Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Юрьев, Watch-dog-эффекты Белавкина–Колокольцова в интерактивно управляемых стохастических динамических видеосистемах, *ТМФ*, 1996, том 106, номер 2, 333–352

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1120>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 16:06:25

Д. В. Юрьев¹⁾

WATCH-DOG-ЭФФЕКТЫ
БЕЛАВКИНА–КОЛОКОЛЬЦОВА В ИНТЕРАКТИВНО
УПРАВЛЯЕМЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ
ДИНАМИЧЕСКИХ ВИДЕОСИСТЕМАХ

Излагаются результаты исследований стохастических свойств долговременного поведения непрерывно наблюдаемого (и интерактивно управляемого) квантово-полевого волчка. Обсуждаются приложения к интерактивно управляемым стохастическим динамическим компьютерным видеосистемам.

1. ВВЕДЕНИЕ

Основная трудность, возникающая при попытках учесть высокочастотный тремор глаз в “подвижном видении” (ПВ) [1–4], как, впрочем, и во многих других интерактивных видеосистемах, заключается в том, что в этом случае решение полных эволюционных уравнений в реальном времени требует порядка 10^8 – 10^9 арифметических операций в секунду, а также специальных мониторов с повышенной частотой порядка 300 кадров в секунду. Таким образом, адекватный учет тремора возможен лишь на узком классе компьютеров при постановке научных экспериментов для изучения особенностей зрения в интерактивных компьютерографических системах [1, 2], что представляется неудобным при использовании ПВ как вспомогательного компьютерографического средства, например, при интерактивной визуализации двумерной квантовой теории поля [4]. В этом случае разумно использовать вместо тремора некоторое его стохастическое моделирование. Подобный подход ведет к “стохастическому подвижному видению” (СПВ), эволюционные стохастические уравнения которого сходны с уравнениями Белавкина [5]. По-видимому, интерактивные эффекты ПВ и СПВ похожи в целом, поскольку интерактивные процессы, учитывающие саккады, не стохастизируются; хотя вовсе не кажется несомненным, что они совпадают (например, в ситуации “бокового зрения”). Комбинирование СПВ с кластерной и сплайновой техниками позволяет работать на компьютерах с быстродействием порядка 10^5 – 10^7 арифметических операций в секунду, а также использовать более простые периферийные устройства, в то время как все упомянутые обстоятельства делают учет тремора в обычном ПВ практически бессмысленным в настоящее время.

¹⁾Предварительная англоязычная версия данной работы содержится в электронном архиве Национальных лабораторий в Лос Аламосе (США) по адаптации и самоорганизации под номером adap-org/9410001 (октябрь, 1994).

Однако все эти преимущества СПВ не являются решающими ввиду постоянного прогресса в компьютерных высоких технологиях — использование распределенных параллельных вычислений позволяет снизить требования к обычному ПВ, учитывающему тремор, до $\sim 10^6$ арифметических операций в секунду. Глубинное преимущество СПВ представляется более фундаментальным и заключается в наличии watch-dog-эффектов Белавкина–Колокольцова ([6], см. также работы [7], в которых рассматривался “watch-dog-эффект” или “квантовый парадокс Зенона”) в достаточно естественных и общих моделях СПВ (например, при некоторых значениях внутренних параметров, описывающих степень локализации взаимодействия). Это означает *априори* ограниченность размеров стохастических “зерен” изображения в процессе наблюдения, которые, более того, могут быть сведены к нескольким пикселям путем надлежащего выбора *независимого* управляющего параметра (так называемой “*точности измерения*” [5, 6]). Watch-dog-эффект может рассматриваться как более слабая, но вместе с тем и более “ручная” форма неразрушения изображения, чем квазистационарность [1, 2]: существует широкий класс моделей, в которых watch-dog-эффект присутствует, а квазистационарность нет, например канонические проективные G -гипермультиплеты [2] (см. также [3]).

Таким образом, переход от ПВ к СПВ частично решает *априори* основную проблему динамики в интерактивных психоинформационных компьютерографических системах [1, 2] — проблему неразрушения изображения интерактивными процессами (т.е. их стабильности при наблюдении). Конечно же, СПВ не решает проблему неразрушения полностью *априори*, гарантируя только конечность размера стохастических зерен в процессе наблюдения, что означает отсутствие диффузии деталей изображения. Однако отдельные детали могут смещаться под управлением медленных движений глаз, что может привести к разрушению изображения в целом. Но, по-видимому, условия квазистационарности [1, 2] вместе с watch-dog-эффектом (альтернативой которым является динамическое интерактивное экранирование) обеспечивают полное долговременное неразрушение изображения.

Отметим также, что априорное неразрушение изображения в СПВ подтверждает наличие апостериорного неразрушения в обычном ПВ, учитывающем тремор глаз.

Цель данной статьи состоит в математическом изучении watch-dog-эффектов Белавкина–Колокольцова в СПВ.

Суммируя сформулированные выше аргументы, можно заключить, что подобные исследования мотивированы взаимоналожением двух проблем: 1) трудности учета высокочастотного тремора глаз в обычном ПВ, что ведет к необходимости введения стохастического моделирования тремора; 2) основной проблемы динамики в интерактивных психоинформационных компьютерографических системах, т.е. проблемы неразрушения изображения интерактивными процессами; это мотивирует исследование долговременных свойств (нелинейной) стохастической динамики в СПВ. Таким образом, первая проблема объясняет, почему “стохастическое подвижное видение” требует рассмотрения, вторая же поясняет выбор конкретных вопросов, на которые необходимо дать ответ.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ СВП [8]

2.1. Математическая постановка задачи. Во-первых, СПВ, так же как и обычное, является интерактивной компьютерографической системой, эволюция изображе-

ний в которой управляется движением глаз в соответствии с *динамическими законами перспективы*, т.е. динамическими уравнениями, задающими эволюцию изображения в процессе наблюдения (см. приложения А и Б или [3, 4]). Таким образом, определение ПВ или СПВ заключается в указании этих законов. Подчеркнем специально, что наш интерес ограничивается внутренней *конструктивной* точкой зрения [9] на интерактивные видеосистемы, рассматривающей их *как таковые*, а не как *дескриптивные* средства для моделирования или визуализации каких бы то ни было физических процессов (как в [4]). Подобный подход может показаться слишком узким, но он достаточно эффективен, и разумно принять его в качестве основы для дальнейшего. Динамические законы для ПВ приведены в приложении А (или в [1–4]). СПВ имеет несколько отличающиеся законы. Различие может быть кратко сформулировано следующим образом: 1) высокочастотный тремор глаз отделяется от остальных движений глаз и 2) стохастизируется таким образом, что становится *всего целиком внутренним процессом* в системе, так что 3) его характеристики не определяются полностью реальными движениями глаз и могут быть усилены.

Подобное качественное описание СПВ достаточно для понимания результатов, а также их значения для приложений, но для вывода необходимы более строгие определения. Однако читатель, не заинтересованный в формальных выкладках, может опустить все нижеследующие математические конструкции и ограничиться некоторыми замечаниями.

Отметим еще раз, что определить СПВ – значит указать его динамические законы перспективы (динамические уравнения, управляющие эволюцией изображения в процессе наблюдения), и мы предпочтем сделать это в чисто математических терминах. Формализм будет сходен с формализмом для обычного ПВ и будет также основываться на концепциях двумерной квантовой теории поля. Интерпретации математических результатов и их значимость для приложений будут детально комментироваться на протяжении всего изложения, а также в заключении и замечаниях после него.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть H – канонический проективный G -гипермультиплет, $A_t(u, \dot{u})$ – угловое поле (удовлетворяющее уравнениям Эйлера–Арнольда $\dot{A}_t = \{H, A_t\}$, где гамильтониан $H \in S^1(\mathfrak{g})$ является решением структурного уравнения Вирасоро) или его конечномерная решетчатая аппроксимация (приложение А или [4]). Пусть $J(u)$ – дополнительный q_R -аффинный ток (приложение А или [2, 3]) (или его конечномерная решетчатая аппроксимация из приложения А или [4]), коммутирующий с группой G . Стохастическое эволюционное уравнение

$$d\Phi(t, [\omega]) = A_t(u, \dot{u})\Phi(t, [\omega])dt + \lambda J(u)\Phi(t, [\omega])d\omega,$$

где $d\omega$ – стохастический дифференциал броуновского движения (т.е. $\frac{d\omega}{dt}$ – белый шум), будет называться (*квантово-полевыми*) *формулами Эйлера–Белавкина–Колокольцова*, параметр λ будет называться *точностью измерения* (ср. [5]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Указанные формулы являются редуцированной версией более общих формул

$$d\Phi(t, [\omega]) = \{A_t(u, \dot{u}) + \alpha\lambda^2 : J^2(u) : \} \Phi(t, [\omega])dt + \lambda J(u)\Phi(t, [\omega])d\omega \quad (\alpha > 0),$$

которые также будут называться (*квантово-полевыми*) *формулами Эйлера–Белавкина–Колокольцова*; $\lambda^2 : J^2(u) :$ – квантово-полевой контрчлен белавкинского типа (ср. [5, 6]), где $J^2(u) :$ – первичное поле спина 2, полученное из тока $J(u)$ с помощью усеченной конструкции Сугавары [2].

