единственный результат, который с математической точки зрения достигнут в КТП, – это правила построения S -матрицы как унитарного оператора на пространстве Фока и производящего функционала Z для функций Грина из заданного лагранжиана системы полей. При этом регуляризация, способ вычислений и перенормировочная процедура с правилом построения необходимых контрчленов для устранения расходящихся выражений играют определяющую роль. Последнее обстоятельство подтверждает то, что к гамильтонову методу в КТП надо относиться с большой осторожностью. Поэтому основным инструментом для наших вычислений будет производящий функционал.

Результаты, полученные в данной работе, можно сформулировать следующим образом. Показано, что как в КЭД, так и в КХД фермионы ведут к стабильности, а бозоны

к неустойчивости системы частиц в самодуальном поле с постоянной напряженностью.

В КЭД система заряженных фермионов и бозонов стабильна, т.е. минимум энергии вакуума реализуется при нулевом электромагнитном самодуальном поле с постоянной напряженностью, если, во-первых, число бозонов меньше удвоенного числа фермионов и, во-вторых, наилегчайшими частицами в системе являются фермионы. Именно эту ситуацию мы наблюдаем в Природе: практически все стабильные частицы (электрон и протон) являются фермионами, фермионов явно больше, чем бозонов, и легчайшей заряженной частицей является электрон, масса которого существенно меньше масс остальных заряженных частиц. Таким образом, ненулевое самодуальное поле с постоянной напряженностью не может реализовать электромагнитный вакуум в имеющейся в Природе системе заряженных фермионов и бозонов.

Если же мы предположим, что существует гипотетический мир КЭД, состоящий из фермионов и бозонов, причем число фермионов больше числа бозонов, но массы бозонов меньше массы фермионов, то такой мир глобально стабилен, но вакуум КЭД в таком гипотетическом мире реализуется при ненулевом самодуальном поле. Наличие ненулевого поля ведет к возникновению конфайнмента заряженных фермионов и бозонов, и вместо заряженных частиц возникают нейтральные связанные состояния. Этот пример качественно правильно передает ситуацию в КХД, где роль заряженного бозона с малой массой играют самодействующие безмассовые глюоны.

В КХД в глюонном самодуальном поле с постоянной напряженностью кварк-глюонная система глобально стабильна, если число независимых кварков, т.е. кварков с различными ароматами, равно или больше двух. Напрашивается вывод, что именно это обстоятельство объясняет выделенность изотопической группы $SU_f(2)$ и практическое равенство масс u - и d -кварков. Существование безмассового самодействующего бозона – глюона – приводит к тому, что возможен минимум энергии вакуума при конечной напряженности Λ глюонного самодуального поля, величина которой определяется соотношением между хромодинамической шкалой $\Lambda_{\text{КХД}}$ и массами кварков M_f . Наличие ненулевого вакуумного самодуального поля ведет к аналитическому конфайнменту кварков и глюонов и возникновению стабильных состояний – адронов. Параметр Λ определяет масштаб области конфайнмента и напрямую связан с наклоном траекторий Редже в спектре адронов.

Таким образом, результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Причина конфайнмента – неустойчивость бозонов в самодуальном вакуумном поле. Для глобальной устойчивости системы, состоящей из фермионов и бозонов, необходимо, чтобы фермионов было “достаточно” много. Конфайнмент не возникает в случае, когда наименьшую массу в системе частиц имеет фермион (электрон в КЭД), и возникает, когда наименьшую массу имеет бозон (глюон в КХД).

2. КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Одним из решений уравнения Максвелла в пустоте $\partial_\mu F_{\mu\nu}(x) = 0$ является самодуальное поле с постоянной напряженностью

$$B_\mu(x) = \Lambda^2 b_{\mu\nu} x_\nu, \quad B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu(x) - \partial_\nu B_\mu(x) = -2\Lambda^2 b_{\mu\nu}, \quad (1)$$

где Λ характеризует напряженность самодуального поля и

$$b_{\mu\nu} = -b_{\nu\mu}, \quad b_{\mu\rho} b_{\rho\nu} = -\delta_{\mu\nu}, \quad \tilde{b}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\nu\mu\alpha\beta} b_{\alpha\beta} = \pm b_{\mu\nu}.$$

Самодуальный или антисамодуальный тензор $b_{\mu\nu}$ характеризуется некоторым направлением

$\mathbf{n}_j = b_{j0}$ в конфигурационном трехмерном пространстве.

Рассмотрим систему заряженных фермионов $\{\psi_F\}$ и бозонов $\{\phi_B\}$ с ненулевыми массами и одинаковым зарядом e . Наша конечная цель состоит в том, чтобы понять, как возникает конфайнмент в хромодинамике кварков и глюонов, поэтому для простоты фермионы и бозоны будем рассматривать как систему частиц с одинаковым зарядом.

Предположим, что самодуальное поле $B_\mu(x)$ реализует электромагнитный вакуум. Согласно сказанному во введении лагранжиан системы N_F заряженных фермионов $\{\psi_F\}$ и N_B заряженных бозонов $\{\phi_B\}$ с ненулевыми массами и одинаковым зарядом e постулируется в форме

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(x) + \mathcal{L}_I(x), \quad (2)$$

где свободный лагранжиан $\mathcal{L}_0(x)$ и лагранжиан взаимодействия $\mathcal{L}_I(x)$ записываются как

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(x) &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x))^2 + \\ &\quad + \sum_F (\bar{\psi}_F(x) [\gamma_\mu \nabla_\mu - M_F] \psi_F(x)) - \sum_B (\phi_B^*(x) [-\nabla^2 + m_B^2] \phi_B(x)), \\ \mathcal{L}_I(x) &= e \sum_F (\bar{\psi}_F(x) i \gamma_\mu \psi_F(x)) A_\mu(x) - \\ &\quad - ie [(\nabla_\mu(x) \phi(x))^* \phi(x) - \phi^*(x) \nabla_\mu(x) \phi(x)] A_\mu(x) - \\ &\quad - e^2 \phi^*(x) \phi(x) A_\mu(x) A_\mu(x), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \nabla_\mu(x) &= \partial_\mu + i B_\mu(x) = \partial_\mu + i \Lambda^2 b_{\mu\nu} x_\nu, \\ [\nabla_\mu(x), \nabla_\nu(x)] &= -2i \Lambda^2 b_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3)$$

Лагранжиан (2) инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu f(x), & B_\mu(x) &\rightarrow B_\mu(x), \\ \psi_F(x) &\rightarrow e^{ief(x)} \psi_F(x), & \bar{\psi}_F(x) &\rightarrow \bar{\psi}_F(x) e^{-ief(x)}, \\ \phi_F(x) &\rightarrow e^{ief(x)} \phi_F(x), & \phi_F^*(x) &\rightarrow \phi_F^*(x) e^{-ief(x)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Поле $B_\mu(x)$ не меняется при калибровочных преобразованиях.

