Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Дуплий, Идеальное строение суперконформных полугрупп, *ТМФ*, 1996, том 106, номер 3, 355–374

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1121>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 12:39:31

С. А. Дуплий

ИДЕАЛЬНОЕ СТРОЕНИЕ СУПЕРКОНФОРМНЫХ ПОЛУГРУПП

Обсуждается роль необратимых преобразований в суперструнных теориях. Приведена новая параметризация суперконформных групп, позволяющая адекватно сконструировать их идеальное расширение – суперконформные полугруппы. Последние состоят из групповой части, содержащей стандартные суперконформные преобразования, и идеальной части, абстрактная структура которой детально проанализирована. Произведена классификация всех элементов с помощью различных индексов нильпотентности. Построен идеальный ряд, определены обобщенные “векторные” и “тензорные” отношения Грина, введено несколько типов квазихарактеров, отделяющих элементы суперконформной полугруппы. Отмечается необходимость подобного рода построений в других суперсимметричных и суперквантовых моделях.

1. ВВЕДЕНИЕ

Со времени открытия суперсимметрии [1] прошло уже более двадцати лет, однако до сих пор ее влияние на абстрактно-алгебраическую структуру физической теории в большей мере было чисто символическим. Основные конструкции теории после почти очевидных модификаций наделялись приставкой “супер”, и далее построение уже суперсимметричной теории, за исключением некоторых незначительных моментов, шаг за шагом копировалось с соответствующего несуперсимметричного варианта, который одновременно обязан был быть в определенном смысле ее гладким пределом. Несмотря на успехи в построении свободной от расходимостей теории поля и суперструнных объединенных теорий [2], в рамках такого подхода суперсимметрия сама по себе не приводила к существенным изменениям или обобщениям теории в абстрактно-алгебраическом смысле. В частности, концепция суперпространства, позволявшая единым образом описать бозонный и фермионный секторы теории, была основана на введении дополнительных нильпотентных координат и использовании их наравне с обычными координатами [3]. При этом, однако, либо полностью игнорировался, либо некоторым образом обходилась тот факт, что среди объектов теории появлялись необратимые, а также делители нуля. Поэтому многие функции и отображения тоже оказывались необратимыми, но из-за этого, как это ни парадоксально с математической точки зрения, и исключались из рассмотрения при построении и анализе соответствующих супергрупп [4]. На самом деле совокупность всех преобразований некоторого множества или всех отображений некоторого топологического пространства, сохраняющих определенную структуру, образует (без ограничения на обратимость) именно полугруппу относительно композиции [5]. Бо-

лее того, “очевидна невозможность ограничиваться изучением лишь обратимых преобразований” [6, с. 40].

Отсюда можно сделать вывод о том, что последовательным с абстрактно-алгебраической точки зрения шагом должен быть совместный переход от пространства к суперпространству и от групп преобразований [7] к соответствующим *суперполугруппам*, т.е. “супер” обобщение физической теории обязано сопровождаться “полу” обобщением ее математического аппарата в целом. В глобальном смысле суперсимметричная теория должна иметь полугрупповую структуру, в то время как непосредственно наблюдаемый сектор при современных энергиях может удовлетворительно описываться ее групповой частью. Тем не менее не следует ограничиваться изучением лишь последней, поскольку ее свойства тесно связаны со свойствами остальной (идеальной) части соответствующих полугрупп [5, 6] (о математической аргументации ответов на вопрос, “зачем изучать полугруппы”, см. обзор [8]).

Предлагаемый анзац был применен ранее к ненаблюдаемой локальной $N = 1$ суперконформной симметрии мирового листа в суперструнных теориях [2], для которой была определена $N = 1$ суперконформная полугруппа [9] (ее $N = 2$ и $N = 4$ расширения рассматривались в [10]). В данной работе проводится дальнейшее исследование свойств $N = 1$ суперконформной полугруппы, связанных в основном со структурой ее идеальной части.

2. ПОЛУГРУППЫ И СУПЕРПРОСТРАНСТВО

Полугруппой [5, 6] называется множество $\mathbf{S}$ с одной бинарной ассоциативной операцией. Отсутствие аксиомы обратимости для каждого элемента приводит к более сложному абстрактному строению полугруппы по сравнению с группой, а именно к появлению в ее структуре идеальной части $\mathbf{I}$, которая по многим своим свойствам противоположна групповой части $\mathbf{G}$, состоящей из обратимых элементов. Важным классом полугрупп, к которому принадлежат и рассматриваемые ниже, является класс *полугрупп с отделяющейся групповой частью*: $\mathbf{S} = \mathbf{G} \cup \mathbf{I}$, $\mathbf{G} \cap \mathbf{I} = \emptyset$.

Пусть свойства групповой части $\mathbf{G}$ некоторой полугруппы $\mathbf{S}$ уже известны. Тогда дальнейшее исследование этой полугруппы фактически сводится к изучению свойств ее идеальной части. Последняя состоит из *левых* ($\mathbf{L}$), *правых* ($\mathbf{R}$) и *двухсторонних* ($\mathbf{I}$) *идеалов*, определяемых соотношениями $\mathbf{S} * \mathbf{L} \subseteq \mathbf{L}$, $\mathbf{R} * \mathbf{S} \subseteq \mathbf{R}$, $\mathbf{S} * \mathbf{I} * \mathbf{S} \subseteq \mathbf{I}$ (умножение множеств определяется стандартно: $AB := \{ab \mid a \in A, b \in B\}$), т.е. идеальная часть как бы поглощает в себя элементы $\mathbf{S}$. Групповая часть обладает всеми свойствами *фильтра* [5]. Изолированный идеал и фильтр могут быть определены также и дуальным образом

$$\forall s, t \in \mathbf{S}, \quad s * t \in \mathbf{I} \Rightarrow s \in \mathbf{I} \vee t \in \mathbf{I}, \quad (2.1)$$

$$\forall s, t \in \mathbf{S}, \quad s * t \in \mathbf{F} \Rightarrow s \in \mathbf{F} \wedge t \in \mathbf{F}. \quad (2.2)$$

Если определить отношение эквивалентности ρ формулой [5] $s \stackrel{\rho}{\sim} t \Leftrightarrow s = t \vee (s \in \mathbf{I} \wedge t \in \mathbf{I})$, то классами эквивалентности полугруппы $\mathbf{S}$ по $\text{mod } \rho$ будут одноэлементные множества $\{s\}$, $s \in \mathbf{S} \setminus \mathbf{I}$, и сам идеал $\mathbf{I}$. Тогда *фактор-полугруппу Рисса* $\mathbf{S}/\mathbf{I}$ можно трактовать как результат сжатия идеала $\mathbf{I}$ в нуль, другие элементы при этом не затрагиваются [5].

Особую роль в дальнейшем рассмотрении будут играть *нильэлементы* полугруппы $\mathbf{S}$, удовлетворяющие при некотором натуральном n соотношению $\mathbf{s}^{*n} = \mathbf{z}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Полугрупповой индекс* $\text{ind}^* \mathbf{s}$ нильэлемента $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$ определяется формулой

$$\text{ind}^* \mathbf{s} := \{n \in \mathbb{N} \mid \mathbf{s}^{*n} = \mathbf{z}, \mathbf{s}^{*(n-1)} \neq \mathbf{z}\}. \quad (2.3)$$

Здесь и далее знак $*$ говорит о том, что соответствующая функция определена относительно умножения в полугруппе. Очевидно, что нильэлементы конечного индекса являются *делителями нуля* [5].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Левый аннулятор* подмножества $\mathbf{Y} \subset \mathbf{S}$ в полугруппе $\mathbf{S}$ с нулем $\mathbf{z}$ и умножением $*$ определяется формулой

$$\text{Ann}_L^* \mathbf{Y} := \{\mathbf{s} \in \mathbf{S} \mid \mathbf{s} * \mathbf{Y} = \mathbf{z}\}. \quad (2.4)$$

Аналогично и для правого и двухстороннего аннуляторов. *Нетривиальный аннулятор* обязан содержать ненулевые элементы. Полугруппа (идеал), состоящая только из нильэлементов, называется *нильполугруппой* (*нильидеалом*) [5], с другой стороны, *нильпотентная полугруппа* удовлетворяет равенству $\mathbf{S}^{*n} = \mathbf{z}$.

Пусть $\mathcal{X}$ – некоторое множество, тогда преобразования $\alpha: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ образуют полугруппу $\mathcal{T}(\mathcal{X})$ относительно суперпозиции $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ и ассоциативность этой операции очевидна. Всякая полугруппа изоморфна некоторой полугруппе преобразований, и, наоборот, “всякое мультипликативное множество преобразований является полугруппой” [6, с. 34], т.е. любая полугруппа изоморфно представима преобразованиями, что является полугрупповым аналогом теоремы Кэли [11].