Здесь $u = u(t)$ и $\dot{u} = \dot{u}(t)$ – медленные переменные [1] наблюдения (точка взора и относительная скорость ее смещения), тремор моделируется стохастическим дифференциалом $d\omega$, λ – *независимый* параметр, $\Phi = \Phi(t, [\omega]) \in H$ – коллективное обозначение для множества всех непрерывно распределенных характеристик изображения [1, 3, 4], q_R – независимый внутренний параметр модели, измеряющий степень локализации взаимодействия (локальный случай отвечает $q_R = 0$). Наиболее важная область значений q_R задается соотношением $q_R \ll 1$, и все дальнейшие результаты будут формулироваться именно для таких значений q_R . Стохастические формулы Эйлера–Белавкина–Колокольцова, спаренные с детерминированными уравнениями Эйлера–Арнольда, задают динамику, которая может рассматриваться в качестве *кандидата* для описания эволюции *непрерывно наблюдаемого (и интерактивно управляемого) квантово-полевого волчка* [2].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Необходимо специально подчеркнуть, что в СПВ λ является *независимым* параметром, который может быть выбран произвольным образом (например, столь большим, насколько это потребуется). Это означает, что медленные движения, включая саккады, и тремор расщепляются, первые рассматриваются так же, как и в обычном ПВ, в то время как последний стохастизируется с возможностью *произвольного программного усиления* его амплитуды.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Как отмечалось выше, внутренний параметр q_R характеризует степень локализации взаимодействия человек–компьютер в ПВ или СПВ. Естественно предположить, что watch-dog-эффекты Белавкина–Колокольцова появляются при достаточно малых значениях q_R и что условие $q_R \rightarrow 0$ ведет к уменьшению стохастических зерен изображения. И на самом деле будет показано, что стохастические зерна уменьшаются при q_R , стремящемся к нулю, и возрастающем λ .

Ниже мы будем в основном иметь дело с конечномерными решеточными аппроксимациями (ср. [6]) и ассоциированными эволюционными уравнениями в H^* (см. приложение А или [4]), сохраняя неизменными все обозначения; Φ будет определяться на компакте (экране монитора или кластере). В этом случае формулы Эйлера–Белавкина–Колокольцова превращаются в обычные (матричные) стохастические дифференциальные уравнения диффузионного типа [10], и, следовательно, $\Phi = \Phi_t = \Phi(t, [\omega])$ является диффузионным марковским процессом [11].

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Решеточные аппроксимации обычного (т.е. без учета наблюдения и управления) квантово-полевого волчка (в этом случае угловые поля редуцируются к обычным токам) активно изучались Санкт-Петербургской группой под руководством акад. Л. Д. Фаддеева [12]. Основные трудности (как технические, так и принципиальные) в их исследованиях были вызваны локальностью обычных ($q_R = 0$) аффинных токов. Однако общие q_R -аффинные токи нелокальны, и их дискретизация легко осуществима (см. приложение А или [4]). Очень интересно получить решеточные алгебры токов [12] из естественным образом дискретизованных q_R -аффинных токов предельным переходом $q_R \rightarrow 0$, но эта проблема несколько выходит за рамки статьи.

Тот факт, что обычный квантово-полевой волчок может быть получен как частный случай нашей конструкции ($\lambda = 0$, $q_R = 0$, $A(u, \dot{u}) = J(u)\dot{u}$, где $J(u)$ – ток) мотивирует рассмотрение нашего объекта как непрерывно наблюдаемого (и интерактивно управляемого) квантово-полевого волчка. Непрерывное наблюдение идентифицируется с включением стохастического члена ($\lambda \neq 0$), в то время как интерактивное управление – с присутствием полных угловых полей $A(u, \dot{u}) = \sum_k B_k(u)\dot{u}^k$, где $B_k(u)$ – первичные поля спина k , вместо одних лишь токов. Кажется, что эти аргументы достаточны для нашего терминологического нововведения.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Формулы Эйлера–Белавкина–Колокольцова *постулируются* в качестве динамических законов перспективы в СПВ. Таким образом, их следует рассматривать как *математическое определение СПВ*. С этой точки зрения переход от ПВ к СПВ состоит в: 1) расщеплении медленных движений глаз, включая саккады, и тремора; 2) стохастизации тремора; 3) освобождении управляющего параметра λ так, что его значение может быть искусственно выбрано произвольным и не определяется полностью действительными параметрами движения глаз. Таким образом, основное различие ПВ и СПВ заключается в том, что тремор в ПВ является *внешним процессом*, управляющим эволюцией компьютерографической картины, в то время как его стохастизация в СПВ представляет собой *всёцело внутренний процесс* (в духе *эндофизики* проф. О.Е. Ресслера [13]) и его параметры могут быть надлежащим образом подобраны вручную.

Просуммируем материал п. 2.1. Отметим еще раз, что обычное ПВ является интерактивной компьютерографической системой, эволюция изображения в которой управляется движениями глаз в соответствии с некоторыми динамическими законами перспективы, выписанными в приложении А или в [1–4]. СПВ является аналогичной интерактивной компьютерографической системой, но с несколько иными динамическими законами перспективы. А именно, в динамических законах перспективы обычного ПВ высокочастотный тремор глаз отделяется от прочих движений глаз и стохастизируется, становясь *всёцело внутренним процессом* в системе, а его характеристики перестают полностью определяться движениями глаз и допускают возможность произвольного искусственного изменения. Например, параметры внешнего реального процесса (тремора глаз) могут быть *преобразованы и ремасштабированы*, для того чтобы получить характеристики внутреннего виртуального процесса (стохастизации тремора). Для понимания результатов явный вид динамических законов перспективы не является необходимым, хотя он, конечно же, незаменим при их выводе, проделанном в п. 2.2. Читатель, интересующийся только приложениями, может пропустить этот пункт и ограничиться только комментарием и замечанием в его конце.

2.2. Математический анализ. Положим $D_A(\Phi) = \langle A^2 - \langle A \rangle_\Phi^2 \rangle_\Phi$, $\langle A \rangle_\Phi = \frac{(A\Phi, \Phi)}{(\Phi, \Phi)}$ [6]. Отметим, что можно рассматривать формулы Эйлера–Белавкина–Колокольцова с переопределенным квантованным полем $\tilde{J}(u) = J(u) - \langle J(u) \rangle$ вместо q_R -аффинного тока $J(u)$, чтобы добиться полного подобия с оригинальными уравнениями Белавкина квантовой фильтрации [5, 6], если потребовать от скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$ трансляционной и масштабной инвариантности. E_Φ означает математическое ожидание по отношению к стандартной винеровской мере для процесса наблюдения с начальными данными Φ [6].

ЛЕММА 1. $(\forall \Phi_0) \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} E_{\Phi_0} D_J(\Phi(t, [\omega])) = K \lambda^{-2} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$.

Выражение слева (умноженное на λ^2 , т.е. в точности константа K) называется *коэффициентом Колокольцова* качества измерения [6].

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. В самом деле,

$$\lambda^2 \limsup_{t \rightarrow \infty} E_{\Phi_0} D_J(\Phi(t, [\omega])) = \limsup_{t \rightarrow \infty} E_{\Phi_0} D_{\lambda J}(\Phi(t, [\omega])) = \limsup_{t \rightarrow \infty} E_{\tilde{\Phi}_0} D_J(\tilde{\Phi}(t, [\omega])),$$

где $\tilde{\Phi}$ – решение формул Эйлера–Белавкина–Колокольцова с $\lambda = 1$ и с начальными данными $\tilde{\Phi}_0$, равными Φ_0 , ремасштабированными в λ раз (последнее равенство следует из масштабной однородности формул Эйлера–Белавкина–Колокольцова). Как следствие результатов [6] (зависимость q_R -аффинного тока J от u несущественна ввиду трансляционной инвариантности) выражение $\limsup_{t \rightarrow \infty} E_{\tilde{\Phi}_0} D_J(\tilde{\Phi}(t, [\omega]))$, являясь коэффициентом Колокольцова $\kappa(A_t, J)$ для пары (A_t, J) , не зависит от $\tilde{\Phi}_0$, а следовательно, и от λ .