В лагранжиане (2) полностью разделены зависимости от параметров Λ и e . Любой матричный элемент может быть представлен рядом

$$A(e, \Lambda) = \sum_{n=n_0}^{\infty} e^n A_n(\Lambda).$$

Другими словами, если считать константу взаимодействия e достаточно малой, то все вычисления можно проводить по теории возмущений, в то время как напряженность поля Λ может принимать произвольные значения, при этом функции $A_n(\Lambda)$ могут быть точно вычислены. Таким образом, зависимость матричных элементов от напряженности поля Λ можно изучать в каждом порядке теории возмущений по e .

Другое существенное замечание состоит в том, что самодуальное поле $B_\mu(x)$ не вносит никаких новых ультрафиолетовых (УФ) расходимостей в теорию, поэтому появление УФ-расходимостей связано только с разложением по заряду e и имеет ту же структуру всех перенормировочных членов, что и при стандартном варианте перенормировки в КЭД. Кроме того, пропагаторы фермионов и бозонов в самодуальном поле $B_\mu(x)$ могут быть вычислены в явной форме. Таким образом, стандартные методы построения перенормированной S -матрицы в КЭД полностью переносятся на данный случай.

Лагранжиан (2) описывает взаимодействие заряженных фермионов и бозонов, находящихся в вакуумном поле $B_\mu(x)$. Естественно возникает вопрос, какова напряженность Λ этого поля? Поскольку мы предполагаем константу электромагнитного взаимодействия $\alpha = e^2/(4\pi)$ малой, то напряженность Λ должна быть выбрана из условия минимума энергии основного состояния – вакуума. Объектом нашего исследования будет производящий функционал

$$\mathcal{Z}_V = \iint \prod_F D\psi_F D\bar{\psi}_F \prod_B D\phi_B D\phi_B^* \int DA \exp\left(\int_V dx \mathcal{L}(x)\right). \quad (5)$$

Нормировку функционального интеграла выберем таким образом, что при $\Lambda = 0$ и $e = 0$ производящий функционал равен единице, $\mathcal{Z}_V = 1$.

Функциональный интеграл в (5) в низшем приближении теории возмущений при $e = 0$ вычисляется в явном виде:

$$\mathcal{Z}_V^{(0)} = \prod_F \text{Det} \left[\frac{-\hat{\nabla}(x) + M_F}{-\hat{\partial} + M_F} \right] \prod_B \text{Det} \left[\frac{-\square + m_B^2}{-\nabla^2 + m_B^2} \right]. \quad (6)$$

Энергия вакуума определяется как

$$E_0(\Lambda) = - \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \ln \mathcal{Z}_V^{(0)} = E_F(\Lambda) + E_B(\Lambda). \quad (7)$$

Представление (6) ясно показывает, что поведение функций $E_F(\Lambda)$ и $E_B(\Lambda)$ при $\Lambda \rightarrow \infty$ с необходимостью должно быть противоположного знака, т.е. если одна функция растет, то другая убывает.

Воспользуемся формулами из приложения 1 и проведем перенормировку энергии вакуума условием

$$\left. \frac{E_{\text{vac}}(\Lambda)}{\Lambda^4} \right|_{\Lambda=0} = 0. \quad (8)$$

В результате энергия вакуума системы заряженных фермионов и бозонов в КЭД имеет вид

$$E_{\text{vac}}(\Lambda) = \frac{4\Lambda^4}{(4\pi)^2} \left[\sum_{\text{F}} 2W\left(\frac{2\Lambda^2}{M_{\text{F}}^2}\right) - \sum_{\text{B}} W\left(\frac{2\Lambda^2}{m_{\text{B}}^2}\right) \right]. \quad (9)$$

Функция $W(X)$ определена формулой (27) приложения 1.

Асимптотическое поведение энергии вакуума $E_{\text{vac}}(\Lambda)$ при малых и больших Λ задается формулами

$$E_{\text{vac}}(\Lambda) = \begin{cases} \frac{4\Lambda^4}{(4\pi)^2} \frac{1}{15} \left[\sum_{\text{F}} 2\left(\frac{2\Lambda^2}{M_{\text{F}}^2}\right)^2 - \sum_{\text{B}} \left(\frac{2\Lambda^2}{m_{\text{B}}^2}\right)^2 \right], & \Lambda \rightarrow 0, \\ \frac{4\Lambda^4}{(4\pi)^2} \frac{1}{3} \left[\sum_{\text{F}} 2 \ln\left(\frac{2\Lambda^2}{M_{\text{F}}^2}\right) - \sum_{\text{B}} \ln\left(\frac{2\Lambda^2}{m_{\text{B}}^2}\right) \right], & \Lambda \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (10)$$

На основании полученных формул для энергии вакуума (9) и (10) можно заключить, что в электромагнитном самодуальном поле с постоянной напряженностью:

- 1) система, состоящая только из заряженных фермионов, глобально стабильна;
- 2) система, состоящая только из заряженных бозонов, глобально нестабильна;
- 3) система заряженных фермионов и бозонов стабильна, если выполнены следующие условия:

- а) число бозонов меньше удвоенного числа фермионов, $2N_{\text{F}} > N_{\text{B}}$,
- б) наилегчайшими частицами являются фермионы, так как должно выполняться неравенство

$$\sum_{\text{F}} \frac{2}{M_{\text{F}}^2} > \sum_{\text{B}} \frac{1}{m_{\text{B}}^2},$$

в этом случае минимум энергии вакуума реализуется при $\Lambda = 0$.

Именно эту ситуацию мы наблюдаем в Природе: основные стабильные частицы являются фермионами (электрон и протон), фермионов явно больше, чем бозонов, и легчайшей заряженной частицей является электрон, масса которого существенно меньше остальных заряженных частиц. Таким образом, ненулевое самодуальное поле с постоянной напряженностью не может реализовать электромагнитный вакуум в системе заряженных фермионов и бозонов, имеющих в Природе.