Если же $\mathcal{X}$ – топологическое пространство, то $\alpha: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ образуют полугруппу $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ всех непрерывных отображений на $\mathbf{S}$ [12]. Тогда элементы соответствующей абстрактной полугруппы $\mathbf{S}$ индексируются отображениями $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ с помощью гомоморфизма $\varphi: \mathcal{S}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathbf{S}$, причем тождественному отображению соответствует единица полугруппы $\mathbf{S}$, следовательно, задается *представление* полугруппы $\mathbf{S}$ непрерывными отображениями из $\mathcal{S}(\mathcal{X})$.

Важное место среди полугрупп преобразований занимают в последующем контексте *полугруппы эндоморфизмов* $\text{End } \mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{X})$, сохраняющие некоторую структуру на $\mathcal{X}$ [13]. Многие структуры (как и рассматриваемые ниже) определяются своими полугруппами эндоморфизмов, что означает $\text{End } \mathcal{X} \cong \text{End } \mathcal{Y} \Rightarrow \mathcal{X} \cong \mathcal{Y}$. Если $\mathcal{X}$ – топологическая структура, согласованность преобразования с этой структурой состоит в свойстве непрерывности преобразования. Детальное изложение свойств топологических полугрупп можно найти в [14].

В супергеометрии имеются два математических подхода: формальный алгебро-геометрический подход [15], состоящий в расширении пучка вещественных функций на действительном многообразии до пучка $\mathbb{Z}_2$ -градуированных коммутативных алгебр, и более наглядный локальный подход [16], модифицирующий внутреннюю структуру самого многообразия (следуя [17], будем называть их алгебраический и функциональный подходы, соответственно).

Кратко напомним основные определения функционального подхода [16, 18]. Пусть Λ – ассоциативная коммутативная супералгебра над полем $\mathbb{K}$ (чаще всего $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), которая одновременно является $\mathbb{Z}_2$ -градуированным векторным пространством, т.е. задано его разложение на прямую сумму векторных подпространств $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ такое, что $\forall a, b \in \Lambda$, $|ab| = |a| + |b|$ и $ab = (-1)^{|a||b|}ba$, где $|a|$ – четность элемента a , определяемая соотношением $|a| = k \Leftrightarrow a \in \Lambda_k$ (элементы с $|a| = 0$ называются *четными*, а элементы с $|a| = 1$ – *нечетными*). Если супералгебра Λ нормирована, то обычно требуется, чтобы четный Λ_0 и нечетный Λ_1 секторы были замкнуты в ней. Если норма удовлетворяет условиям (псевдонормирования) $\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$ и (унитальности) $\|e\| = 1$, то Λ называется *банаховой* (коммутативной) супералгеброй. В частности, если $\Lambda = \Lambda(N)$ – алгебра Грассмана с N антикоммутирующими образующими $\xi_i \xi_j = -\xi_j \xi_i$, $\xi^2 = 0$, $i, j \in N$, то l_1 -норма элемента $a = \sum_i c_i \xi_i$ определяется так: $\|a\| := \sum_i |c_i|$.

В функциональном подходе [18] *суперпространство* (над полем $\mathbb{R}$) размерности $(n|m)$ определяется как прямое произведение n экземпляров четной части Λ_0 и m экземпляров ее нечетной части Λ_1 : $\mathbb{R}^{n|m} := \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$. В качестве координат в суперпространстве $\mathbb{R}^{n|m}$ выступают элементы $X := (x_1 \dots x_n) \in \Lambda_0^n$ и $\Theta := (\theta_1 \dots \theta_m) \in \Lambda_1^m$. С другой стороны, $\mathbb{R}^{n|m}$ гомеоморфно действительному векторному пространству размерности $2^{N-1}(n+m)$, где N – число образующих коммутативной супералгебры Λ (в таком аспекте суперпространство $\mathbb{R}^{n|m}$ детально изучалось в [19]). Важной особенностью функционального подхода является наличие у четных координат “духовых” добавок x_{sou} к числовым значениям x_{body} , пропорциональных произведению четного количества образующих супералгебры [16, 18]. Отображение $\sigma: \mathbb{R}^{n|m} \rightarrow \mathbb{R}^n$, которое получается при отбрасывании духовых частей, называется *канонической* [15] *проекцией* (*body-map* [16]). При этом $\sigma[x] = x_{\text{body}}$, $\sigma[\theta] = 0$. По отображению σ можно построить отношение эквивалентности $x \stackrel{\sigma}{\sim} y$, которое играет важную роль в выделении действительного пространства $\mathbb{R}^n$ из суперпространства $\mathbb{R}^{n|m}$ при решении проблемы придания физического смысла некоторым суперполевым моделям [20].

Введем также полезное в дальнейшем отображение η по формуле

$$\eta[x] = 1 \Leftrightarrow \sigma[x] \neq 0, \quad \eta[x] = 0 \Leftrightarrow \sigma[x] = 0. \quad (2.5)$$

Поскольку величина $|\eta[xy] - \eta[x] - \eta[y]|$ отлична от нуля и ограничена единицей, отображение η является *квазихарактером* [21], который исходя из его определения естественно назвать *нуль-квазихарактером*.

Отображение суперпространства $\mathbb{R}^{n|m}$ в себя $\{X, \Theta\} \rightarrow \{\tilde{X}, \tilde{\Theta}\}$ обычно описывается в терминах супергладких функций [16]. В этом случае роль якобиана перехода играет березиниан $\text{Ber} := \text{Ber}(\tilde{X}, \tilde{\Theta}/X, \Theta)$ [22]. Если $\sigma[\text{Ber}] \neq 0$, то множество таких отображений образует группу автоморфизмов (локальных диффеоморфизмов). В суперанализе, однако, может иметь место и промежуточный случай, когда березиниан отличен от нуля, но чисто духовый, т.е. $\sigma[\text{Ber}] = 0$. Поэтому если принять во внимание и такие отображения, то можно построить полугруппу эндоморфизмов суперпространства $\mathbb{R}^{n|m}$. Групповая часть ее будет содержать преобразования с $\sigma[\text{Ber}] \neq 0$, а идеальная часть – с $\sigma[\text{Ber}] = 0$. Частный случай такой полугруппы – суперконформной полугруппы, структура идеальной части которой изучается ниже, – был рассмотрен в [9]. Отметим, что на функториальном языке [15] суперпространство определяется как функтор в категории грассмановых алгебр, в которой морфизмами являются обратимые (и необратимые в случае обобщений, приведенных ниже), принимающий значения в категории теории множеств. Тогда *суперполугруппа* может быть определена как функтор в

категории грассмановых алгебр, принимающий значения в категории полугрупп (относительно групп см. обзор [23]). Аналогично модифицируется и понятие супермногообразия. Так, *супермногообразие* $\mathbb{M}^{n|m}$ размерности $(n|m)$ определяется как суперпространство с упорядоченными парами (атласом) $\{O_A, \varphi_A\}$, где O_A – открытая суперобласть в $\mathbb{R}^{n|m}$ и $\varphi_A: O_A \rightarrow \mathbb{R}^{n|m}$, причем объединение $\bigcup_A O_A = \mathbb{M}^{n|m}$, и на непустых пересечениях $O_A \cap O_B \neq \emptyset$ функции перехода $\varphi_A \circ \varphi_B^{-1}$ супергладкие [16] и сохраняют $\mathbb{Z}_2$ -градуировку. Если определить открытую область в $\mathbb{R}^{n|m}$ как $\sigma^{-1}[O_{\text{body}}]$, где O_{body} – открытая область в $\mathbb{R}^n$, то полученная топология оказывается грубой [24], а супермногообразие – проективно хаусдорфовым, а не хаусдорфовым, поэтому в нечетных направлениях его топология оказывается тривиальной в отличие от [16, 18], где топология определяется нормой коэффициентов базиса коммутативной супералгебры. Добавим к стандартному супермногообразию $\mathbb{M}^{n|m}$ [16] карты $\{\overline{O}_C, \overline{\varphi}_C\}$, где $\overline{\varphi}_C$ – необратимые отображения $\overline{\varphi}_C: \overline{O}_C \rightarrow \mathbb{R}^{n|m}$. Тогда на пересечении $O_A \cap \overline{O}_C \neq \emptyset$ могут существовать только необратимые функции перехода $\overline{\varphi}_C \circ \varphi_A^{-1}$ с чисто духовым березинианом, т.е. для них $\sigma[\text{Ber}] = 0$. Назовем такую конструкцию *полусупермногообразием*, тогда набор карт $\{\overline{O}_A, \overline{\varphi}_A\}$ будет, очевидно, *идеалом полусупермногообразия*. Важно отметить, что если для обычных многообразий имеются два типа ориентируемости (в соответствии с поведением знака якобианов перехода) [25] и для супермногообразий таких типов ориентируемости пять [26], то идеал полусупермногообразия обладает шестым типом односторонней ориентируемости, когда соответствующее произведение детерминантов хотя и отлично от нуля, но не является ни положительным, ни отрицательным числом, а представляет собой чисто духовую величину. Тогда в общем случае полугруппы эндоморфизмов суперпространства $\mathbb{R}^{n|m}$ задают соответствующие (полугрупповые) полусупермногообразия (аналогично групповым многообразиям [25]) в пространстве $(n^2 + m^2|2nm)$ измерений.