ЗАМЕЧАНИЕ 6. набросок доказательства поучителен сам по себе. Вместо трудоемких вычислений стационарной вероятностной меры (ср. [6]) и сложных оценок ее λ -поведения (что нетривиально проделать даже в простейшем двумерном случае, рассмотренном в [6]) мы используем общие теоретико-групповые свойства (трансляционную инвариантность и масштабную однородность) формул Эйлера–Белавкина–Колокольцова, сочетая их с сильными результатами [6] о существовании коэффициента Колокольцова $K = \kappa(A_t, J)$ и его независимости от начальных данных.

КОММЕНТАРИЙ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ. При рассмотрении наброска доказательства необходимо сделать два замечания относительно деталей. Во-первых, ввиду зависимости углового поля $A_t(u, \dot{u})$ от параметров управления постоянной стационарной вероятностной меры может не быть; однако мы полагаем управляющие параметры медленными, и поэтому можно *допустить*, что стационарная вероятностная мера медленно изменяется в зависимости от текущих значений управляющих параметров (конечно же, ясно, что это предположение вполне естественно с точки зрения математической физики, однако оно предполагает определенный “*пропуск*” в строгом доказательстве с точки зрения чистой математики; но всякая “*чистка*” представляется здесь неуместной). Управляющие параметры варьируются в пределах некоторого компакта (в непрерывной версии или даже конечного множества в решеточной версии), так что можно определить коэффициент Колокольцова как точную верхнюю грань всех коэффициентов, вычисленных по мерам из этого компактного или конечного множества (именно это обстоятельство объясняет появление “ $\limsup$ ” в лемме 1). Во-вторых, отметим, что масштабной инвариантностью можно пользоваться лишь во всем неограниченном пространстве, в то время как приходится иметь дело с ограниченными областями (экраном монитора или кластером); переход к компактным областям может привести лишь к тому, что коэффициент Колокольцова K как функция от λ будет убывать при λ , стремящемся к бесконечности.

Пусть Q – оператор координаты $Qf(x) = xf(x)$; J° – сингулярная часть тока J (приложение А или [1, 4]), т.е. $J^\circ(u) = (Q - u)^{-1}$.

ЛЕММА 2. $E_{\Phi_0}(D_J(\Phi(t, [\omega])) - D_{J \circ}(\Phi(t, [\omega]))) \rightrightarrows 0$, если $q_R \rightarrow 0$.

Отметим, что утверждение леммы наивно выполняется лишь в непрерывной версии; после конечномерной решеточной аппроксимации выражение “ $\rightrightarrows 0$ ” следует понимать в том смысле, что левая часть становится равномерно меньше, чем достаточно малая константа ϵ (зависящая от выбранной аппроксимации), когда q_R стремится к нулю.

НАМЕК НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма следует из явных вычислений собственных функций q_R -аффинного тока $J(u)$.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. $(\forall \Phi_0) \lim_{\lambda \rightarrow \infty, q_R \rightarrow 0} \limsup_{t \rightarrow \infty} E_{\Phi_0} D_Q(\Phi(t, [\omega])) = 0$.

Утверждение теоремы является очевидным следствием двух предшествующих лемм; оно остается в силе и в многопользовательском режиме [14]. Конечно же, утверждение теоремы наивно выполняется лишь в непрерывной версии (ср. с леммой 2); после конечномерной решеточной аппроксимации равенство предела нулю означает, что этот предел становится меньше достаточно малой константы ϵ , зависящей от выбранной аппроксимации.

КОММЕНТАРИЙ. Итак, мы получили, что watch-dog-эффект Белавкина–Колокольцова в СПВ появляется при всех значениях точности измерения λ для достаточно малых значений параметра q_R . Более того, если λ возрастает и q_R стремится к 0, стохастические зерна могут быть уменьшены до нескольких пикселей.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Отметим, что watch-dog-эффекты Белавкина–Колокольцова присутствуют лишь в моделях СПВ с достаточно малыми значениями внутреннего параметра q_R , измеряющего локализацию взаимодействия ($q_R = 0$ соответствует локальному случаю). Однако q_R , будучи внутренним параметром, может быть выбран произвольно, чтобы удовлетворить условию $q_R \ll 1$.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

3.1. Обзор результатов. Итак, результаты могут быть просуммированы. Во-первых, подчеркнем еще раз, что основное отличие СПВ от обычного ПВ заключается в том, что стохастизация тремора глаз в последнем считается внутренним процессом, амплитудные характеристики которого могут быть *усилены*. Во-вторых, для *всех значений* λ (независимого параметра стохастизации, измеряющего усиление амплитуды тремора, т.н. точности измерения) наблюдаются watch-dog-эффекты Белавкина–Колокольцова для стохастической динамики изображения в СПВ (это означает, что стохастические зерна изображения остаются равномерно ограниченными по времени) для достаточно малых значений дополнительного внутреннего параметра q_R ; это подтверждает наличие watch-dog-эффектов также в моделях обычного ПВ с тем же q_R . Более того, в-третьих, если значение λ достаточно велико, в то время как $q_R \ll 1$, стохастические зерна СПВ-изображения могут быть уменьшены до нескольких пикселей. Подобный эффект, производимый путем усиления λ , может эффективно использоваться в практической компьютерной графике для разных целей, как это отмечалось во введении. Некоторое более детальное обсуждение значимости полученных результатов для других приложений содержится в п. 3.2.

3.2. Замечания о приложениях. Помимо теоретической важности для интерактивной визуализации двумерной квантовой теории поля результаты работы могут быть использованы для: 1) разработки компьютерографических интерактивных систем психофизиологической саморегуляции и когнитивной стимуляции [3, 4] (ср. [15, 16]), 2) интерактивного компьютерографического моделирования “квантового компьютера” [4] (см. в [17] общую дискуссию о “квантовых компьютерах” и их использовании для ускоренных вычислений, так же как и [18] о фундаментальных трудностях при построении “физического” неинтерактивного “квантового компьютера”), которое может использоваться для решения актуальной задачи ускорения обработки комплексных сенсорных данных в (видеосенсорных) сетях “виртуальной реальности” [9], 3) создания компьютерографических сетей телестетической коммуникации [4].

Обсудим значимость полученных результатов для указанных приложений.

КОММЕНТАРИЙ: ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ. Пункт 2 прямо связан с результатами, так как поддержание когерентности является основной проблемой для “квантовых компьютеров”. Как отмечалось ранее [4], ПВ может рассматриваться как интерактивное компьютерографическое моделирование “квантовокомпьютерного” поведения. Наличие независимых параметров (подобных λ) в СПВ позволяет поддерживать когерентность в течение длительного времени с произвольной точностью в интерактивном режиме.

Кроме того, подобное интерактивное компьютерографическое моделирование более подходит, чем исходный “квантовый компьютер”, для задач “виртуальной реальности” ввиду имплицитного присутствия графических данных в интерактивном режиме. Реорганизация этих данных путем вторичного синтеза изображений [19] и их представление в ПВ или СПВ может обеспечить ускоренную параллельную обработку комплексных сенсорных данных в подобных системах.

Пункты 1 и 3 косвенно связаны с полученными результатами, так как они зависят от решения главной проблемы динамики в интерактивных психоинформационных компьютерографических системах (проблемы неразрушения изображения). В случае пункта 3 ее решение позволяет передавать графически организованную информацию без диссипации и дополнительных ошибок. В случае пункта 1 ее решение позволяет рассматривать долговременные интерактивные процессы самоорганизации, которые играют решающую роль при функционировании систем психофизиологической саморегуляции и когнитивной стимуляции.

3.3. Замечания об обобщениях и перспективах. На деле рассматриваются случайные (дискретные) моделирования непрерывного броуновского движения и стохастических дифференциалов. Весьма интересно заменить их возмущениями (например, некоторой версией слабо самоотталкивающих или слабо самопритягивающих блужданий или их приближений с конечной памятью).