Гипотетический мир КЭД. Для того чтобы лучше понять условие стабильности, рассмотрим гипотетический мир, состоящий из двух сортов заряженных частиц: фермионов с массой M и бозонов с массой m , причем масса бозона меньше массы фермиона. Тогда энергию вакуума в самодуальном поле (9) с постоянной напряженностью можно записать в виде

$$E_{\text{vac}}(\Lambda) \approx \frac{4\Lambda^4}{6(4\pi)^2} \left[2 \ln\left(1 + \frac{2}{5} \frac{2\Lambda^2}{M_{\text{F}}^2}\right) - \ln\left(1 + \frac{2}{5} \frac{2\Lambda^2}{m_{\text{B}}^2}\right) \right], \quad (11)$$

где мы для простоты использовали приближенное выражение (28) из приложения 1 для функции $W(X)$.

Наш гипотетический мир глобально стабилен, поскольку энергия вакуума растет при $\Lambda \rightarrow \infty$. Однако если масса бозона мала, $m_B^2 < M_F^2/2$, то функция $E_{\text{vac}}(\Lambda)$ имеет отрицательный минимум при конечных $\Lambda > 0$. Таким образом, вакуум КЭД в нашем гипотетическом мире реализуется при ненулевом самодуальном поле. Наличие ненулевого поля $B_\mu(x)$ ведет к возникновению конфайнмента заряженных фермионов и бозонов, поскольку их пропагаторы становятся целыми аналитическими функциями в импульсном пространстве. Вместо заряженных частиц возникают нейтральные связанные состояния, массы которых можно вычислить, используя соответствующие уравнения Бете–Солпитера.

Этот пример качественно правильно передает ситуацию в КХД, где роль заряженного бозона с малой массой играют самодействующие безмассовые глюоны.

3. КВАНТОВАЯ ХРОМОДИНАМИКА

КХД описывает кварки и глюоны, динамическое взаимодействие которых определяется лагранжианом

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2} \text{Tr} \check{G}_{\mu\nu}(x) \check{G}_{\mu\nu}(x) + \sum_f (\bar{q}_f(x) [\gamma_\mu (\partial_\mu - ig \check{A}_\mu(x)) - M_f] q_f(x)), \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \check{G}_{\mu\nu}(x) &= \check{F}_{\mu\nu}(x) - ig [\check{A}_\mu(x), \check{A}_\nu(x)], \\ \check{F}_{\mu\nu}(x) &= \partial_\mu \check{A}_\nu(x) - \partial_\nu \check{A}_\mu(x), \quad \check{A}_\mu(x) = A_\mu^a(x) t^a, \end{aligned}$$

$t^a = \lambda^a/2$ – матрицы цветовой группы $SU_c(3)$.

Лагранжиан (12) инвариантен относительно калибровочных преобразований цветовой группы $SU_c(3)$

$$\begin{aligned} q_f(x) &\rightarrow U(x) q_f(x), \quad \bar{q}_f(x) \rightarrow \bar{q}_f(x) U^+(x), \\ \check{A}_\mu(x) &\rightarrow U(x) \check{A}_\mu(x) U^+(x) - \frac{i}{g} U_\mu(x) U^+(x), \quad U_\mu(x) = \partial_\mu U(x), \\ \check{G}_{\mu\nu}(x) &\rightarrow U(x) \check{G}_{\mu\nu}(x) U^+(x). \end{aligned} \quad (13)$$

Под самодуальным глюонным полем с постоянной напряженностью понимается поле $\check{B}_\mu(x)$ (см. [7]), которое при калибровочных преобразованиях преобразуется как

$$\check{B}_\mu(x) \rightarrow U(x) \check{B}_\mu(x) U^+(x), \quad (14)$$

и существует такая калибровка, что $\check{B}_\mu(x) = \check{n} B_\mu(x)$, $\check{n} = t^a n^a$, где $\check{n} = \text{const}$ и поле $B_\mu(x)$ определено в (1). Как и в КЭД, самодуальный или антисамодуальный тензор

$b_{\mu\nu}$ характеризуется некоторым направлением $\mathbf{n}$ в конфигурационном трехмерном пространстве, так что $b_{j0} = \mathbf{n}_j$ и $b_{ij} = \varepsilon_{ijk}\mathbf{n}_k$. Постоянный вектор n^a характеризуется двумя инвариантными параметрами $(n^a n^a) = 1$ и $(n^a n^b n^c d^{abc})$ и определяет некоторое направление в цветовом пространстве $SU_c(3)$ (см. приложение 2). Калибровочное преобразование (14) означает вращение вектора n^a в цветовом пространстве. Параметр Λ характеризует напряженность самодуального поля. Поле $\check{B}_\mu(x)$ является решением уравнений Янга–Миллса в пустоте.

Как и в случае КЭД, мы предполагаем, что самодуальное поле $\check{B}_\mu(x)$ реализует хромодинамический вакуум.

Лагранжиан кварк-глюонной системы (12) в вакуумном самодуальном поле получается, если в лагранжиане (12) провести замену

$$\check{A}_\mu(x) \rightarrow \check{A}_\mu(x) + \frac{1}{g}\check{B}_\mu(x)$$

и удалить постоянный кинетический член $\sim \Lambda^4/g^2$. Полученный лагранжиан инвариантен относительно калибровочных преобразований цветовой группы (13) и преобразования (14).

Выделим “свободную” часть лагранжиана (12) при $g = 0$:

$$\mathcal{L}_0(x) = \sum_f \mathcal{L}_{f0}(x) + \mathcal{L}_{g0}(x). \quad (15)$$

Здесь лагранжиан для кварка с массой M_f записывается как

$$\mathcal{L}_{f0}(x) = (\bar{q}_f(x)[\gamma_\mu \check{\nabla}_\mu(x) - M_f]q_f(x)),$$

где

$$\begin{aligned} \check{\nabla}_\mu(x) &= \partial_\mu + i\check{B}_\mu(x) = \partial_\mu + i\Lambda^2 \check{n} b_{\mu\nu} x_\nu, \\ [\check{\nabla}_\mu(x), \check{\nabla}_\nu(x)] &= -2i\Lambda^2 \check{n} b_{\mu\nu}, \quad \check{n} = n^a t^a. \end{aligned} \quad (16)$$

Квадратичная часть глюонного лагранжиана после некоторых преобразований с учетом калибровки $(\check{\nabla}_\mu A(x)_\mu(x)) = 0$ или $(\check{\nabla}_\mu)^{ab}(x)A_\mu^b(x) = 0$ приобретает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{g0}(x) &= -\frac{1}{2} \text{Tr}[\check{F}_{\mu\nu}(x)\check{F}_{\mu\nu}(x) + 2\check{B}_{\mu\nu}\check{A}_\mu(x)\check{A}_\nu(x)] = \\ &= -\frac{1}{2} (A_\mu(x)[- \check{\nabla}^2(x)\delta_{\mu\nu} + 4i\Lambda^2 \check{n} b_{\mu\nu}]A_\nu(x)). \end{aligned} \quad (17)$$

Мы не будем здесь выписывать в явном виде лагранжиан взаимодействия.