3. СУПЕРАНАЛИТИЧЕСКАЯ И СУПЕРКОНФОРМНАЯ ПОЛУГРУППЫ

Рассмотрим комплексное суперпространство $\mathbb{C}^{1|1}$, которое является основным объектом суперполевого рассмотрения мирового листа в формализме функционального интегрирования теории фермионных струн [27]. Локально $\mathbb{C}^{1|1}$ описывается набором $Z := \{z, \theta\}$, где z и θ – четная и нечетная комплексные координаты. Исходя из требований голоморфности и аналитичности по нечетной координате преобразование $\mathbb{C}^{1|1} \rightarrow \mathbb{C}^{1|1}$ имеет вид

$$\tilde{z} = f(z) + \theta\chi(z), \quad \tilde{\theta} = \psi(z) + \theta g(z), \quad (3.1)$$

где компонентные функции, хотя и могут быть необратимыми, удовлетворяют условиям супергладкости, обобщающим понятие C^∞ на категорию супермногообразий [16]. Здесь и далее латинскими буквами обозначены четные функции $\mathbb{C}^{1|0} \rightarrow \mathbb{C}^{1|0}$, а греческими – нечетные $\mathbb{C}^{1|0} \rightarrow \mathbb{C}^{0|1}$. Множество как обратимых, так и необратимых преобразований $\mathcal{T}$ образует полугруппу относительно композиции (ассоциативность выполняется), которую назовем *полугруппой супераналитических преобразований* $\mathbf{T}$. Все преобразования, рассматриваемые ниже, образуют различные ее подполугруппы, причем множество обратимых преобразований является подгруппой, а множество необратимых – идеалом полугруппы супераналитических преобразований $\mathbf{T}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Элемент $\mathbf{s}$ супераналитической полугруппы $\mathbf{S}$ параметризуется четверкой функций из (3.1) $\mathbf{s} \begin{Bmatrix} f & \chi \\ \psi & g \end{Bmatrix} \in \mathbf{S}$, и действие в ней имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{s} \begin{Bmatrix} f_1 & \chi_1 \\ \psi_1 & g_1 \end{Bmatrix} * \mathbf{s} \begin{Bmatrix} f_2 & \chi_2 \\ \psi_2 & g_2 \end{Bmatrix} = \\ = \mathbf{s} \begin{Bmatrix} f_1 \circ f_2 + \chi_1 \circ f_2 \cdot \psi_2 & f'_1 \circ f_2 + \chi_1 \circ f_2 \cdot \chi_2 \cdot \psi_2 \\ \psi_1 \circ f_2 + g_1 \circ f_2 \cdot \psi_2 & \psi'_1 \circ f_2 + g_1 \circ f_2 \cdot \chi_2 \cdot \psi_2 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Точкой будем обозначать умножение в грассмановой алгебре (при необходимости). Знак “ $\circ$ ” соответствует суперпозиции функций $f \circ g := f(g(x))$.

Существенным свойством определенной таким образом супераналитической полугруппы является то, что она не принадлежит ни к классу мультипликативных полугрупп [28], ни к классу полугрупп непрерывных функций [12], поскольку ее операция (3.2) содержит в себе одновременно как обычное умножение, так и суперпозицию функций. Наличие этих двух умножений серьезным образом усложняет анализ абстрактных свойств как супераналитической, так и рассматриваемой ниже суперконформной полугрупп.

Обратимость преобразований (3.1) определяется прежде всего обратимостью четных функций $f(z)$ и $g(z)$, поскольку нечетные функции необратимы по определению. При этом супераналог якобиана – березиниан [22] – может быть корректно определен, только если $\sigma[g(z)] \neq 0$:

$$\text{Ber}(\tilde{Z}/Z) = \frac{f'(z)}{g(z)} + \frac{\chi(z)\psi'(z)}{g^2(z)} + \theta \left(\frac{\chi(z)}{g(z)} \right)', \quad (3.3)$$

где штрих означает дифференцирование по аргументу.

Следовательно, имеется достаточно большой класс необратимых преобразований вида (3.1), для которых березиниан (3.3) может быть все же определен, но представляет собой чисто духовую величину. Естественнo ввести “меру необратимости” супераналитического преобразования: чем меньше индекс нильпотентности березиниана, тем “необратимее” преобразование.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Грассманов индекс преобразования $\tilde{Z} \rightarrow Z$ определяется формулой

$$\text{ind } J := \{n \in \mathbb{N} \mid \text{ind Ber}(\tilde{Z} \rightarrow Z) = n\}. \quad (3.4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Мера необратимости преобразования $Z \rightarrow \tilde{Z}$ определяется величиной $m := 1/\text{ind } J$.

Будем проводить классификацию всех супераналитических преобразований, как обратимых, так и необратимых, по грассманову индексу преобразования. Стандартной является классификация по полугрупповому индексу (2.3), который не совпадает с грассмановым индексом (3.4). Если супераналитическое преобразование обратимо, то никакая степень его березиниана не обращается в нуль, поэтому грассманов индекс преобразования в обратимом случае равен бесконечности $\text{ind } J = \infty$, а его мера необратимости, очевидно, равна нулю $m = 0$, причем для “самого необратимого” преобразования (из-за

того что минимальный индекс нильпотентности для любой отличной от нуля величины равен двум) имеем $\text{ind } J = 2$, $m = 1/2$.

В несуперсимметричном случае, как хорошо известно [25], свойств аналитичности достаточно, чтобы преобразования $\tilde{z} = f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, аналогичные (3.1), были одновременно и конформными преобразованиями (когда производная d/dz и дифференциал dz преобразуются в себя с точностью до ковариантного множителя $d\tilde{z}/dz = f'(z)$). Тогда они могут быть использованы как функции перехода для римановых поверхностей, на которых задано линейное расслоение [25]. Это позволяет построить квантовую теорию бозонной струны в подходе функционального интеграла, когда вычисление амплитуд сводится к интегрированию по множеству неэквивалентных римановых поверхностей – конечномерному пространству модулей [29]. Аналогичный подход в суперсимметричном случае [27] не позволяет непосредственно использовать супераналитические преобразования (3.1) для подобных целей. Здесь требование ковариантности преобразования производной накладывает нетривиальные ограничения на сами коэффициентные функции из (3.1) в виде дополнительных уравнений. Это и приводит к необычному идеальному строению суперконформных полугрупп [9].

В каждой точке $\{z, \theta\}$ суперпространства $\mathbb{C}^{1|1}$ структура касательного пространства определяется базисом $\{\partial, D\}$, где $D := \partial_\theta + \theta\partial$ ($\partial = \partial/\partial z$, $\partial_\theta = \partial/\partial\theta$) и $D^2 = \partial$. Дуальное кокасательное пространство имеет базис 1-форм $\{dZ, d\theta\}$, где $dZ := dz + \theta d\theta$ (соглашение о знаках, как в [30]).

Действие полугруппы супераналитических преобразований (3.1) в касательном и кокасательном пространствах имеет вид

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \partial \\ D \end{pmatrix} &= P \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\partial} \\ \tilde{D} \end{pmatrix}, \\ (dZ, d\theta) &= (d\tilde{Z}, d\tilde{\theta}) \cdot P, \end{aligned} \quad (3.5)$$

так что супераналог внешнего дифференциала $d := dZ\partial + d\theta D$ является инвариантом супераналитических преобразований. Здесь

$$P = \begin{pmatrix} \partial\tilde{z} - \partial\tilde{\theta} \cdot \tilde{\theta} & \partial\tilde{\theta} \\ D\tilde{z} - D\tilde{\theta} \cdot \tilde{\theta} & D\tilde{\theta} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

– матрица, определяющая структуру многообразия, для которого преобразованиями склейки являются супераналитические преобразования (3.1). При этом $\text{Ber}(\tilde{Z}/Z) = \text{Ber } P$. Поэтому обратимость супераналитического преобразования (3.1) определяется обратимостью структурной матрицы P : так, наличие ненулевой числовой части у нечетно-нечетного элемента матрицы позволяет определить сам березиниан, в то время как числовая часть ее четно-четного элемента ответственна за его обратимость. Обычно ограничиваются обратимым вариантом $P \in GL_{\mathbb{C}}(1|1)$ [31].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Определим *три типа обобщенных супераналитических преобразований*:

- I – березиниан существует и обратим;
- II – березиниан существует и необратим;
- III – березиниан не определен.