Во-первых, эти обобщения мотивируются фактом, что броуновское движение — далеко не самая лучшая стохастизация тремора глаз. На самом деле оно может считаться лишь первым приближением для тремора, в то время как существуют более сложные, но и более адекватные модели. По-видимому, watch-dog-эффекты сохраняются любой формой слабо самопритягивающих возмущений, которые являются наиболее реалистичными кандидатами для моделирования тремора.

Во-вторых, представляется интересным использовать отщепление высокочастотного

тремора от прочих движений глаз и внутренний характер его стохастического моделирования для организации различных “интеллектуальных” форм взаимодействия “человек–компьютер” (т.н. систем “*полуискусственного интеллекта*”). При подобном подходе стохастизированный тремор играет роль внутреннего наблюдателя (ср.[13]), чье присутствие является критическим для самоорганизации графических данных в системах полуискусственного интеллекта [9]. Но эта тема (хотя и связанная с вышеупомянутым пунктом 1) кажется столь многогранной и столь интригующей, что данная работа – не самое лучшее место для продолжения обсуждения.

Автор признателен проф. В.Н. Колокольцову за внимание и многочисленные обсуждения, а также сотрудникам лаборатории теоретической физики Высшей Нормальной школы (Париж) и Института математической физики им. Эрвина Шредингера (Вена) за гостеприимство и прекрасную атмосферу.

ПРИЛОЖЕНИЕ А ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПВ [3, 4]

1. Интерпретационная геометрия и аномальные виртуальные реальности. Интерпретационная геометрия возникает при формализации геометрических аспектов интерактивных психоинформационных видеосистем. Математические данные в подобных системах существуют в форме взаимосвязи внутреннего геометрического образа (фигуры) в субъективном пространстве наблюдателя и внешнего компьютерографического представления; последнее включает видимые элементы (чертежи фигуры) и невидимые (например, аналитические выражения и алгоритмы построения этих чертежей). Процесс сопоставления геометрического образа (фигуры) во внутреннем пространстве наблюдателя компьютерографическому представлению (видимым и невидимым элементам) называется *трансляцией*; видимый объект может быть неидентичен фигуре, в этом случае отдельные видимые элементы могут рассматриваться как модули, чья трансляция реализуется независимо; трансляция называется *интерпретацией*, если трансляция отдельных модулей осуществляется в зависимости от результата трансляции предшествующих.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Фигура, получающаяся в результате интерпретации, называется *интерпретационной фигурой*; чертеж интерпретационной фигуры называется *символическим*.

Компьютерно-геометрическое описание математических данных в интерактивных информационных системах тесно связано с концепцией аномальной виртуальной реальности. Отметим, что существует несколько подходов к основаниям геометрии: в одном из них базисным геометрическим понятием является пространство (среда, поле), геометрия описывает различные свойства пространства и его состояний, которые называются чертежами фигур; представляется удобным следовать этому подходу при описании геометрии интерактивных информационных систем; роль среды играет аномальная виртуальная реальность, ее состояния суть чертежи фигур.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *А. Аномальной виртуальной реальностью (ABP) в узком смысле* называется определенная система правил нестандартной начертательной геометрии, приспособленных к реализации на видеокomпьютере (или мультисенсорной системе “виртуальной реальности” [20]); *ABP в широком смысле* включает в себя изобра-

жение в киберпространстве, выполненное согласно указанной системе правил; мы будем использовать термин в узком смысле.

Б. *Натурализацией* называется сопоставление АВР абстрактной геометрии или физической модели; будем говорить, что АВР *натурализует* модель и модель *транскендирует* натурализующую АВР. *Визуализация в узком смысле* заключается в сопоставлении объектам абстрактной геометрии или процессам в физических моделях их изображений или видеодинамик в АВР; *визуализация в широком смысле* также включает предшествующую натурализацию.

В. АВР, объекты которой зависят от наблюдателя, называется *интенциональной АВР (ИАВР)*; обобщенные законы перспективы в ИАВР включают уравнения динамики наблюдаемых изображений, помимо стандартных (геометрических) законов перспективы; процесс наблюдения в ИАВР состоит из физического процесса наблюдения и виртуального процесса интендирования, который управляет эволюцией изображений согласно динамическим законам перспективы.

В ИАВР наблюдаемые объекты проявляют себя в соотношении с наблюдателем, который, воздействуя на них некоторым образом, определяет, фиксирует их наблюдаемые состояния, так что сам объект мыслится как потенциальность состояния из заданного спектра, в то время как реализация состояния зависит также и от наблюдателя; символические чертежи интерпретационных фигур представляются состояниями некоторой ИАВР.

Отметим, что различие начертательной геометрии интерактивных видеосистем от классической заключается в присутствии цвета как важного носителя визуальной информации; редукция к контурной графике, принятая в стандартной начертательной геометрии, слишком ограничительна, в то время как использование цвета широко распространено в научной визуализации [21]. Подход к интерактивным информационным видеосистемам, основывающийся на понятии АВР, позволяет рассматривать исследование структуры цветового пространства как интересную проблему начертательной геометрии, ввиду того что это пространство может быть гораздо шире обычного и его структура может быть достаточно сложной.

Г. Совокупность всех непрерывно распределенных визуальных характеристик изображения в АВР называется *аномальным цветовым пространством*; элементы аномального цветового пространства нецветовой природы называются *оберцветами*, а транскендирующие их в абстрактной модели величины – “*скрытыми светами*”. *Цветоперспективной системой* называется совокупность обобщенных законов перспективы в фиксированном аномальном цветовом пространстве.

2. Квантовая проективная теория поля и ПВ. По-видимому, знаменательным фактом является то, что двумерная квантовая теория поля может быть выражена в терминах интерпретационной геометрии, так что различные объекты этой теории представляются подходящими интерпретационными фигурами. Ключевую роль в этом играет ПВ, являющееся ИАВР, натурализующей *квантовую проективную теорию поля (КПТП)* (см. работы [22, 2] и ссылки в них); процесс натурализации описан в [1–4]. Сконцентрируем внимание на базисных понятиях КПТП, чьей натурализацией ПВ является.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. А. *КТП-операторной алгеброй (операторной алгеброй квантовой теории поля, вертексной операторной алгеброй, вертексной алгеброй)*

называется пара $(H, t_{ij}^k(\vec{x}))$: H – линейное пространство, $t_{ij}^k(\vec{x})$ – H -значное тензорное поле такое, что $t_{im}^l(\vec{x})t_{jk}^m(\vec{y}) = t_{ij}^m(\vec{x} - \vec{y})t_{mk}^l(\vec{y})$. Введем операторы $l_{\vec{x}}(e_i)e_j = t_{ij}^k(\vec{x})e_k$, тогда выполняются следующие соотношения: $l_{\vec{x}}(e_i)l_{\vec{y}}(e_j) = t_{ij}^k(\vec{x} - \vec{y})l_{\vec{y}}(e_k)$ (*операторное разложение*) и $l_{\vec{x}}(e_i)l_{\vec{y}}(e_j) = l_{\vec{y}}(l_{\vec{x}-\vec{y}}(e_i)e_j)$ (*дуальность*).

Б. КПП-операторная алгебра $(H, t_{ij}^k(u); u \in \mathbb{C})$ называется (*производной*) *КПП-операторной алгеброй*, если: 1) H – сумма модулей Верма V_α над $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ со старшими векторами v_α и старшими весами h_α , 2) $l_u(v_\alpha)$ – первичное поле спина h_α , т.е.

$$[L_k, l_u(v_\alpha)] = (-u)^k (u\partial_u + (k+1)h_\alpha)l_u(v_\alpha),$$

где L_k – $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -генераторы $([L_i, L_j] = (i-j)L_{i+j}, i, j = -1, 0, 1)$, 3) выполняется (производное) правило порождения потомков $([L_{-1}l_u(f)] = l_u(L_{-1}f))$.

В. (Производная) КПП-операторная алгебра $(H, t_{ij}^k(u))$ называется *проективным G -гипермультиплетом*, если группа G действует в ней автоморфизмами, иными словами, в пространстве H реализуется представление группы G , операторы представления коммутируют с действием $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ и $l_u(T(g)f) = T(g)l_u(f)T(g^{-1})$. Линейные пространства старших векторов фиксированного веса образуют подпредставления группы G , называемые *мультиплетами* проективного G -гипермультиплета.