В случае КХД остаются справедливыми замечания, сделанные для КЭД. Повторим их.

Во-первых, самодуальное поле $\check{B}_\mu(x)$ не вносит никаких новых УФ-расходимостей в теорию, поэтому появление УФ-расходимостей связано только с разложением по заряду g и имеет ту же структуру всех перенормировочных членов, что и при стандартном

варианте перенормировки в КХД. Кроме того, пропагаторы кварков и глюонов в самодуальном поле $\vec{B}_\mu(x)$ могут быть вычислены в явном виде. Таким образом, стандартные методы построения перенормированной S -матрицы в КХД полностью переносятся на данный случай.

Во-вторых, в лагранжиане (15) полностью разделены зависимости от параметров g и Λ в любых матричных элементах, т.е. для любого матричного элемента мы получаем выражения вида

$$A(g, \Lambda) = \sum_{n=n_0}^{\infty} g^n A_n(\Lambda).$$

Другими словами, если считать константу взаимодействия g достаточно малой, все вычисления можно проводить в рамках теории возмущений, в то время как напряженность поля Λ может принимать произвольные значения, при этом функции $A_n(\Lambda)$ могут быть точно вычислены. Таким образом, зависимость матричных элементов от напряженности поля Λ можно изучать в каждом порядке теории возмущений по g .

Прежде чем перейти к вычислениям, нам представляется интересным сделать качественное предсказание поведения энергии вакуума в самодуальном поле с постоянной напряженностью в КХД исходя из полученного результата в КЭД. Итак, какие выводы можно сделать из формул (9) и (10)? Прежде всего, вклад кварков в энергию вакуума качественно совпадает с вкладом электронов в КЭД, т.е. кварки обеспечивают стабильность квантовой системы. В КХД “бозонов” нет, их роль играют глюоны благодаря их самодействию, чего не было у фотонов в КЭД. Поскольку глюоны являются бозонами, качественное поведение глюонного вклада в энергию вакуума описывается формулами, близкими к бозонному вкладу в КЭД с учетом нулевой массы глюонов. Эта зависимость при больших Λ должна быть вида $\sim -\Lambda^4 \ln \Lambda^2$, другими словами, глюоны ведут к нестабильности вакуума КХД. Следует обратить особое внимание на отрицательный знак этого вклада, в противоположность имеющимся в литературе формулам (см. [7]). Поскольку поведение при больших Λ и у кваркового, и у глюонного вкладов в вакуумную энергию функционально одинаково ($\sim \Lambda^4 \ln \Lambda^2$), то различных типов кварков должно быть “достаточно много”, чтобы обеспечить глобальную стабильность кварк-глюонной системы. Ниже мы вычислим необходимое число кварков.

Итак, в КХД, в отличие от КЭД, глюон играет роль легчайшего бозона (см. (10)). При малых Λ имеется как положительный вклад от кварков, так и отрицательный вклад от глюонов. Только аккуратное вычисление должно показать, реализуется ли минимум энергии вакуума при ненулевых Λ . Если вакуум имеет минимум при $\Lambda = 0$, т.е. самодуальное поле отсутствует, то это означает, что кварки и глюоны существуют как обычные частицы и описываются свободными уравнениями. Если же вакуум имеет минимум при ненулевых Λ , то это означает, что самодуальное глюонное поле с постоянной напряженностью реализует вакуум кварк-глюонной системы, кварки и глюоны находятся в этом поле и возникает конфайнмент кварков, т.е. реализуется так называемый *аналитический конфайнмент*. К анализу этой ситуации мы сейчас и перейдем.

Объектом нашего исследования будет производящий функционал в низшем порядке теории возмущений при $g = 0$

$$\mathcal{Z}_V^{(0)} = \int \prod_f D\psi_f D\bar{\psi}_f \int DA \delta(\nabla A) \Delta(A) \exp\left(\int_V dx \mathcal{L}_0(x)\right) = \mathcal{Z}_{Vq}^{(0)} \cdot \mathcal{Z}_{Vg}^{(0)}. \quad (18)$$

Нормировка функционального интеграла выбрана таким образом, что при $\Lambda = 0$ производящий функционал равен единице, $\mathcal{Z}_V^{(0)} = 1$.

Функциональные интегралы могут быть вычислены (см. приложения 5 и 6):

$$\mathcal{Z}_{Vq}^{(0)} = \int d\sigma_q \exp\left(\int_V dx \mathcal{L}_q(x)\right) = \prod_f \text{Det} \left[\frac{\gamma_\mu \check{\nabla}_\mu(x) - M_f}{\gamma_\mu \partial_\mu - M_f} \right], \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{Vg}^{(0)} &= \frac{1}{N_A} \int DA \delta(\nabla A) \Delta(A) \exp\left(-\frac{1}{2} \int_V dx (A_\mu [-\check{\nabla}^2 \delta_{\mu\nu} + 4i\Lambda^2 \check{n} b_{\mu\nu}] A_\nu)\right) = \\ &= \text{Det} \left[\frac{-\square}{-\nabla^2 + 4\Lambda_g^2} \right] \text{Det} \left[\frac{-\square}{-\nabla^2 - 4\Lambda_g^2} \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Соответственно для энергии вакуума имеем

$$E_0(\Lambda) = E_q(\Lambda) + E_g(\Lambda). \quad (21)$$

Качественно очевидно, что при больших Λ поведение и кваркового, и глюонного вкладов в вакуумную энергию должно быть функционально одинаково, но противоположных знаков.

Кварковый вклад в энергию вакуума после перенормировки (8) равен (см. приложение 5)

$$E_q(\Lambda) = \frac{4\Lambda^4}{(4\pi)^2} W_q\left(\frac{2\Lambda^2}{M^2}\right), \quad (22)$$

функция $W_q(X)$ определена в приложении 5. Функция $W(X)$ определена в (27).

Глюонный вклад в энергию вакуума определен в приложении 6 (см. формулу (41)). Неопределенный параметр H возникает как результат перенормировки глюонного вклада в энергию вакуума, в котором отсутствует какая-либо шкала масс. При этом подчеркнем, что в нашем подходе эта перенормировка напрямую не связана с перенормировкой константы связи g . Тем не менее параметр H должен быть как-то связан с хромодинамической энергетической шкалой $\Lambda_{\text{КХД}}$.