Преобразования типа I использовались в качестве функций перехода между картами при конструировании супермногообразий, для которых структурной группой является $GL_{\mathbb{C}}(1|1)$ [31]. Определенная редукция этой группы приводила к тому, что супермногообразия становилось *суперримановой поверхностью* [32] (другое название – *суперконформное многообразие* [33]). Более нетривиальная редукция позволяла сконструировать специальный тип суперримановых поверхностей, пригодный для адекватного описания двумерной топологической супергравитации [34]. Кроме того, при интегрировании по пространству модулей возникали трудности с нечетными модулями [35]; они фактически были обусловлены наличием делителей нуля в грассмановой алгебре, над которой рассматривалась теория, что приводило, например, к необходимости вводить новые поля на суперримановых поверхностях [36]. Поэтому естественным представляется построение и изучение аналогичных объектов с применением остальных (необратимых) типов преобразований, рассматриваемых ниже.

Как показано в [9], имеются две нетривиальные возможности редукции матрицы P , отвечающие обращению в нуль каждого из элементов первого ее столбца, соответственно,

$$\partial\tilde{z} = \partial\tilde{\theta} \cdot \tilde{\theta}, \quad (3.7)$$

$$D\tilde{z} = D\tilde{\theta} \cdot \tilde{\theta}. \quad (3.8)$$

Первый вариант приводит к необратимым преобразованиям, изменяющим четность в касательном пространстве и имеющим некоторые другие необычные свойства. Такие преобразования подробно изучены в [9]. Второе условие (3.8) (только оно всегда и рассматривалось) определяет в обратимом случае *суперконформные преобразования* [30, 32], и считается, что именно они являются суперобобщением обычных конформных преобразований, поскольку, как это следует из (3.6) и (3.8), суперпроизводная преобразуется ковариантно

$$D = (D\tilde{\theta}) \cdot D. \quad (3.9)$$

Однако если принять во внимание и возможные необратимые преобразования, то необходимо учитывать оба типа редукций потому, что в первом случае также имеются (хотя и меняющий четность) аналог ковариантности преобразования производной

$$\partial = (\partial\tilde{\theta})D \quad (3.10)$$

и, возможно, соответствующие аналоги линейных расслоений, меняющих четность (подробнее см. [9]).

Если $\sigma[D\tilde{\theta}] \neq 0$, то для березиниана суперконформных преобразований получаем

$$J = \text{Ber}(\tilde{Z}/Z) = D\tilde{\theta}. \quad (3.11)$$

Обратимые суперконформные преобразования являются преобразованиями склейки при построении суперконформных многообразий [33] или суперримановых поверхностей [32].

Из суперконформного условия (3.8) следует система уравнений на компонентные функции

$$\chi(z) = g(z) \cdot \psi(z), \quad (3.12)$$

$$f'(z) = g^2(z) - \psi(z) \cdot \psi'(z), \quad (3.13)$$

которая уменьшает до двух число независимых функций, характеризующих суперконформное преобразование. Из (3.13) следует, что функции $f(z)$ и $g(z)$ имеют или не имеют числовую часть одновременно, т.е. их ниль-квазихарактеры (2.5) совпадают: $\eta[f(z)] = \eta[g(z)]$.

Используя только (3.12), запишем общее суперконформное преобразование в виде

$$\tilde{z} = f(z) + \theta \cdot \psi(z) \cdot g(z), \quad \tilde{\theta} = \psi(z) + \theta \cdot g(z), \quad (3.14)$$

подразумевая выполнение условия (3.13). Отсюда получаем уравнение

$$\tilde{z} = \tilde{\theta} \cdot \psi(z) + f(z), \quad (3.15)$$

которое можно интерпретировать как уравнение “суперконформной прямой” с чисто духовым наклоном $\psi(z)$ на $\tilde{z}\tilde{\theta}$ -плоскости, при этом “точки” на “прямой” при $z = \text{const}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с координатой θ . Кроме того, мы намеренно не исключаем из (3.13) $g(z)$, как это обычно делается [30], еще и потому, что такое исключение возможно, только если $\sigma[g(z)] \neq 0$, когда квадратный корень извлекается, но это лишь один из частных случаев. Интегрировать же (3.13) можно независимо от нильпотентности $g(z)$. Поэтому произвольные как обратимые, так и необратимые суперконформные преобразования могут быть представлены в следующем виде:

$$\tilde{z} = h(z) + C + \theta \cdot \psi(z) \cdot g(z), \quad \tilde{\theta} = \psi(z) + \theta \cdot g(z), \quad (3.16)$$

$$h(z) = \int_Q dz (g^2(z) - \psi(z) \cdot \psi'(z)), \quad (3.17)$$

где контур Q выбран так, чтобы $h(0) = 0$, тогда $f(z) = h(z) + C$. Этот анзац обусловлен тем фактом, что из уравнения (3.13) функция $f(z)$ восстанавливается по функции $g(z)$ лишь с точностью до четной константы C . Поэтому последнюю необходимо рассматривать как дополнительный параметр полугруппы, если задавать полугруппу функциями $g(z)$ (а не $f(z)$, как ранее [30]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Элемент *суперконформной полугруппы* S_{SCf} параметризуется двумя функциями на $\mathbb{C}^{1|0}$ и одной четной константой C : $s\{g; \psi; C\} \in S_{SCf}$, и закон умножения в S_{SCf} имеет вид

$$\begin{aligned} s\{g_1; \psi_1; C_1\} * s\{g_2; \psi_2; C_2\} = & s\left\{g_1 \circ (h_2 + C_2) \cdot g_2 + \psi_2 \cdot g_2 \cdot \psi'_1 \circ (h_2 + C_2); \right. \\ & \psi_1 \circ (h_2 + C_2) + g_1 \circ (h_2 + C_2) \cdot \psi_2; \\ & \left. C_1 + h_1(C_2) + \psi_2(0) \cdot \psi_1(C_2) \cdot g_1(C_2)\right\}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Из (3.18) следует, что двухсторонняя единица суперконформной полугруппы, определяемая соотношениями $s * e = e * s = s$, имеет следующий вид: $e = s\{1; 0; 0\}$, а нулевой элемент, определяемый как $s * z = z * s = z$, равен $z = s\{0; 0; 0\}$. Взаимнообратные

элементы суперконформной полугруппы $\mathbf{S}_{SCf}$, определяемые формулой $\mathbf{s}_1 * \mathbf{s}_2 = \mathbf{e}$, удовлетворяют системе функциональных уравнений

$$\begin{aligned} g_1 \circ (h_2 + C_2) \cdot g_2 + \psi_2 \cdot g_2 \cdot \psi'_1 \circ (h_2 + C_2) &= 1, \\ \psi_1 \circ (h_2 + C_2) + \psi_2 \cdot g_1 \circ (h_2 + C_2) &= 0, \\ C_1 + h_1(C_2) + \psi_2(0) \cdot \psi_1(C_2) \cdot g_1(C_2) &= 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Отсюда, например, следует, что левый обратный для обратимого элемента $\mathbf{s}\{g; \psi; C\}$ равен

$$\mathbf{s}\{g; \psi; C\}_L^{-1} = \mathbf{s} \left\{ \frac{1}{\bar{g}} + \frac{\bar{\psi} \cdot \bar{\psi}'}{\bar{g}^3}; -\frac{\bar{\psi}}{\bar{g}}; -C \right\}, \quad (3.20)$$

где $\bar{g} = g \circ (h^{-1} - C)$, $\bar{\psi} = \psi \circ (h^{-1} - C)$, $h' = g^2 - \psi \cdot \psi'$.