Опишем ключевые моменты процесса натурализации КПП, приводящего к ПВ. Несмотря на то что абстрактная модель (КПП) имеет квантовый характер, изображения в ее натурализации (ПВ) классичны; переход от квантово-полевой модели к классической осуществляется по стандартным правилам, а именно классическое поле с тейлоровскими коэффициентами $|a_k|^2$ сопоставляется элементу $\sum a_k L_{-1}^k v_\alpha$ КПП-операторной алгебры. После натурализации три классических поля отождествляются с полями трех базисных цветов (красного, зеленого и голубого), остальные поля – с полями оберцветов; в данный момент времени на экране монитора изображаются лишь цветовые характеристики, в то время как восприятие оберцветов определяется интенциональным характером АВР ПВ. А именно, во время эволюции изображения, вызванной наблюдением, возникают колебания цветовых полей в соответствии с динамическими законами перспективы ПВ (формулами Эйлера или уравнениями Эйлера–Арнольда). Эти колебания зависят от характера наблюдения (например, от движений глаз или других динамических параметров); тем самым изображение начинает зависеть и от распределения оберцветов, что позволяет интерпретировать их как некоторые *интерактивные колебания* обычных цветов. Таким образом, оберцвета ПВ суть колебания обычных цветов некоторого типа и структуры, динамически определяемые параметрами процесса наблюдения; трансцендирующие их “скрытые света” – квантованные поля в базисной абстрактной модели КПП. Присутствие $SU(3)$ -симметрии классического цветового пространства позволяет предположить, что КПП-операторная алгебра базисной модели является проективным $SU(3)$ -гипермультиплетом.

3. Квантовая конформная и q_R -конформная теории поля; квантово-полевые аналоги волчков Эйлера–Арнольда.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. А. Старший вектор T веса 2 в КПП-операторной алгебре называется *конформным тензором энергии-импульса*, если

$$T(u) := l_u(T) = \sum L_k(-u)^{k-2},$$

где операторы L_k образуют алгебру Вирасоро:

$$[L_i, L_j] = (i - j)L_{i+j} + \frac{i^3 - i}{12}c \cdot I.$$

Множество старших векторов J^α веса 1 в КПП-операторной алгебре называется семейством *аффинных токов*, если

$$J^\alpha(u) := l_u(J^\alpha) = \sum J_k^\alpha(-u)^{k-1},$$

где операторы J_k^α образуют *аффинную алгебру Ли*:

$$[J_i^\alpha, J_j^\beta] = c_\gamma^{\alpha\beta} J_{i+j}^\gamma + k^{\alpha\beta} \cdot i\delta(i+j) \cdot I.$$

Если задано семейство аффинных токов в КПП-операторной алгебре, то можно построить конформный тензор энергии-импульса с помощью конструкции Сугавары. Далее мы рассмотрим некоторые специальные деформации квантовых конформных теорий поля в классе квантовых проективных теорий, так называемые *квантовые q_R -конформные теории поля*; основную роль в их построении играет *алгебра Лобачевского* (ср. [23]). В реализации Пуанкаре плоскости Лобачевского (реализации в единичном комплексном диске) метрика Лобачевского записывается в виде $w = q_R^{-1} dz d\bar{z} / (1 - |z|^2)^2$; по ней можно построить C^* -алгебру (алгебру Лобачевского), которая является квантованием указанной метрики по Березину. А именно, рассмотрим пару переменных t и t^* , удовлетворяющих соотношениям $[tt^*, t^*t] = 0$, $[t, t^*] = q_R \times (1 - tt^*)(1 - t^*t)$ (или в эквивалентном виде $[ss^*, s^*s] = 0$, $[s, s^*] = (1 - q_R ss^*)(1 - q_R s^*s)$, где $s = (q_R)^{-1/2}t$). Эти переменные представляются ограниченными операторами в модуле Верма над $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ веса $h = \frac{q_R^{-1}+1}{2}$ (указанное соотношение между h и q_R будет предполагаться всюду далее); если модуль Верма реализован многочленами одной комплексной переменной z и действие $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ имеет вид $L_{-1} = z$, $L_0 = z\partial_z + h$, $L_1 = z(\partial_z)^2 + 2h\partial_z$, то переменные t и t^* задаются тензорными операторами $D = \partial_z$ и $F = z/(z\partial_z + 2h)$. Эти операторы ограничены, если $q_R > 0$, и, следовательно, можно построить порожденную ими банахову алгебру, удовлетворяющую описанным выше коммутационным соотношениям, с естественной структурой C^* -алгебры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Б. Старший вектор T веса 2 в КПП-операторной алгебре называется *q_R -конформным тензором энергии-импульса*, если

$$T(u) := l_u(T) = \sum L_k(-u)^{k-2},$$

где операторы L_k образуют q_R -алгебру Вирасоро:

$$\begin{aligned} [L_i, L_j] &= (i - j)L_{i+j} \quad (i, j \geq -1; i, j \leq 1), \\ [L_2, L_{-2}] &= H(L_0 + 1) - H(L_0 - 1), \\ H(t) &= t(t+1)(t+3h-1)^2 / ((t+2h)(t+2h-1)) \end{aligned}$$

(ср. [24]). Совокупность старших векторов J^α веса 1 в КПП-операторной алгебре называется семейством q_R -аффинных токов, если

$$J^\alpha(u) := l_u(J^\alpha) = \sum J_k^\alpha(-u)^{k-1},$$

где операторы J_k^α образуют q_R -аффинную алгебру Ли:

$$\begin{aligned} J_k^\alpha &= J^\alpha T^{-k} f_k(t), & [J^\alpha, J^\beta] &= c_\gamma^{\alpha\beta} J^\gamma, \\ T f(t) &= f(t+1)T, & [T, J^\alpha] &= [f(t), J^\alpha] = 0, \end{aligned}$$

$f_k(t) = t \dots (t-k)$, если $k \geq 0$, и $((t+2h) \dots (t+2h-k+1))^{-1}$, если $k \leq 0$.

Отметим, что q_R -аффинные токи и q_R -конформный тензор энергии-импульса суть в точности $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -первичные поля в модуле Верма V_h над $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ спина 1 и 2, соответственно; если этот модуль реализован, как прежде, то

$$\begin{aligned} J_k &= \partial_z^k, & J_{-k} &= z^k / ((\xi+2h) \dots (\xi+2h+k-1)); \\ L_2 &= (\xi+3h)\partial_z^2, & L_1 &= (\xi+2h)\partial_z, & L_0 &= \xi+h, \\ L_{-1} &= z, & L_{-2} &= z^2 \frac{\xi+3h}{(\xi+2h)(\xi+2h+1)}, & \xi &= z\partial_z. \end{aligned}$$

Таким образом, генераторы J_k^α q_R -аффинной алгебры выражаются через образующие C^* -алгебры Лобачевского: $J_k^\alpha = J^\alpha t^k$, если $k \geq 0$, и $J^\alpha (t^*)^{-k}$, если $k \leq 0$, ($[J^\alpha, J^\beta] = c_\gamma^{\alpha\beta} J^\gamma$). Это значит, что q_R -аффинная алгебра допускает гомоморфизм в тензорное произведение универсальной обертывающей алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, порожденной J^α , и алгебры Лобачевского. (Производные) КПП-операторные алгебры, порожденные q_R -аффинными токами, суть канонические проективные G -гипермультиплеты. Первичные поля

$$V_k(u) = \exp \left(k \left(Q + R \left(\int V_1(u) du \right) \right) \right)$$

($R(u^n) = -\operatorname{sgn}(n)u^n$, т.е. R – преобразование Гильберта

$$f(\exp(it)) \mapsto -\frac{i}{2\pi} \int f(\exp(i(t-s))) \cot(s/2) ds;$$

заряд Q имеет вид

$$Q(z^n) = \sum_{j=0}^{n-1} (j+2h)^{-1} z^n;$$

[25]) неотрицательного целого спина k в модуле Верма V_h , образующие замкнутую КПП-операторную алгебру (подалгебру алгебры $\operatorname{Vert}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$ [22], порождаемую вершинными операторными полями $B_k(u; \nabla_h)$ [26]), не являются локализованными. Представляют интерес вычисления T -экспоненты и монодромии q_R -аффинного тока; они могут быть произведены путем возмущения простых формул для сингулярной части тока, и, как утверждалось в [1], возмущения с помощью регулярной части не меняют монодромию.