Подставив формулы для $E_q(\Lambda)$ и $E_g(\Lambda)$ в (21), получим

$$E_{\text{vac}}(\Lambda) = \frac{4\Lambda^4}{(4\pi)^2} \left[-\frac{1}{2} \ln\left(\frac{2\Lambda^2}{H^2}\right) + \sum_f W_q\left(\frac{2\Lambda^2}{M_f^2}\right) \right]. \quad (23)$$

Асимптотическое поведение энергии вакуума при больших Λ имеет вид

$$\mathcal{E}_{\text{vac}}(\Lambda) \rightarrow \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} N_q\right) \frac{\Lambda^4 \ln \Lambda^2}{(2\pi)^2}, \quad (24)$$

где $N_q = \sum_f$ — число кварков.

На основании полученных формул для энергии вакуума (23) и (24) можно сделать следующие заключения.

1. В глюонном самодуальном поле с постоянной напряженностью кварк-глюонная система глобально стабильна, если число независимых кварков не меньше двух, $N_q \geq 2$. Возможно, это обстоятельство объясняет выделенность изотопической группы $SU_f(2)$ и практическое равенство масс u - и d -кварков.

2. Минимум энергии вакуума в (23) определяется соотношением между напряженностью самодуального поля Λ , постоянной H , связанной с хромодинамической шкалой $\Lambda_{\text{КХД}}$, и массами кварков M_f . При определенных соотношениях между этими параметрами возможен минимум энергии вакуума при ненулевых значениях Λ , что ведет к конфайнменту кварков в КХД. Параметр Λ определяет масштаб области конфайнмента и напрямую связан с наклоном траекторий Редже в спектре адронов.

Следующей задачей является согласование параметров с основными экспериментальными данными: наклон траекторий Редже, массы адронов, ширины распадов и другие характеристики адронной физики.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Функция Грина

Наши вычисления основаны на следующих формулах:

$$\begin{aligned} G(x, \Lambda, v) &= \frac{1}{-\square + \Lambda^4 x^2 + v} \delta(x) = \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^2} \left(\frac{2\Lambda^2 s}{\text{sh}(2\Lambda^2 s)} \right)^2 e^{-vs - \Lambda^2 x^2 / (2 \text{th}(2\Lambda^2 s))}. \end{aligned} \quad (25)$$

Параметр s_0 определяет УФ-регуляризацию по “собственному времени”.

Пусть $A, B > -4\Lambda^2$, тогда

$$\begin{aligned} W_{s_0}(\Lambda, A, B) &= \frac{1}{V} \text{Tr} \ln \left[\frac{-\square + \Lambda^4 x^2 + A}{-\square + B} \right] = \\ &= \frac{4\Lambda^4}{(4\pi)^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s} \left[\frac{e^{-Bs}}{(2\Lambda^2 s)^2} - \frac{e^{-As}}{\text{sh}^2(2\Lambda^2 s)} \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

При $A = B = M^2$

$$W_{s_0}(\Lambda, M) = 4\Lambda^4 \left[-\frac{1}{(4\pi)^2} W\left(\frac{2\Lambda^2}{M^2}\right) + \frac{1}{3} Z(M) \right].$$

Здесь

$$\begin{aligned} W(X) &= \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-s} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{(Xs)^2} + \frac{1}{\text{sh}^2(Xs)} \right] = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{15} X^2 + O(X^3), & X \rightarrow 0, \\ \frac{1}{3} \ln X + O(1), & X \rightarrow \infty. \end{cases} \end{aligned} \quad (27)$$

Для качественных рассуждений удобно ввести приближенную функцию

$$W(X) \approx W_a(X) = \frac{1}{6} \ln \left(1 + \frac{2}{5} X^2 \right), \quad (28)$$

имеющую то же самое асимптотическое поведение прималых и больших X , что и $W(X)$.

УФ-расходимость параметризована константой

$$Z(A) = \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-As},$$

определяющей нормировку регуляризованного выражения $W(0) = 0$.

Фермионная энергия вакуума. Вычислим фермионную часть энергии вакуума:

$$E_F(\Lambda, M) = - \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \text{Tr} \ln \left[\frac{-\hat{\nabla}(x) + M}{-\hat{\partial} + M} \right] = - \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{2V} \text{Tr} \ln \left[\frac{-\hat{\nabla}^2(x) + M^2}{-\square + M^2} \right].$$

В представлении

$$\hat{\nabla}^2(y) = \nabla^2(y) - 4\Lambda^2 \mathcal{P} \quad (29)$$

матрица $\mathcal{P}$ обладает свойствами

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \frac{i}{4} (\gamma b \gamma) = \frac{i}{4} (\gamma_\mu b_{\mu\nu} \gamma_\nu), \quad \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}, \\ \mathcal{P}^2 &= \frac{1}{2} (1 \mp \gamma_5), \quad \mathcal{P}^3 = \mathcal{P}, \quad \text{Tr} \mathcal{P} = 0, \quad \text{Tr} \mathcal{P}^2 = 2. \end{aligned} \quad (30)$$

Удобно ввести проекционные операторы

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(0)} &= I - \mathcal{P}^2, \quad \mathcal{R}_{(\pm)} = \frac{1}{2} (\mathcal{P}^2 \pm \mathcal{P}), \\ \mathcal{R}_{(j)} \mathcal{R}_{(j')} &= \delta_{jj'} \mathcal{R}_{(j)}, \quad j, j' = -, 0, +, \\ \text{tr} \mathcal{R}_{(0)} &= 2, \quad \text{tr} \mathcal{R}_{(\pm)} = 1. \end{aligned} \quad (31)$$

Разложив оператор (29) по этим проекционным операторам, легко получить

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left[\frac{-\hat{\nabla}^2 + M^2}{-\square + M^2} \right] &= \text{Tr} \ln \left[\frac{-\square + \Lambda^4 y^2 + M^2}{-\square + M^2} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left[\frac{-\square + \Lambda^4 y^2 + M^2 + 4\Lambda^2}{-\square + M^2} \right] + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left[\frac{-\square + \Lambda^4 y^2 + M^2 - 4\Lambda^2}{-\square + M^2} \right]. \end{aligned}$$

Воспользовавшись формулой (26), получим после простых преобразований

$$E_F(\Lambda, M) = 4\Lambda^4 \left\{ \frac{2}{(4\pi)^2} W \left(\frac{2\Lambda^2}{M^2} \right) + \frac{4}{3} Z(M) \right\}.$$

Функция $W(X)$ определена формулой (27).