Чтобы исследовать свойства обратимости (связанные с нильпотентностью компонентных функций) в суперконформной полугруппе, расширим область определения соотношения (3.11) и на тот случай, когда правая часть его представляет собой чисто духовую величину, т.е. ее ниль-квазихарактер (2.5) равен нулю $\eta[D\tilde{\theta}] = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Обобщенный якобиан* суперконформного преобразования (3.16) определяется формулой

$$J_{SCf} := D\tilde{\theta} = g(z) + \theta \cdot \psi(z). \quad (3.21)$$

Березиниан (3.3) в этом случае не определим, и мы пользуемся (3.11). Отсюда видно, что ниль-квазихарактеры обобщенного якобиана и функции $g(z)$ совпадают, поэтому обратимость всего суперконформного преобразования определяется ниль-квазихарактером функции $g(z)$. Так, элементы суперконформной полугруппы с $\eta[g(z)] = 1$ являются обратимыми, а элементы с $\eta[g(z)] = 0$ — необратимыми. Обратимые элементы $\mathbf{g}$ составляют подгруппу $\mathbf{G}_{SCf} = \cup \mathbf{g}$ суперконформной полугруппы, а необратимые элементы $\mathbf{i}$ с нулем — ее идеал $\mathbf{I}_{SCf} = \cup \mathbf{i} \cup \mathbf{z}$. Из закона умножения (3.18) следует, что если хотя бы один из сомножителей необратим, то и результирующее преобразование также необратимо, т.е. $\mathbf{I}_{SCf} * \mathbf{S}_{SCf} \subseteq \mathbf{I}_{SCf}$, $\mathbf{S}_{SCf} * \mathbf{I}_{SCf} \subseteq \mathbf{I}_{SCf}$, поэтому $\mathbf{I}_{SCf}$ — изолированный идеал, а подгруппа $\mathbf{G}_{SCf}$ — фильтр (см. определения в п.2). Обратимые суперконформные преобразования, соответствующие элементам $\mathbf{G}_{SCf}$, рассматривались в [30–32]. Поэтому подробнее остановимся на необратимых преобразованиях и структуре идеала $\mathbf{I}_{SCf}$.

4. ЛОКАЛЬНОЕ СТРОЕНИЕ СУПЕРКОНФОРМНОЙ ПОЛУГРУППЫ

Рассмотрим свойства обратимости преобразований, связанные с нильпотентностью компонентных функций $g(z)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Грассманов индекс общего суперконформного преобразования и его мера необратимости связаны с индексом функции $g(z)$ формулой*

$$\text{ind } J_{SCf} = \frac{1}{m_{SCf}} = \text{ind } g(z) + 1. \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возведем обе части равенства (3.21) в степень n и воспользуемся тем, что грассманов индекс нильпотентности второго слагаемого в нем минимален и равен двум, тогда получим

$$J_{SCf}^n = g^n(z) + n \cdot g^{n-1}(z) \cdot \theta \cdot \psi'(z). \quad (4.2)$$

Отсюда и следует соотношение (4.1). $\square$

Из (4.2) видно, что имеется другая возможность в зависимости от присутствия последнего слагаемого. Среди необратимых суперконформных преобразований с $\text{ind } g(z) = n$ можно выделить следующие преобразования, имеющие существенно отличные от общего случая абстрактные свойства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Апп-преобразования грассманова индекса n* определяются формулами

$$\text{ind } g(z) = n, \quad g^{n-1}(z) \in \text{Ann } \psi'(z). \quad (4.3)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Грассманов индекс Апп-преобразования равен индексу функции $g(z)$*

$$\text{ind } J_{SCf}^A = \text{ind } g(z). \quad (4.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (4.3) следует, что второе слагаемое в (4.2) равно нулю. Отсюда получаем (4.4). $\square$

Соотношения (4.1) и (4.4) справедливы лишь для суперконформных преобразований, т.е. они являются условиями суперконформности, записанными через индексы нильпотентности.

Выделим в идеале $\mathbf{I}_{SCf}$ следующие подмножества элементов:

$$\mathbf{I}_n := \{\mathbf{i} \in \mathbf{I}_{SCf} | g^n(z) = 0\}, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{J}_n := \{\mathbf{i} \in \mathbf{I}_n | \text{ind } g(z) = n\}, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{J}_n^A := \{\mathbf{i} \in \mathbf{J}_n | g^{n-1}(z) \in \text{Ann } \psi'(z)\}, \quad (4.7)$$

которые связаны очевидными соотношениями $\mathbf{J}_n = \mathbf{I}_n \setminus \mathbf{I}_{n-1}$, причем $\mathbf{I}_0 = \mathbf{J}_0 = \mathbf{z}$.

Пусть $\mathbf{s}_3 = \mathbf{s}_1 * \mathbf{s}_2$, тогда из (3.18), возводя в степень n в грассмановой алгебре, получаем

$$\begin{aligned} g_3^n(z) &= g_1^n(h_2(z) + C_2) \cdot g_2^n(z) + \\ &+ n \cdot g_1^{n-1}(h_2(z) + C_2) \cdot \psi_2(z) \cdot \psi_1'(h_2(z) + C_2) \cdot g_2^n(z). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Отсюда следует, что и здесь условием обращения в нуль второго слагаемого по-прежнему является (4.3), это снова выделяет Апп-преобразования.

ТЕОРЕМА. *Множество элементов $\mathbf{J}_n^A \subseteq \mathbf{I}_n$ является правым идеалом для $\mathbf{I}_n$ относительно (4.3).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{s}_3 = \mathbf{s}_1 * \mathbf{s}_2$, $\mathbf{s}_i \in \mathbf{I}_n$, и для $\mathbf{s}_1$ выполняется (4.3), т.е. $g_1^{n-1}(z) \cdot \psi'_1(z) = 0$. Покажем, что $g_3^{n-1}(z) \cdot \psi_3(z) = 0$. Из (3.18) имеем

$$\begin{aligned} \omega_3(z) &= \omega_1(z) \cdot g_2^{n+1}(z) + \omega_2(z) \cdot g_1^n(h_2(z) + C_2) + n \cdot \psi_2(z) \cdot \omega_1(z) \cdot \omega_2(z) + \\ &+ g_1^{n-1}(h_2(z) + C_2) \cdot g'_1(h_2(z) + C_2) \cdot g_2^{n-1}(z) \cdot \psi_2(z) = 0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_1(z) &= g_1^{n-1}(h_2(z) + C_2) \cdot \psi'_1(h_2(z) + C_2), \\ \omega_2(z) &= g_2^{n-1}(z) \cdot \psi'_2(z), \quad \omega_3(z) = g_3^{n-1}(z) \cdot \psi'_3(z), \end{aligned}$$

и в последнем равенстве использована очевидная импликация $g^n(z) = 0 \Rightarrow g^{n-1}(z) \cdot g'(z) = 0$. Поэтому $\mathbf{J}_n^A * \mathbf{I}_n \subseteq \mathbf{J}_n^A$. $\square$

Отсюда следует, что $\mathbf{J}_n^A * \mathbf{J}_n^A \subseteq \mathbf{J}_n^A$, т.е. множество $\mathbf{J}_n^A$ замкнуто относительно свойства (4.3), поэтому объединение $\cup \mathbf{J}_n^A = \mathbf{A}_{SCf}$ есть полугруппа в $\mathbf{S}_{SCf}$, которую будем называть *Апп-полугруппой*. Изучим более подробно свойства Апп-полугруппы.

4.1. Апп-полугруппа. Свойства идеалов (относительно нильпотентности) в Апп-полугруппе существенно отличаются от таковых в оставшейся части суперконформной полугруппы, поэтому рассмотрим их отдельно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Все элементы из Апп-полугруппы необратимы, следовательно, групповая часть в $\mathbf{A}_{SCf}$ отсутствует.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (4.3) следует, что

$$g^{n-1}(z) \cdot \psi'(z) = 0, \quad (4.10)$$

поэтому $\text{ind } g(z) < \infty$ (считаем, что $\psi'(z) \neq 0$). $\square$

Чтобы изучить свойства нильпотентности Апп-преобразований, возведем четную часть (3.18) в степень n , тогда получим Апп-аналог соотношения (4.8)

$$g_3^n(z) = g_1^n(h_2(z) + C_2) \cdot g_2(z). \quad (4.11)$$

Отсюда видно, что множества элементов

$$\mathbf{A}_n := \{\mathbf{s} \in \mathbf{A}_{SCf} | g^n(z) = 0\} \quad (4.12)$$

являются двухсторонними идеалами в $\mathbf{A}_{SCf}$ и, кроме того, имеют место строгие включения $\mathbf{A}_{n-1} \subset \mathbf{A}_n$. Следовательно, идеалу Апп-полугруппы $\mathbf{I}^A \equiv \mathbf{A}_{SCf}$ можно поставить в соответствие бесконечную двухсторонне-идеальную цепь

$$\mathbf{z} \subset \mathbf{A}_1 \subset \mathbf{A}_2 \cdots \subset \mathbf{A}_n \subset \dots \mathbf{I}^A \equiv \mathbf{A}_{SCf}, \quad (4.13)$$

начинающуюся с тривиального минимального идеала — нуля $\mathbf{z}$ Апп-полугруппы — и заканчивающуюся самой полугруппой $\mathbf{A}_{SCf}$.

Из закона умножения (3.18) следует, что каждый идеал $\mathbf{A}_n$ содержит нильидеал $\mathbf{N}_n := \{\mathbf{s} \in \mathbf{A}_n \mid \mathbf{s}^{*n} = \mathbf{z}\}$, причем реализуется строгое включение $\mathbf{N}_n \subset \mathbf{A}_n$.