Пусть H – произвольная прямая сумма модулей Верма над $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ и P – тривиальное расслоение над $\mathbb{C}$ со слоями, изоморфными H ; P естественно тривиализовано и допускает структуру $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -однородного расслоения. $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -инвариантная голоморфная фислерова связность $A(u, \dot{u})$ в P называется угловым полем; угловое поле $A(u, \dot{u})$ разлагается по $(\dot{u})^k$, коэффициенты этого разложения суть $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -первичные поля; уравнение $\dot{\Phi}_t = A(u, \dot{u})\Phi_t$, где Φ_t принадлежит H , а $u = u(t)$ – функция сканирования, является квантово-полевым аналогом формул Эйлера; этот аналог описывает эволюцию ПВ-изображения при наблюдении (более строго, эволюция определена в двойственном пространстве H^* формулами $\dot{\Phi}_t = A^T(u, \dot{u})\Phi_t$). В каноническом проективном G -гипермультипликте можно построить и квантово-полевой аналог уравнений Эйлера–Арнольда $\dot{A} = \{\mathcal{H}, A_t\}$, где угловое поле $A(u, \dot{u})$ рассматривается как элемент канонического проективного G -гипермультиплета, будучи разложенным по $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -первичным полям этого гипермультиплета, $\mathcal{H}$ – квадратичный $SU(3)$ -инвариантный элемент $S(\mathfrak{g})$, $\{\cdot, \cdot\}$ – канонические скобки Пуассона в $S(\mathfrak{g})$. Комбинируя уравнения Эйлера–Арнольда с формулами Эйлера, получим полные динамические законы перспективы в ПВ. Основной чертой этих законов является их *проективная инвариантность*, так что они осуществляют естественное обобщение обычной начертательной геометрии на интерпретационный случай. Проективная инвариантность полностью фиксирует формулу Эйлера, в то время как она позволяет, конечно же, заменить уравнения Эйлера–Арнольда другими (гамильтоновыми или даже негамильтоновыми). Однако новые уравнения должны также обеспечивать $SU(3)$ -инвариантность динамических законов перспективы.

4. Организация ПВ-киберпространства. ПВ-киберпространство состоит из пространства изображений V_I с фундаментальной длиной (шагом решетки) Δ_I и пространства наблюдения V_O с фундаментальной длиной Δ_O ; в пространстве V_I формируются изображения, в то время как пространство V_O используется для данных о движении глаз; естественно потребовать $\Delta_O \ll A_{tr}$, где A_{tr} – амплитуда тремора, и $\Delta_I \gg \Delta_O$. Формулы Эйлера записываются в виде $\dot{\Phi}_t = A(u, \dot{u})\Phi_t$, $A(u, \dot{u})$ может быть приближенно представлено как $M_1(t)\dot{u}V_1(u) + M_2(t)\dot{u}^2V_2(u) + M_3(t)\dot{u}^3V_3(u)$, где $\Phi_t \in H$ (или в виде $\dot{\Phi}_t = A^T(u, \dot{u})\Phi_t$, $\Phi_t \in H^*$); $M_i(t)$ – данные волчка Эйлера–Арнольда, $V_i(u)$ – $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -первичные поля в модуле Верма V_h , которые записываются как

$$V_i(u) = (-u)^{-i}(W_i(u) + W_i^*(u) - D_0^i) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (-u)^{-i-j} D_j^i,$$

$$W_i(u) = \sum_{j \geq 0} (-u)^{-j} D_j^i, \quad W_i^*(u) = \sum_{j \geq 0} (-u)^j D_{-j}^i, \quad D_{-j}^i = (D_j^i)^*,$$

где $*$ – сопряжение в унитаризуемом модуле Верма. Тензорные операторы D_k^i ($k \geq 0$, $i = 1, 2, 3$) имеют вид

$$D_k^i = P_{i,k}(z\partial_z)\partial_z^k, \quad P_{1,k}(t) = 1, \quad P_{2,k}(t) = t + (k+1)h,$$

$$P_{3,k}(t) = t^2 + ((k+2)h + k/2)t + h(2h+1)(k+1)(k+2)/6.$$

Отметим, что поля $W_i^T(u)$ в локальных $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -модулях V_h^* задаются весьма простыми

выражениями:

$$\begin{aligned} W_1^T(u) &= \frac{1}{1-u^{-1}x}, & W_2^T(u) &= -\frac{x}{1-u^{-1}x}\partial_x + \frac{h}{(1-u^{-1}x)^2}, \\ W_3^T(u) &= \frac{x^2}{1-u^{-1}x}\partial_x^2 - (2h+1)\frac{x}{(1-u^{-1}x)^2}\partial_x + \frac{h(2h+1)}{3}\frac{1}{(1-u^{-1}x)^3}. \end{aligned}$$

Матрица $A^T(u, \dot{u})$ размера $N \times N$ (N – число точек V_I) разлагается в сумму трех членов $M_i(t)\dot{u}^i V_i(u)$ ($i = 1, 2, 3$), где $V_i^T(u)$ – матрицы размера $N \times N$, зависящие от параметра u ; этот параметр может иметь M различных значений (M – число точек V_O). Матрицы $W_i^T(u)$ легко вычисляются, а полные матрицы $V_i^*(u)$ получаются из них при помощи сопряжения в унитаризуемом локальном $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -модуле V_h^* . Производные должны быть заменены всюду на конечные разности по стандартной схеме. Формулы для $M_i(t)$ могут быть найдены в [27]. В заключение отметим, что при реализации ПВ-киберпространства разумно использовать аппаратно независимую виртуальную видеопамять.

5. Неалександрийская геометрия ПВ. Отметим, что большинство классических геометрий использует некоторый постулат, который мы будем называть александрийским, но не включает явно его в свою аксиоматику.

АЛЕКСАНДРИЙСКИЙ ПОСТУЛАТ. *Любое утверждение, справедливое для некоторой геометрической конфигурации, остается в силе, если эта конфигурация рассматривается как часть некоторой большей конфигурации.*

Александрийский постулат означает, что добавление каких бы то ни было дополнительных объектов к данной геометрической конфигурации не оказывает влияния на эту конфигурацию. Имеет смысл привести хорошо известный пример неалександрийской геометрии (которую можно назвать эйнштейновой).

ПРИМЕР НЕАЛЕКСАНДРИЙСКОЙ ГЕОМЕТРИИ. Объекты этой геометрии суть взвешенные точки и линии. Взвешенные точки суть пары (обычная точка на плоскости, вещественное число). Они задают (сингулярную) метрику на плоскости посредством уравнений эйнштейнова типа $R(x) = \sum m_\alpha \delta(x - x_\alpha)$, где (x_α, m_α) – взвешенные точки и $R(x)$ – скалярная кривизна. Линии суть геодезические этой метрики. Базисное отношение – отношение инцидентности.

Кинематика и процесс рассеяния фигур могут быть проиллюстрированы на другом важном примере неалександрийской геометрии – геометрии солитонов [28]. Основные объекты KdV-солитонной геометрии – движущиеся точки на прямой; конфигурация точек задает n -солитонное решение уравнения KdV $u_t = 6uu_{xx} - u_{xxx}$ формулами $u(x, t) = -2(\log(\det(E + C)))_{xx}$, где $C_{nm} = c_n(t)c_m(t)\exp(-(\varkappa_n + \varkappa_m)t)/(\varkappa_n + \varkappa_m)$, $c_n(t) = c_n(0)\exp(4\varkappa_n^3 t)$; подобное решение обладает асимптотической свободой, т.е. может быть асимптотически представлено в виде суммы 1-солитонных решений (солитонов) при $t \rightarrow \pm\infty$. Солитон имеет вид $u(x, t) = -2\varkappa^2 \cosh^{-2}(\varkappa(x - 4\varkappa^2 t - \varphi))$, где фаза φ – начальное положение солитона и $v = 4\varkappa^2$ – его скорость; рассеяние солитонов двухчастичное, сдвиг фаз равен $\varkappa_1^{-1} \log|(\varkappa_1 + \varkappa_2)|/|(\varkappa_1 - \varkappa_2)|$ для первого (быстрого) солитона и $-\varkappa_2^{-1} \log|(\varkappa_1 + \varkappa_2)|/|(\varkappa_1 - \varkappa_2)|$ для второго (медленного) солитона. Все примеры солитонных геометрий подтверждают то предположение, что нарушение александрийского постулата связано с взаимодействием геометрических фигур

и, в частности, подобное взаимодействие может определяться нелинейным характером эволюции. Иная форма взаимодействия реализуется в теориях, объекты которых (частицы) воздействуют друг на друга через классическое поле, динамические уравнения для которого могут быть и линейны, но локальны (пример – теория Лоренца).