Бозонная энергия вакуума. Вклад в энергию вакуума заряженного бозона массы m равен

$$\begin{aligned} E_B(\Lambda, m) &= \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \text{Tr} \ln \left[\frac{-\nabla^2 + m^2}{-\square + m^2} \right] = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \text{Tr} \ln \left[\frac{-\square + \Lambda^2 x^2 + m^2}{-\square + m^2} \right] = \\ &= 4\Lambda^4 \left\{ -\frac{1}{(4\pi)^2} W \left(\frac{2\Lambda^2}{m^2} \right) + \frac{1}{3} Z(m) \right\}. \end{aligned}$$

Используемый нами метод вычислений проще вычислений Швингера [9].

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Матрицы $\check{n}$ и $\check{n}$

Пусть в группе $SU_c(3)$ задан некоторый постоянный вектор n^a . Он характеризуется двумя групповыми инвариантами

$$(nn) = (n^a n^a) = 1, \quad (nnnd) = (n^a n^b n^c d^{abc}).$$

Существует система координат, где этот вектор имеет вид

$$n^a = \delta^{a3} n^3 + \delta^{a8} n^8 = \delta^{a3} \sin \theta + \delta^{a8} \cos \theta$$

и

$$(nnnd) = (n^a n^b n^c d^{abc}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin^2 \theta (3 \cos \theta - \sin \theta).$$

Вообще говоря, угол θ должен определяться условием минимума вакуумной энергии, однако мы поступим проще – выберем его равным нулю, т.е. $n^a = \delta^{a8}$.

В кварковый лагранжиан входит постоянная (3×3) -матрица

$$\check{n} = (nt) = t^8 = \text{diag}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

В глюонный лагранжиан входит постоянная (8×8) -матрица в присоединенном представлении, которая эрмитова и в диагональной форме имеет вид

$$\check{n} = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{diag}(1, 1, -1, -1, 0, 0, 0, 0).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Производная $\nabla_\mu(x)$

Рассмотрим оператор

$$\nabla_\mu(x) = \partial_\mu + i\Lambda_g^2 b_{\mu\nu} x_\nu, \quad [\nabla_\mu, \nabla_\nu] = -2i\Lambda_g^2 b_{\mu\nu}, \quad \Lambda_g = \frac{\sqrt{3}}{4} \Lambda^2.$$

Справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla^2] &= -4i\Lambda_g^2 b_{\mu\nu} \nabla_\nu, \quad \nabla_\mu b_{\mu\nu} \nabla_\nu = -4i\Lambda_g^2, \\ \nabla_\mu \nabla^2 \nabla_\mu &= (\nabla^2)^2 + (4\Lambda_g^2)^2, \quad \nabla_\mu \frac{1}{\nabla^2} \nabla_\mu = 1, \\ e^{-s\nabla^2} \nabla_\mu e^{s\nabla^2} &= [\delta_{\mu\nu} \text{ch}(4\Lambda_g^2 s) - ib_{\mu\nu} \text{sh}(4\Lambda_g^2 s)] \nabla_\nu. \end{aligned}$$

Пусть

$$R_{\mu\nu} = -\nabla^2 \delta_{\mu\nu} + i4\Lambda_g^2 b_{\mu\nu}, \quad R_{\mu\nu}^{-1} = \frac{-\nabla^2 \delta_{\mu\nu} - i4\Lambda_g^2 b_{\mu\nu}}{\nabla^4 - (4\Lambda_g^2)^2},$$

тогда

$$(\nabla R^{-1} \nabla) = \nabla_\mu R_{\mu\nu}^{-1} \nabla_\nu = 1.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Нулевые моды

Пусть оператор R , в нашем случае это

$$R = -\square + \Lambda^4 x^2 - 4\Lambda^2, \quad (32)$$

имеет нулевые собственные значения, т.е.

$$RU_n = \lambda_n U_n, \quad U_n \in L^2, \quad \lambda_0 = 0, \quad \lambda_n > 0, \quad n > 0.$$

Проблема состоит в том, как вычислить функциональный интеграл (20), в котором присутствуют нулевые моды в Гауссовской мере. Существует прямой способ устранения нулевых мод, изложенный в работе [10], где без всяких объяснений непосредственно в функциональный интеграл (20) вводится δ -функция, выбрасывающая нулевые моды из интеграла. Мы же хотим здесь изложить физические аргументы, оправдывающие такое выбрасывание.

Итак, сформулируем проблему: найти функцию Грина, т.е. обратный оператор, которая в случае отсутствия нулевых мод ($\lambda_n > 0, n \geq 0$) может быть представлена как

$$G = \frac{1}{R} = \sum_n |U_n\rangle \frac{1}{\lambda_n} \langle U_n| = |U_0\rangle \frac{1}{\lambda_0} \langle U_0| + \sum_{n>0} |U_n\rangle \frac{1}{\lambda_n} \langle U_n|.$$

Очевидно, это представление не имеет смысла в случае существования нулевых собственных значений $\lambda_0 = 0$.

Построение функции Грина, т.е. обратного оператора $G = 1/R$, эквивалентно решению следующей задачи: найти решение уравнения

$$R\Phi = J \quad (33)$$

с подходящими краевыми условиями. В КТП требуется, чтобы решение было квадратично интегрируемо, т.е. $\Phi \in L^2$, если $J \in L^2$.

Уравнение (33) решим следующим образом. Поскольку собственные функции $\{U_n\}$ оператора R образуют полную систему, разложим функцию J в ряд

$$J = \sum_{n=0}^{\infty} j_n U_n,$$

а функцию Φ будем искать в виде

$$\Phi = j_0 \phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n U_n.$$

Подставив это разложение в уравнение (33), получим $c_n = j_n/\lambda_n$ для $n > 0$ и уравнение на функцию ϕ_0 :

$$R\phi_0 = U_0.$$

Это уравнение имеет решение, следовательно, для функции Грина получим

$$G = \frac{1}{R} = |\phi_0\rangle\langle U_0| + |U_0\rangle\langle\phi_0| + \sum_{n>0} |U_n\rangle\frac{1}{\lambda_n}\langle U_n|. \quad (34)$$

Эта функция Грина удовлетворяет уравнению

$$RG = |U_0\rangle\langle U_0| + \sum_{n>0} |U_n\rangle\langle U_n| = I,$$

т.е. действительно является функцией Грина оператора R , обладающего нулевыми собственными значениями.

Казалось бы, задача решена. Однако решение ϕ_0 не квадратично-интегрируемо, т.е. $\phi_0 \notin L^2$! В случае оператора (32)

$$\phi_0(x) \sim e^{\Lambda^2 x^2/2}, \quad x^2 \rightarrow \infty.$$

Следовательно, решение не существует в пространстве L^2 и $\Phi = GJ \notin L^2$. Если мы теперь встанем на стандартную точку зрения квантовой механики (только квадратично-интегрируемые функции имеют физический смысл), то мы должны поступить стандартным образом, т.е. исключить эти решения из допустимых функций, описывающих какое-либо физическое состояние.