Можно показать, что разность $\mathbf{A}_n \setminus \mathbf{N}_n$ содержит только нильэлементы более высокого полугруппового индекса и, следовательно, принадлежит к соответствующим нильидеалам. Поэтому объединение всех нильидеалов совпадает с Апп-полугруппой. Таким образом, Апп-полугруппа является нильполугруппой [37]. Поскольку $\mathbf{A}_{n-1}$ есть идеал в $\mathbf{A}_n$, то, как это следует из (4.11), идеальная цепь (4.13) представляет собой идеальный ряд Апп-полугруппы. Факторами этого ряда являются фактор-полугруппы Рисса $\mathbf{A}_n/\mathbf{A}_{n-1}$, и для них коидеал $\mathbf{A}_n \setminus \mathbf{A}_{n-1}$ совпадает с $\mathbf{J}_n^A$ (4.7). Кроме того, $\mathbf{A}_{n+1}/\mathbf{A}_n$ является идеалом фактор-полугруппы $\mathbf{I}^A/\mathbf{A}_n$, и выполняется следующее соотношение: $\mathbf{I}^A/\mathbf{A}_{n+1} \cong (\mathbf{I}^A/\mathbf{A}_n)/(\mathbf{A}_{n+1}/\mathbf{A}_n)$. Однако идеальный ряд (4.13) не является аннуляторным ни справа, ни слева, как этого следовало бы ожидать для нильполугруппы [37].

Пользуясь (4.11) и очевидными свойствами нильпотентных элементов, для множеств $\mathbf{A}_n$ и $\mathbf{J}_n^A$ из Апп-полугруппы построим таблицу умножения

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_n * \mathbf{A}_m &\subseteq \mathbf{A}_k, \\ \mathbf{J}_n^A * \mathbf{J}_m^A &\subseteq \mathbf{A}_k, \\ \mathbf{J}_n^A * \mathbf{A}_m &\subseteq \mathbf{A}_k, \\ \mathbf{A}_n * \mathbf{J}_m^A &\subseteq \mathbf{A}_k, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где $k = \min(n, m)$.

Множество $\mathbf{A}_{SCf}$ представляет собой объединение взаимно непересекающихся множеств: $\mathbf{A}_{SCf} = \bigcup_n \mathbf{J}_n^A$, $\mathbf{J}_n^A \cap \mathbf{J}_m^A = \emptyset$, однако $\mathbf{J}_n^A$ не является подполугруппой ни для $\mathbf{A}_n$, ни для $\mathbf{A}_{SCf}$. Но с $\mathbf{J}_n^A$ можно связать полугруппу $\mathbf{U}_n^A := \{\mathbf{A}_n \cup \mathbf{z}, \blacksquare\}$, в которой умножение определяется формулой

$$\mathbf{s} \blacksquare \mathbf{t} := \begin{cases} \mathbf{s} * \mathbf{t}, & \mathbf{s} * \mathbf{t} \in \mathbf{J}_n^A, \\ \mathbf{z}, & \mathbf{s} * \mathbf{t} \notin \mathbf{J}_n^A. \end{cases} \quad (4.15)$$

Отметим, что полугруппа $\mathbf{U}_n^A$ может быть построена также и с помощью характеристической функции

$$\mathbf{c}_n(\mathbf{s}) := \begin{cases} \mathbf{e}, & \mathbf{s} \in \mathbf{J}_n^A, \\ \mathbf{z}, & \mathbf{s} \notin \mathbf{J}_n^A. \end{cases} \quad (4.16)$$

Тогда умножение в (4.15) можно представить следующим образом: $\mathbf{s} \blacksquare \mathbf{t} = \mathbf{c}_n(\mathbf{s} * \mathbf{t}) * \mathbf{s} * \mathbf{t}$. При одинаковых индексах из (4.14) имеем $\mathbf{A}_n * \mathbf{A}_n \subseteq \mathbf{A}_n$. Поэтому представляется естественным выделить в $\mathbf{A}_n$ подмножество $\mathbf{A}_n^{(k)} \subset \mathbf{A}_n$, обладающее свойством

$$\mathbf{A}_n^{(k)} * \mathbf{A}_n^{(k)} \subseteq \mathbf{J}_k^A, \quad 0 \leq k \leq n, \quad (4.17)$$

что можно трактовать как извлечение квадратного корня из $\mathbf{J}_k^A$. При $k = n$ получаем $\mathbf{U}_n^A = \mathbf{A}_n^{(n)} \cup \mathbf{z}$. В другом предельном случае, при $k = 0$, имеем $\mathbf{A}_n^{(0)} = \mathbf{A}_n \cap \mathbf{N}_2$. Но, поскольку умножение (4.16) снова не замыкается, подмножество $\mathbf{A}_n^{(k)}$ не является полугруппой.

Из соотношений (4.14) получаем для главных идеалов (см. определения в [5])

$$\mathbf{R}(\mathbf{s}) \subseteq \mathbf{A}_n, \quad \mathbf{L}(\mathbf{s}) \subseteq \mathbf{A}_n, \quad \mathbf{J}(\mathbf{s}) \subseteq \mathbf{A}_n, \quad (4.18)$$

где $\mathbf{s} \in \mathbf{J}_n^A$. Поскольку $\mathbf{A}_{SCf}$ – нильполугруппа, все отношения эквивалентности Грина (см. [5]) совпадают между собой и с отношением равенства.

ТЕОРЕМА. Анп-полугруппа является $\mathcal{J}$ -тривиальной [38].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s \in \mathbf{R}(s) \wedge s \neq z$, тогда найдется элемент $t \neq s$ такой, что $s = s * t$, а следовательно, и $s = s * t^{*k}$, где k произвольно. Но $\mathbf{A}_{SCf}$ по построению содержит только нильэлементы, поэтому $\exists n, t^{*n} = z$.

Выберем $k = n$ и получим $s = s * t^{*n} = s * z = z$, что противоречит условию $s \neq z$. Наоборот, пусть $\mathbf{R}(s) = \mathbf{R}(t)$, $s \neq z$, тогда из определений главных идеалов [5] получаем $s = t * x = s * (y * x) = s * (y * x)^{*k}$, $x, y \in \mathbf{A}_{SCf}$. Снова в силу того что $\mathbf{A}_{SCf}$ – нильполугруппа, найдется такая степень n , что $(y * x)^{*n} = z$, поэтому $s = s * z = z$ – противоречие. Отсюда следует требуемая импликация $\mathbf{R}(s) = \mathbf{R}(t) \Rightarrow s = t$. Аналогично и для других отношений Грина. $\square$

СЛЕДСТВИЕ. $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{G}$ -классы Анп-полугруппы содержат ровно по одному элементу.

4.2. Квазиидеальный ряд. Переходим теперь к анализу идеального строения суперконформной полугруппы в общем случае. В отличие от (4.3) предполагаем, что $g^{n-1}(z) \notin \text{Anp } \psi'(z)$. Такая полугруппа может содержать кроме необратимых также и обратимые элементы, а следовательно, подгруппу $\mathbf{G}_{SCf} \in \mathbf{S}_{SCf}$, которая определяется преобразованиями с нильпотентными и обратимыми $g(z)$. Если положить для обратимых элементов индекс нильпотентности равным бесконечности, то в терминах величин, введенных в (4.5)–(4.7), имеем $\mathbf{G}_{SCf} = \mathbf{J}_\infty$, $\mathbf{S}_{SCf} = \mathbf{I}_\infty$, что позволяет в некоторых случаях формально включить $\mathbf{G}_{SCf}$ в закон умножения, аналогичный (4.14). Очевидно, что множество $\mathbf{G}_{SCf} \cup \{z\}$ является фактор-полугруппой Рисса $\mathbf{S}_{SCf}/\mathbf{I}_{SCf}$ [5]. Тогда суперконформную полугруппу $\mathbf{S}_{SCf}$ можно трактовать как идеальное расширение [39] суперконформной группы $\mathbf{G}_{SCf}$ при помощи идеала $\mathbf{I}_{SCf}$. Рассмотрим множества (4.5)–(4.7) в случае полной суперконформной полугруппы $\mathbf{S}_{SCf}$. Очевидно, что строгие включения $\mathbf{I}_{n-1} \subset \mathbf{I}_n$ сохраняются. Поэтому идеалу суперконформной полугруппы $\mathbf{I}_{SCf}$ можно поставить в соответствие цепь множеств $\mathbf{I}_n$, аналогичную (4.13), следующим образом:

$$z \subset \mathbf{I}_1 \subset \mathbf{I}_2 \subset \dots \subset \mathbf{I}_n \subset \dots \subset \mathbf{I}_{SCf}. \quad (4.19)$$