Рассмотрим теперь интерпретационное рассеяние. Как отмечалось выше, фигура в интерпретационной геометрии описывается парой $(\Phi^{\text{int}}, \Phi^{\text{ext}})$, где Φ^{int} – внутренний образ в субъективном пространстве наблюдателя, а Φ^{ext} – его внешний компьютерографический чертеж; Φ^{int} – результат интерпретации Φ^{ext} . Естественно предположить, что Φ^{int} зависит от Φ^{ext} функционально: $\Phi_t^{\text{int}} = \Phi^{\text{int}} \left[\Phi_{\tau \leq t}^{\text{ext}} \right]$ и, как правило, нелинейно; более того, если Φ^{ext} обладает асимптотической свободой, то Φ^{int} также обладает ею. Как следствие, имеет место нетривиальное рассеяние взаимодействующих интерпретационных фигур (при этом, хотя мы не знаем явного вида динамических уравнений для Φ^{int} , их решения тем не менее могут рассматриваться априори как солитоноподобные ввиду предположений), таким образом, интерпретационные геометрии являются неалександрийскими; подчеркнем специально, что нарушение александрийского постулата осуществляется на уровне самих фигур, но не наблюдается на уровне чертежей.

Некоторые информационные аспекты ПВ рассмотрены во второй части работы [4].

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ПВ И СПВ ИЗ ПЕРВЫХ ПРИНЦИПОВ [8]

Данное приложение посвящено ключевым моментам ПВ: определению ПВ в компьютерографических терминах и его переводу на математический язык, т.е. выводу всего математического аппарата из первых принципов.

1. Объясним еще раз, что такое “подвижное видение”. Ответ на этот вопрос неоднозначен и зависит от выбора терминологической системы. Конечно же, он предполагает наличие некоторого интуитивного значения, но его словесное выражение определяется внешней “координатной системой” мышления. Таким образом, ПВ может быть определено двояко: 1) ПВ – интенциональная аномальная виртуальная реальность, натурализующая квантовую проективную теорию поля (см. приложение А); 2) ПВ – искусственная компьютерографическая интерактивная психоинформационная система с проективно инвариантной обратной связью, определяемой движениями глаз наблюдателя. Первое определение более абстрактно, в то время как второе более технично (в определенном смысле оба подхода дополнительные по отношению друг к другу: они интерпретируют выражение “определить что-либо” как “объяснить, что это” и “объяснить, как это сделать”, соответственно). Первый подход был развит выше. В этом приложении развивается второй подход.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. “Подвижное видение” – это искусственная компьютерографическая интерактивная психоинформационная система с проективно-инвариантной обратной связью, определяемой движениями глаз.

Обсудим это определение. Во-первых, ПВ – искусственная интерактивная информационная система (это отвечает термину “виртуальная” в первом определении). Принципы ее построения самодостаточны и не копируют автоматически никакие законы природы подобно тому, как *принципы конструирования самолета не основываются на*

физиологии птиц (этот пункт отвечает термину “аномальная”). Таким образом, ПВ пытается быть прежде всего полезной информационной конструкцией, а не моделью какого бы то ни было (пусть и очень важного) естественного феномена. Во-вторых, ПВ – компьютерографическая информационная система, т.е. информационный поток от компьютера к человеку реализуется в виде изображений на экране; также ПВ – динамическая интерактивная система, т.е. компьютер изменяет геометрические данные на экране по некоторому алгоритму, и изменения зависят от поведения наблюдателя. В-третьих, ПВ – психоинформационная интерактивная система, т.е. характеристики поведения человека, доступные компьютеру, носят бессознательный характер. В-четвертых, ПВ – весьма специальная психоинформационная система, ядро бессознательного информационного потока от человека к компьютеру геометрично, а именно состоит из геометрических данных о движении глаз. Эти данные могут быть редуцированы к координатам точки зора на экране и ее скорости. В-пятых, так как оба информационных потока интерактивной системы ПВ существенно геометричны, постулируется геометрическая связь между ними, которая облекается в форму динамических законов изображения, реализуемых при помощи некоторого алгоритма. Эти законы проективно инвариантны по отношению к одновременным проективным преобразованиям изображения и геометрических данных о зоре. Однако самоочевидное требование проективной инвариантности не определяет динамических законов полностью. Другой вид инвариантности этих законов связан с симметриями цветового пространства. В первом приближении имеется (по Максвеллу, Гельмгольцу и Юнгу) $SU(3)$ -цветовая симметрия, которая на самом деле является нарушенной. Однако приближенная $SU(3)$ -симметрия достаточно хороша в качестве математического объекта. Таким образом, потребуем $SU(3)$ -инвариантности динамических законов ПВ.

2. Сделанных предположений достаточно для математизации ПВ, т.е. вывода всего используемого аппарата из первых принципов ПВ.

Во-первых, представим все геометрические непрерывно распределенные данные об изображении некоторыми величинами $f_i(x, y)$, где (x, y) – координаты на экране. Удобно использовать киральную факторизацию $f_i(x, y) = \sum_{j,k} a_{ijk} \phi_j(z) \phi_k(\bar{z})$, где $\phi_j(z)$ – голоморфные функции комплексного переменного z . Проективная группа $PSL(2, \mathbb{C})$ (или, по меньшей мере, ее алгебра Ли $sl(2, \mathbb{C})$) действует на величинах $\phi_j(z)$ (“полях”) как на голоморфных λ -дифференциалах. Группа цвета $SU(3)$ также действует на них глобально, т.е. преобразует их по правилу, не зависящему от точки. Действия $sl(2, \mathbb{C})$ и $SU(3)$ коммутируют. Во-вторых, пусть u – комплексная координата точки зора, $\dot{u}$ – ее скорость. Естественно предположить, что динамические законы дифференциальны и что они выражают первые временные производные “полей” как линейные операторы от самих “полей” с коэффициентами, зависящими от u и $\dot{u}$. Общий вид подобных законов выписан в [1]. Полученные дифференциальные уравнения могут интерпретироваться как квантово-полевые аналоги формул Эйлера. Отметим, что квантово-полевой характер придается этим формулам лишь их интерпретацией и не выводим из первых принципов. Однако данная интерпретация представляется весьма полезной при выделении наиболее содержательных форм динамических законов. Тем не менее можно обойтись и без нее, толкуя операторы в динамических законах в чисто математической манере как вершинные операторные поля для алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$. Подобные вершинные операторные поля образуют некоторую красивую алгебраическую структуру (КПТП-операторную алгебру), описанную де-

тально в [2]. Однако динамические дифференциальные уравнения допускают также $SU(3)$ -цветовую симметрию, которая манифестирует себя как симметрия соответствующей КПП-операторной алгебры. КПП-операторные алгебры с дополнительной $SU(3)$ -симметрией описаны в [2] как проективные $SU(3)$ -гипермультиплеты. Там же рассмотрен наиболее естественный класс проективных $SU(3)$ -гипермультиплетов (канонические проективные G -гипермультиплеты, $SU(3) \subset G$). Отметим, что канонические проективные G -гипермультиплеты параметризуются вещественным числом q_R , существенно используемым в основном тексте работы.

Между тем сами по себе формулы Эйлера не являются $SU(3)$ -инвариантными, так что необходимо дополнить их. Наиболее естественный способ дополнения классических формул Эйлера — уравнения Эйлера–Арнольда. В нашем “квантово-полево” случае это означает необходимость рассмотреть операторы динамических законов (“квантово-полевых” формул Эйлера) как явно зависящие от времени и постулировать, что их эволюция управляется уравнениями Эйлера–Арнольда [2]. Последние имеют гамильтонов вид, и если гамильтониан $SU(3)$ -инвариантен, то и полные динамические законы будут $SU(3)$ -инвариантными.

Итак, базисные динамические законы ПВ в форме “квантово-полевых” формул Эйлера, спаренных с уравнениями Эйлера–Арнольда, выведены из первых принципов. Отметим, что “квантово-полевые” формулы Эйлера однозначно фиксируются требованием проективной инвариантности, в то время как уравнения Эйлера–Арнольда могут быть заменены другими уравнениями, обеспечивающими $SU(3)$ -инвариантность динамических законов. Однако уравнения Эйлера–Арнольда представляют наиболее естественный анзац.

Заметим, что ПВ является некоторой искусственной разновидностью *интерактивного зрения*, изучение которого вызывает постоянный сильный интерес. Например, небезынтересно рассмотреть эту общую проблему в контексте многопользовательских эффектов в интерпретационных геометриях [14].