Таким образом, в качестве функции Грина следует использовать

$$G_{\text{reg}} = \sum_{n>0} |U_n\rangle\frac{1}{\lambda_n}\langle U_n| \in L^2. \quad (35)$$

Проще всего регуляризованную функцию Грина можно найти, воспользовавшись равенствами

$$G(z) = \frac{1}{R+z}, \quad G_{\text{reg}}(z) = G(z) - \frac{1}{z} \text{Res}_{|\zeta=0} G(\zeta),$$

$$G_{\text{reg}} = G_{\text{reg}}(0) = \sum_{n>0} |U_n\rangle\frac{1}{\lambda_n}\langle U_n| \in L^2.$$

Обратимся теперь к функциональному интегралу

$$Z = \int D\Phi \exp\left(-\frac{1}{2}(\Phi R \Phi) + gW[\Phi]\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\delta\Phi} G \frac{\delta}{\delta\Phi}\right)\right) e^{gW[\Phi]} = \sum_n \frac{g^n}{n!} Z_n.$$

Слагаемые Z_n не определены математически, поскольку при использовании функции Грина (34) интегралы, определяющие Z_n , расходятся при больших x . Мы определим функциональный интеграл как

$$Z \doteq \int D\Phi \exp\left(-\frac{1}{2}(\Phi R_{\text{reg}} \Phi) + gW[\Phi]\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\delta\Phi} G_{\text{reg}} \frac{\delta}{\delta\Phi}\right)\right) e^{gW[\Phi]},$$

где используется регуляризованная функция Грина (35).

Получим $G_{\text{reg}}(x)$ для оператора R (32), воспользовавшись формулами приложения 1:

$$\begin{aligned} G_{\text{reg}}(x) &= \left(\frac{1}{-\square + \Lambda^4 x^2 - 4\Lambda^2 + z} \delta(x) \right)_{\text{reg}} = \\ &= \frac{4\Lambda^4}{(4\pi)^2} \int_0^\infty ds \frac{2 - e^{-4\Lambda^2 s}}{\text{sh}^2(2\Lambda^2 s)} e^{-\Lambda^2 x^2 / (2 \text{th}(2\Lambda^2 s))} + \\ &+ \frac{8\Lambda^2}{(4\pi)^2} e^{-\Lambda^2 x^2 / 2} \int_0^\infty dt (e^{-\Lambda^2 x^2 (\text{cth}(t) - 1)/2} - 1). \end{aligned} \quad (36)$$

В частности,

$$G_{\text{reg}} = G_{\text{reg}}(0) = \frac{4\Lambda^4}{(4\pi)^2} \int_{s_0}^\infty ds \frac{2 - e^{-4\Lambda^2 s}}{\text{sh}^2(2\Lambda^2 s)}.$$

Существенно, что при $\Lambda \rightarrow 0$ мы получаем правильный пропагатор безмассового скалярного поля:

$$\lim_{\Lambda \rightarrow 0} G_{\text{reg}}(x) = \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} e^{-x^2/4s} = \frac{1}{(2\pi)^2 x^2}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Кварковая энергия вакуума

Вычислим кварковый вклад $E_f(\Lambda)$ в энергию вакуума. Имеем

$$\begin{aligned} E_q(\Lambda) &= - \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \text{Tr} \ln \left[\frac{\gamma_\mu \check{\nabla}_\mu(x) - M}{\gamma_\mu \partial_\mu - M} \right] = \\ &= - \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{2V} \text{Tr} \ln \left[\frac{-(\gamma_\mu \check{\nabla}_\mu(x))^2 + M^2}{-\square + M^2} \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

В слагаемом с производной $\gamma_\mu \check{\nabla}_\mu(x) = (\gamma \partial_x) + i\Lambda^2 \check{n}(\gamma b x)$ цветовую матрицу $\check{n}$ выберем в диагональной форме, тогда и производная будет диагональна в цветовом пространстве:

$$\gamma_\mu \check{\nabla}_\mu(x) = (\gamma \partial_x) + i\check{\Lambda}^2(\gamma b x),$$

где

$$\check{\Lambda}^2 = \Lambda^2 \check{n} = \text{diag}\left(\frac{\Lambda^2}{2\sqrt{3}}, \frac{\Lambda^2}{2\sqrt{3}}, -\frac{\Lambda^2}{\sqrt{3}}\right).$$

Далее имеем

$$(\gamma_\mu \check{\nabla}_\mu(x))^2 = \nabla^2(y) - 4\check{\Lambda}^2 \mathcal{P}, \quad (38)$$

где матрица $\mathcal{P}$ совпадает с (30). Введем проекционные операторы (31) и разложим оператор (38) по этим проекционным операторам, тогда вакуумная энергия в выражении (37) для каждого отдельного кварка может быть представлена в форме

$$E_q(\Lambda) = - \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \text{Tr} \left\{ \ln \left[\frac{-\square + \check{\Lambda}^4 y^2 + M^2}{-\square + M^2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \ln \left[\frac{-\square + \check{\Lambda}^4 y^2 + M^2 - 4\check{\Lambda}^2}{-\square + M^2} \right] + \frac{1}{2} \ln \left[\frac{-\square + \check{\Lambda}^4 y^2 + M^2 + 4\check{\Lambda}^2}{-\square + M^2} \right] \right\}.$$

Воспользовавшись формулами приложения 1, получим

$$E_q(\Lambda) = 4\Lambda^4 \left\{ \frac{1}{(4\pi)^2} W_q \left(\frac{2\Lambda^2}{M^2} \right) + \frac{2}{3} Z(M) \right\}, \\ W_q(X) = \frac{1}{3} \left[W \left(\frac{X}{2\sqrt{3}} \right) + 2W \left(\frac{X}{\sqrt{3}} \right) \right] = \begin{cases} \frac{1}{60} X^2 + O(X^3), & x \rightarrow 0, \\ \frac{1}{3} \ln X + O(1), & x \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Функция $W(X)$ определена в (27).