Однако в данном случае вместо (4.14) имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Множества $\mathbf{I}_n$ удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{S}_{SCf} * \mathbf{I}_n \subseteq \mathbf{I}_n, \quad \mathbf{I}_n * \mathbf{S}_{SCf} \subseteq \mathbf{I}_{n+1}, \quad \mathbf{S}_{SCf} * \mathbf{I}_n * \mathbf{S}_{SCf} \subseteq \mathbf{I}_{n+1}. \quad (4.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если в (3.18) $g_1^n(z) = 0$ и $g_2^n(z) \neq 0$, то найдется такое $n = \text{ind } g_1(z)$, что $g_1^{n-1}(z)$ может быть отлично от нуля, в то время как $g_3^{n+1}(z) = 0$ за счет обращения в нуль уже второго слагаемого в квадратных скобках (3.18). $\square$

СЛЕДСТВИЕ. Множество $\mathbf{I}_n$ является только левым идеалом суперконформной полугруппы, но не правым и двухсторонним.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. $\mathbf{I}_n$ – квазиидеал [40] и одновременно биидеал [41].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (4.11) и (4.20) получаем свойства квазиидеала $\mathbf{S}_{SCf} * \mathbf{I}_n \cap \mathbf{I}_n * \mathbf{S}_{SCf} \subseteq \mathbf{I}_n$ и биидеала $\mathbf{I}_n * \mathbf{S}_{SCf} * \mathbf{I}_n \subseteq \mathbf{I}_n$. $\square$

В последних двух соотношениях (4.20) происходит подъем лишь в соседнее множество $\mathbf{I}_{n+1}$ (в цепи (4.19)), поэтому $\mathbf{I}_n$ можно определить как правый и двухсторонний *повышающий идеал*. Таким образом, цепь (4.19) представляет собой левоидеальную цепь или цепь правых и двухсторонних повышающих идеалов $\mathbf{I}_n$. Поскольку из (4.20) следует, что $\mathbf{S}_{SCf} * \mathbf{I}_n \cup \mathbf{I}_n * \mathbf{S}_{SCf} \subseteq \mathbf{I}_{n+1}$, цепь (4.19) естественно назвать *антианнуляторным возрастающим рядом*, длина которого равна бесконечности. Можно предположить, что многие свойства антианнуляторного ряда (4.19) обусловлены нильпотентностью нильидеала $\mathbf{I}_{SCf}$, рассматриваемого как самостоятельная полугруппа (для аннуляторных рядов подобные связи установлены в [42]).

Непосредственно из (4.8) следует таблица умножения множеств $\mathbf{I}_n$ и $\mathbf{J}_n$ в общем случае:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_n * \mathbf{I}_{n+k} &\subseteq \mathbf{I}_{n+1}, & \mathbf{J}_n * \mathbf{I}_{n+k} &\subseteq \mathbf{I}_{n+1}, \\ \mathbf{I}_{n+k-1} * \mathbf{I}_n &\subseteq \mathbf{I}_n, & \mathbf{J}_{n+k-1} * \mathbf{I}_n &\subseteq \mathbf{I}_n, \\ \mathbf{J}_n * \mathbf{J}_{n+k} &\subseteq \mathbf{I}_{n+1}, & \mathbf{I}_n * \mathbf{G}_{SCf} &\subseteq \mathbf{I}_{n+1}, \\ \mathbf{J}_{n+k-1} * \mathbf{J}_n &\subseteq \mathbf{I}_n, & \mathbf{G}_{SCf} * \mathbf{I}_n &\subseteq \mathbf{I}_n, \\ \mathbf{I}_n * \mathbf{J}_{n+k} &\subseteq \mathbf{I}_{n+1}, & \mathbf{J}_n * \mathbf{G}_{SCf} &\subseteq \mathbf{I}_{n+1}, \\ \mathbf{I}_{n+k-1} * \mathbf{J}_n &\subseteq \mathbf{I}_n, & \mathbf{G}_{SCf} * \mathbf{J}_n &\subseteq \mathbf{J}_n, \end{aligned} \quad (4.21)$$

где $k > 0$. Отсюда видно, что $\mathbf{I}_n$ является подполугруппой, так как $\mathbf{I}_n * \mathbf{I}_n \subseteq \mathbf{I}_n$, а множество $\mathbf{J}_n$ не является таковой, как и в случае Апп-полугруппы, что есть следствие наличия делителей нуля [43] и нильпотентов [44] в суперконформной полугруппе.

Отметим, что из предпоследнего включения в (4.21) следует, что с помощью действия подгруппы $\mathbf{G}_{SCf}$ справа можно попасть в любое из множеств $\mathbf{I}_n$ с большим индексом, начиная с любого ненулевого члена левоидеального ряда (4.19). Из последних двух соотношений (4.21) имеем

$$\mathbf{G}_{SCf} * \mathbf{J}_n * \mathbf{G}_{SCf} \subseteq \mathbf{I}_{n+1}, \quad (4.22)$$

т.е. некоторые из элементов множества $\mathbf{J}_{n+1}$ оказываются сопряженными по подгруппе $\mathbf{G}_{SCf}$ с элементами предыдущего множества. По аналогии с [45] назовем два множества $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ *взаимно- G -нормальными*, если $\mathbf{g}^{-1} * \mathbf{A} * \mathbf{g} \subseteq \mathbf{B}$, $\mathbf{g} \in \mathbf{G}_{SCf}$. Тогда из (4.22) следует, что любые два соседние множества $\mathbf{J}_n$ из (4.21) содержат взаимно- G -нормальные элементы, для которых также справедлива часть выводов из [46], где исследовались общие свойства классов сопряженных элементов в произвольных абстрактных полугруппах.

4.3. Обобщенные отношения Грина. Чтобы обойти трудность, связанную с появлением $\mathbf{I}_{n+1}$ в правой части соотношения (4.21), построим при фиксированном n разбиение суперконформной полугруппы на непересекающиеся части

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{SCf} &= \mathbf{V}_1^{(n)} \cup \mathbf{V}_2^{(n)} \cup \mathbf{V}_3^{(n)} \cup \mathbf{V}_4, \\ \mathbf{V}_i^{(n)} \cap \mathbf{V}_j^{(n)} &= \emptyset, \quad i \neq j, \quad \mathbf{V}_i^{(n)} \cap \mathbf{V}_4 = \emptyset, \\ \mathbf{V}_1^{(n)} &:= \mathbf{I}_{n-1}, \quad \mathbf{V}_2^{(n)} := \mathbf{J}_n, \quad \mathbf{V}_3^{(n)} := \mathbf{I}_{SCf} \setminus \mathbf{I}_n, \quad \mathbf{V}_4 := \mathbf{G}_{SCf}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

причем $\mathbf{V}_1^{(n)} \cup \mathbf{V}_2^{(n)} = \mathbf{V}_1^{(n+1)} = \mathbf{I}_n$. Тогда для некоторых из введенных множеств будут справедливы стандартные соотношения [5], а для остальных появятся новые. Введем индекс $\mu = 1 \div 4$, тогда разбиение (4.23) запишется в виде $\mathbf{S}_{SCf} = \bigcup_{\mu} \mathbf{V}_{\mu}^{(n)}$. Используя (4.21), можно построить таблицу умножения компонент “векторов” $\mathbf{V}_{\mu}^{(n)}$ в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\mu}^{(n)} * \mathbf{V}_1^{(n)} &\subseteq \mathbf{V}_1^{(n)}, & \mathbf{V}_3^{(n)} * \mathbf{V}_3^{(n)} &\subseteq \mathbf{I}_{SCf}, \\ \mathbf{V}_{\mu}^{(n)} * \mathbf{V}_2^{(n)} &\subseteq \mathbf{V}_1^{(n+1)}, & \mathbf{V}_4 * \mathbf{V}_3^{(n)} &\subseteq \mathbf{I}_{SCf}, \\ \mathbf{V}_1^{(n)} * \mathbf{V}_3^{(n)} &\subseteq \mathbf{V}_1^{(n+1)}, & \mathbf{V}_3^{(n)} * \mathbf{V}_4 &\subseteq \mathbf{I}_{SCf}, \\ \mathbf{V}_2^{(n)} * \mathbf{V}_3^{(n)} &\subseteq \mathbf{V}_1^{(n+2)}, & \mathbf{V}_2^{(n)} * \mathbf{V}_4 &\subseteq \mathbf{V}_1^{(n+2)}, \\ \mathbf{V}_1^{(n)} * \mathbf{V}_4 &\subseteq \mathbf{V}_1^{(n+1)}, & \mathbf{V}_4 * \mathbf{V}_4 &\subseteq \mathbf{V}_4. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Отсюда следует, что только два множества $\mathbf{V}_1^{(n)}$ и $\mathbf{V}_4$ являются подполугруппами (последнее – подгруппа) полугруппы $\mathbf{S}_{SCf}$, а для остальных множеств умножение незамкнуто. Тем не менее изучение их свойств представляет значительный интерес с абстрактно-алгебраической точки зрения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Главные векторные левый, правый идеалы и тензорный двухсторонний идеал определяются формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\mu}^{(n)}(\mathbf{s}) &:= \mathbf{s} * \mathbf{V}_{\mu}^{(n)}, \\ \mathbf{R}_{\mu}^{(n)}(\mathbf{s}) &:= \mathbf{V}_{\mu}^{(n)} * \mathbf{s}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\mathbf{J}_{\mu\nu}^{(n)}(\mathbf{s}) := \mathbf{V}_{\mu}^{(n)} * \mathbf{s} * \mathbf{V}_{\nu}^{(n)}, \quad (4.26)$$

где $\mathbf{s} \in \mathbf{J}_n$.