3. Прокомментируем кратко приложение к работе [1], где были введены стохастические формулы Эйлера. Движения глаз неоднородны. Из них можно выделить различные составляющие, а именно: медленные движения, саккады и тремор. Последний может быть стохастизирован, т.е. смоделирован некоторым случайным процессом. Это приводит к появлению дополнительного стохастического члена в формулах Эйлера. Однако допустимо рассматривать формулы Эйлера с дополнительным членом с самого начала. В этом случае динамические законы задаются стохастическим линейным дифференциальным уравнением вида $\dot{\Phi} = A(u, \dot{u})\Phi dt + B(u, \dot{u})\Phi d\omega$, где операторные поля A и B независимы (конечно же, указанные уравнения спарены с детерминированными уравнениями Эйлера–Арнольда на A для обеспечения $SU(3)$ -инвариантности). Чтобы сохранить $SU(3)$ -инвариантность, необходимо потребовать $SU(3)$ -инвариантность B . Как следствие, наиболее естественный анзац заключается в том, чтобы связать B с $SU(3)$ -инвариантным вершинным операторным полем спина 1 (током) в проективном $SU(3)$ -гипермультиплете. Получившиеся стохастические уравнения являются формальным “квантово-полевым” аналогом уравнений Белавкина без белавкинского члена, который обеспечивает исключительные свойства неразрушения решений уравнений Белавкина. Так как это и есть тот эффект, который нам нужен для наших задач (см. основной текст), целесообразно включить “квантово-полевой” аналог члена Белавкина, определяемый $SU(3)$ -инвариантным вершинным операторным полем

спина 2, в уравнения “вручную”. Конечно же, эта операция может рассматриваться как *deus ex machina*, но в данном случае “*deus*” имеет весьма естественный характер. Итак, мы частично вывели и частично объяснили использованный в основном тексте переход от детерминированных динамических законов к их стохастическим аналогам.

Список литературы

- [1] Юрьев Д. В. // ТМФ. 1992. Т. 92. №1. С. 176–179.
- [2] Юрьев Д. В. // ТМФ. 1994. Т. 98. №2. С. 220–240.
- [3] Juriev D. Octonions and binocular mobilevision: E-print (LANL archive on Theor. High Energy Phys.): hep-th/9401047, 1994; Juriev D. Octonionic binocular mobilevision: E-print (LANL archive on Adap. Self-Org.): adap-org/9511002, 1995.
- [4] Juriev D. Visualizing 2D quantum field theory: geometry and informatics of mobilevision: E-print (LANL archive on Theor. High Energy Phys.): hep-th/9401067, 1994.
- [5] Belavkin V. P. // Phys. Lett. A. 1989. V. 144. P. 355; Belavkin V., Staszewski P. // Phys. Rev. A. 1992. V. 45. P. 1347–1356; Belavkin V. P. Nondemolition measurement, nonlinear filtering and dynamic programming of quantum stochastic processes. Lect. Notes Contr. Inform. Sci. 121. 1988; Белавкин В. П., Колокольцов В. Н. // ТМФ. 1991. Т. 89. №2. С. 163–177; Колокольцов В. Н. // Матем. заметки. 1991. Т. 50.
- [6] Kolokoltsov V. N. Long time behavior of continuously observed and controlled quantum systems (a study of the Belavkin quantum filtering equation): Preprint Institut für Mathematik, Ruhr-Universität-Bochum 204, 1993.
- [7] Chiu C. B., Sudarshan E. C. G., Misra B. // Phys. Rev. D. 1977. V. 16. P. 520–529; Misra B., Sudarshan E. C. G. // J. Math. Phys. 1977. V. 18. P. 756–763.
- [8] Juriev D. Belavkin–Kolokoltsov watch-dog- effects in interactively controlled stochastic computer-graphic dynamic systems. A mathematical study: E-print (LANL archive on Chaos & Dyn. Systems): chao-dyn/9406013, 1994; chao-dyn/9504008, 1995.
- [9] Kaneko K., Tsuda I. Constructive complexity and artificial reality: an introduction: E-print (LANL archive on Adap. Self-Org. Stoch.): adap-org/9407001, 1994.
- [10] Gihman I. I., Skorohod A. V. The theory of stochastic processes. III: Springer, 1979.
- [11] Dynkin E. B. Markov processes: Springer, 1965.
- [12] Alekseev A., Faddeev L., Semenov-Tian-Shansky M. // Commun. Math. Phys. 1992. V. 149. P. 335–345.
- [13] Rössler O. E. Endophysics // In “Real brains, artificial minds” / ed. J. L. Carti & A. Karlqvist. North Holland, 1987; Endophysics /ed. P. Weibel, O. E. Rössler, G. Kampis: Aerial Press, 1993.
- [14] Juriev D. The advantage of a multi-user mode: E-print (LANL archive on Theor. High Energy Phys.): hep-th/9404137, 1994.
- [15] Алиев Х. М., Михайловская С. М. // Психол. журн. 1986. Т. 7. №3. С. 119–129; Федотчев А. И., Бондарь А. Т. // Успехи физиол. наук. 1990. Т. 21. №1. С. 97–109; Mulholland T. B. // Int. J. Psychophys. 1990. Т. 9. С. 249–256.
- [16] Салтыков А. Б., Ильин В. И., Дронов А. А. // Психол. журн. 1993. V. 14. №5. P. 42–47.
- [17] Deutsch D. // Proc. Royal Soc. A. 1985. V. 400. P. 97–117; Deutsch D., Jozsa R. // Proc. Royal Soc. A. 1992. V. 439. P. 553–558; Jozsa R. // Proc. Royal Soc. A. 1991. V. 435. P. 563–574; Deutsch D., Barenco A., Ekert A. // Proc. Royal Soc. A. 1995. V. 449. P. 669–677; Barenco A. // Proc. Royal Soc. A. 1995. V. 449. P. 679–683.
- [18] Unruh W. G. Maintaining coherence in quantum computers: E-print (LANL archive on Theor. High Energy Phys.): hep-th/9406058, 1994.
- [19] Юрьев Д. В. Вторичный синтез изображений в электронной компьютерной фотографии: E-print (LANL archive on Adap. Self-Org. Stoch.): adap-org/9409002, 1994.
- [20] Rheingold H. Virtual reality, Summit Books. New York, Tokyo, 1991; Virtual realities. In “Visual computing” / Ed. T. L. Kunii. Springer, 1992; Virtual reality: applications and explorations / Ed. A. Wexelblat. Boston: Acad. Publ., 1993; Virtual reality: an international

- directory of research projects / Ed. J. Thompson. Meckler. Westport, 1993 ; *Burdea G., Coiffet Ph.* Virtual reality technology. New York: John Wiley & Sons, 1994.
- [21] Visualization in human-computer interaction / Eds P. Gorny, M. J. Tauber. Springer, 1990 ; Scientific visualization of physical phenomena / Ed. N. M. Patrikalakis. Springer, 1991 ; Scientific visualization: techniques and applications / Ed. K. W. Brodlie. Springer, 1992 ; Visualization '93. IEEE Computer Society Press. Los Alamitos, Calif., 1993.
- [22] *Бычков С. А., Юрьев Д. В.* // ТМФ. 1993. Т. 97. № 3. С. 336–347.
- [23] *Berezin F.* // Commun. Math. Phys. 1975. V. 40. P. 153–174.
- [24] *Roček M.* // Phys. Lett. B. 1991. V. 255. P. 554–557.
- [25] *Бычков С. А., Юрьев Д. В.* // УМН. 1991. Т. 46. № 5. С. 167–168; *Бычков С. А.* // УМН. 1992. Т. 47. № 4. С. 187–188.
- [26] *Юрьев Д. В.* // ТМФ. 1991. Т. 86. № 3. С. 338–343.
- [27] *Мищенко А. С., Фоменко А. Т.* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 12. С. 371–390.
- [28] *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов: метод обратной задачи рассеяния. М.: Наука, 1978.

Отдел математики НИИСИ РАН
 Laboratoire de Physique Théorique,
 École Normale Supérieure, Paris, France
 Erwin Schrödinger Institut für
 Mathematische Physik, Wien, Austria
 Центр математической физики и информатики “Таласса Этерия”
 denis@juriev.msk.ru

Поступила в редакцию
 19.XII.1994 г.

D. V. Juriev

BELAVKIN-KOLOKOLTSOV

**WATCH-DOG EFFECTS IN INTERACTIVELY CONTROLLED
 STOCHASTIC DYNAMICAL VIDEOSYSTEMS**

This paper contains an exposition of researches of stochastic properties of the long time behavior of a continuously observed (and interactively controlled) quantum field top. Applications to interactively controlled stochastic dynamical computer videosystems are discussed.