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

Глюонная энергия вакуума

Вычислим глюонную энергию вакуума. Рассмотрим функциональный интеграл (20). Прежде всего вычислим $\Delta(A)$. Согласно определению (см., например, [11])

$$\Delta(A) \int d\omega \delta(\nabla A^\omega) = 1.$$

В нашем приближении в низшем порядке теории возмущений ($g = 0$) имеем

$$\Delta(A) = \text{Tr} \ln \left(1 - \frac{1}{\square} i \Lambda_g^2 (x_\mu b_{\mu\nu} \partial_\nu) \right) = 1.$$

Матрица $\check{n}$ рассмотрена в приложении 2. Интегрирование в (20) по полям, соответствующим нулевым собственным значениям матрицы $\check{n}$, дает единицу. Поэтому ее можно рассматривать как (4×4) -матрицу с собственными значениями $\pm \sqrt{3}/4$, т.е.

$$\Lambda^2 \check{n} \Rightarrow \Lambda_g^2 \text{diag}(1, 1, -1, -1), \quad \Lambda_g^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \Lambda^2.$$

Функциональный интеграл для $\mathcal{Z}_{Vg}^{(0)}$ в (20) не зависит от знака тензора $b_{\mu\nu}$ и поэтому может быть представлен в форме произведения

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{Vg}^{(0)} &= (\mathcal{Y}_V)^4, \\ \mathcal{Y}_V &= \frac{1}{N_A} \int DA \delta(\nabla_\mu A_\mu) \exp\left(-\frac{1}{2} \int_V dx (A_\mu R_{\mu\nu} A_\nu)\right), \\ R_{\mu\nu} &= -\nabla^2 \delta_{\mu\nu} + 4i\Lambda_g^2 b_{\mu\nu}, \quad \nabla_\mu(x) = \partial_\mu + i\Lambda_g^2 b_{\mu\nu} x_\nu.\end{aligned}\tag{39}$$

Постоянная N_A определена условием $\mathcal{Y}_V|_{\Lambda=0} = 1$. Вычислим интеграл

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_V &= \frac{1}{N_A} \int DA \delta(\nabla A) e^{-(ARA)/2} = \frac{1}{N_A} \int DS \int DA e^{-(ARA)/2 + i(S\nabla A)} = \\ &= \left(\frac{\text{Det } R_{\mu\nu}^0}{\text{Det } R_{\mu\nu}}\right)^{1/2} \int DS e^{-(S\nabla R^{-1}\nabla S)/2} = \left(\frac{\text{Det } R_{\mu\nu}^0}{\text{Det } R_{\mu\nu}} \frac{1}{\text{Det}(\nabla R^{-1}\nabla)}\right)^{1/2} = \\ &= \text{Det}\left[\frac{-\square}{-\nabla^2 + 4\Lambda_g^2}\right] \text{Det}\left[\frac{-\square}{-\nabla^2 - 4\Lambda_g^2}\right].\end{aligned}$$

Таким образом, для глюонного вклада в энергию вакуума получаем представление

$$E_g(\Lambda) = 4 \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \text{Tr} \left\{ \ln \left[\frac{-\square + \Lambda_g^4 x^2 + 4\Lambda_g^2}{-\square} \right] + \ln \left[\frac{-\square + \Lambda_g^4 x^2 - 4\Lambda_g^2}{-\square} \right] \right\}.$$

Оператор $-\square + \Lambda_g^4 x^2 - 4\Lambda_g^2$ содержит нулевые собственные значения. Обсуждение проблемы нулевых мод дано в приложении 4, согласно которому имеем

$$\begin{aligned}E_g(\Lambda_g) &= 8 \frac{4\Lambda_g^4}{(4\pi)^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s} \left[\frac{1}{(2\Lambda_g^2 s)^2} - \frac{\text{ch}(4\Lambda_g^2 s)}{\text{sh}^2(2\Lambda_g^2 s)} + 2 \right] = \\ &= \frac{3}{2} \frac{4\Lambda_g^4}{(4\pi)^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s} \phi(2\Lambda_g^2 s),\end{aligned}\tag{40}$$

где

$$\phi(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{\text{sh}^2 t}.$$

Выделим расходящуюся часть из интеграла:

$$\begin{aligned}\int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s} \phi(2\Lambda_g^2 s) &= \int_{s_0}^a \frac{ds}{s} \phi(0) + \int_{s_0}^a \frac{ds}{s} [\phi(2\Lambda_g^2 s) - \phi(0)] + \int_a^{\infty} \frac{ds}{s} \phi(2\Lambda_g^2 s) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{3} \ln\left(\frac{a}{s_0}\right) + \int_0^{2\Lambda_g^2 a} \frac{dt}{t} [\phi(t) - \phi(0)] + \int_{2\Lambda_g^2 a}^{\infty} \frac{dt}{t} \phi(t) = \\ &= \frac{1}{3} \ln\left(\frac{H^2}{2s_0}\right) - \frac{1}{3} \ln\left(\frac{2\Lambda_g^2}{H^2}\right), \quad a = \frac{1}{H^2}.\end{aligned}$$

Поскольку в глюонном лагранжиане отсутствует какая-либо шкала длин, здесь возникает неопределенный параметр H , который должен быть связан с хромодинамической энергетической шкалой $\Lambda_{\text{КХД}}$.

Окончательно глюонный вклад в энергию вакуума записывается в виде

$$E_g(\Lambda) = -\frac{4\Lambda^4}{(4\pi)^2} \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2\Lambda^2}{H^2}\right), \quad (41)$$

где слагаемое, содержащее s_0 , удалено соответствующей перенормировкой.

Благодарности. Работа поддержана грантом РФФИ № 04-02-17370.

Список литературы

- [1] *E. S. Swan.* Aspects of confinement: a brief review. hep-ph/0310089.
- [2] *P. Maris, G. D. Roberts.* Int. J. Mod. Phys. E. 2003. V. 12. P. 297; nucl-th/0301049.
- [3] *G. V. Efimov, G. Ganbold.* Phys. Rev. D. 2002. V. 65. P. 054012.
- [4] *G. V. Efimov, S. N. Nedelko.* Phys. Rev. D. 1995. V. 51. P. 176; Eur. Phys. J. C. 1998. V. 1. P. 343.
- [5] *Ya. V. Burdanov, G. V. Efimov.* Phys. Rev. D. 2001. V. 64. P. 014001.
- [6] *G. K. Savvidy.* Phys. Lett. B. 1977. V. 71. P. 133.
- [7] *H. Leutwyler.* Nucl. Phys. B. 1981. V. 179. P. 129.
- [8] *A. C. Вайтман.* Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей. М.: Наука, 1968.
- [9] *J. Schwinger.* Phys. Rev. 1951. V. 82. P. 664.
- [10] *D. I. Dyakonov, V. Yu. Petrov.* Nucl. Phys. B. 1984. V. 245. P. 269.
- [11] *А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию 13.I.2004 г.,
после доработки 24.III.2004 г.