Из (4.21) и (4.24) следуют включения

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\mu}^{(n)}(\mathbf{s}) &\subseteq \mathbf{V}_1^{(n+1)}, & \mathbf{R}_2^{(n)}(\mathbf{s}) &\subseteq \mathbf{V}_1^{(n+1)}, & \mathbf{R}_1^{(n)}(\mathbf{s}) &\subseteq \mathbf{V}_1^{(n)}, \\ \mathbf{R}_3^{(n)}(\mathbf{s}) &\subseteq \mathbf{V}_1^{(n+2)}, & \mathbf{J}_{\mu 1}^{(n)}(\mathbf{s}) &\subseteq \mathbf{V}_1^{(n)}, & \mathbf{J}_{13}^{(n)}(\mathbf{s}) &\subseteq \mathbf{V}_1^{(n+1)}, \\ \mathbf{J}_{\mu 3}^{(n)}(\mathbf{s}) &\subseteq \mathbf{V}_1^{(n+2)}, \quad \mu > 1, & \mathbf{J}_{\mu 4}^{(n)}(\mathbf{s}) &\subseteq \mathbf{V}_1^{(n+2)}, & \mu > 1, \\ \mathbf{R}_4^{(n)}(\mathbf{s}) &\subseteq \mathbf{V}_1^{(n+2)}, & \mathbf{J}_{\mu 2}^{(n)}(\mathbf{s}) &\subseteq \mathbf{V}_1^{(n+1)}, & \mathbf{J}_{14}^{(n)}(\mathbf{s}) &\subseteq \mathbf{V}_1^{(n+1)}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Выясним свойства векторных (4.25) и тензорных (4.26) идеалов по отношению к $\mathbf{L}_{\mu}^{(n)}(\mathbf{s})$. Так, левый векторный идеал является обычным левым идеалом множества $\mathbf{L}_{\mu}^{(n)}(\mathbf{s})$, поскольку

$$\mathbf{V}_{\mu}^{(n)} * \mathbf{L}_{\mu}^{(n)}(\mathbf{s}) \subseteq \mathbf{L}_{\mu}^{(n)}(\mathbf{s}). \quad (4.28)$$

Однако для правого векторного идеала подобное включение реализуется только при следующих комбинациях индексов:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\mu}^{(n)}(\mathbf{s}) * \mathbf{V}_1^{(n)} &\subseteq \mathbf{R}_{\mu}^{(n)}(\mathbf{s}), \\ \mathbf{R}_{\mu}^{(n)}(\mathbf{s}) * \mathbf{V}_2^{(n)} &\subseteq \mathbf{R}_{\mu}^{(n)}(\mathbf{s}), \quad \mu \neq 1, \\ \mathbf{R}_3^{(n)}(\mathbf{s}) * \mathbf{V}_3^{(n)} &\subseteq \mathbf{R}_3^{(n)}(\mathbf{s}), \end{aligned} \quad (4.29)$$

причем последнее справедливо, если $\mathbf{V}_3^{(n)} \cap \mathbf{V}_1^{(n+2)} \neq \emptyset$.

Укажем также на соотношения, в которых $\mathbf{R}_\mu^{(n)}(\mathbf{s})$ ведет себя как μ -повышающий идеал:

$$\mathbf{R}_1^{(n)}(\mathbf{s}) * \mathbf{V}_\mu^{(n)} \subseteq \mathbf{R}_2^{(n)}(\mathbf{s}), \quad \mathbf{R}_2^{(n)}(\mathbf{s}) * \mathbf{V}_\mu^{(n)} \subseteq \mathbf{R}_3^{(n)}(\mathbf{s}). \quad (4.30)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Обобщенные отношения Грина* определяются формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{s}\mathcal{L}_{\mu\nu}^{(nm)}\mathbf{t} &\Leftrightarrow \mathbf{L}_\mu^{(n)}(\mathbf{s}) = \mathbf{L}_\nu^{(m)}(\mathbf{t}), \\ \mathbf{s}\mathcal{R}_{\mu\nu}^{(nm)}\mathbf{t} &\Leftrightarrow \mathbf{R}_\mu^{(n)}(\mathbf{s}) = \mathbf{R}_\nu^{(m)}(\mathbf{t}), \\ \mathbf{s}\mathcal{G}_{\mu\nu\rho\sigma}^{(nm)}\mathbf{t} &\Leftrightarrow \mathbf{J}_{\mu\nu}^{(n)}(\mathbf{s}) = \mathbf{J}_{\rho\sigma}^{(m)}(\mathbf{t}), \end{aligned} \quad (4.31)$$

где $\mathbf{s} \in \mathbf{J}_n$, $\mathbf{t} \in \mathbf{J}_m$.

Классы эквивалентности по векторным и тензорным отношениям Грина имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\mathbf{s},\mu\nu}^{(nm)} &:= \{\mathbf{t} \in \mathbf{J}_m \mid \mathbf{L}_\mu^{(n)}(\mathbf{s}) = \mathbf{L}_\nu^{(m)}(\mathbf{t})\}, \\ \mathbf{R}_{\mathbf{s},\mu\nu}^{(nm)} &:= \{\mathbf{t} \in \mathbf{J}_m \mid \mathbf{R}_\mu^{(n)}(\mathbf{s}) = \mathbf{R}_\nu^{(m)}(\mathbf{t})\}, \\ \mathbf{J}_{\mathbf{s},\mu\nu\rho\sigma}^{(nm)} &:= \{\mathbf{t} \in \mathbf{J}_m \mid \mathbf{J}_{\mu\nu}^{(n)}(\mathbf{s}) = \mathbf{J}_{\rho\sigma}^{(m)}(\mathbf{t})\}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Задание частичного порядка на множествах классов (4.32) превращает фактор-множества $\mathbf{S}_{SCf}/\mathcal{L}$, $\mathbf{S}_{SCf}/\mathcal{R}$, $\mathbf{S}_{SCf}/\mathcal{G}$ в частично упорядоченные множества: *правый*, *левый* и (просто) *остов* суперконформной полугруппы, причем мощность каждого остова равна бесконечности [47].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Суперконформная полугруппа $\mathbf{S}_{SCf}$ не является устойчивой [48] ни справа, ни слева.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (4.1) и определений (4.3)–(4.7) следует

$$\forall \mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathbf{S}_{SCf}, \mathbf{s} \in \mathbf{S}_{SCf} * \mathbf{s} * \mathbf{t} \not\Rightarrow \mathbf{L}_\mu^{(n)}(\mathbf{s}) = \mathbf{L}_\nu^{(m)}(\mathbf{s} * \mathbf{t})$$

и

$$\mathbf{s} \in \mathbf{t} * \mathbf{s} * \mathbf{S}_{SCf} \not\Rightarrow \mathbf{R}_\mu^{(n)}(\mathbf{s}) = \mathbf{R}_\nu^{(m)}(\mathbf{t} * \mathbf{s}). \quad \square$$

Это также является следствием наличия делителей нуля и нильпотентов в кольце, над которым заданы суперконформные преобразования.

4.4. Квазихарактеры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Идеальный индекс* элемента $\mathbf{s}$ суперконформной полугруппы определяется формулой

$$\text{ind}_0 \mathbf{s} := \text{ind } g(\mathbf{z}), \quad (4.33)$$

причем $\text{ind}_0 \mathbf{g} = \infty$.

Отметим, что $\text{ind}_0 \mathbf{s} \neq \text{ind}^* \mathbf{s}$ (см. (2.3)). Однако все элементы, обладающие конечным идеальным индексом, нильпотентны в смысле полугруппового умножения, т.е. имеют конечный полугрупповой индекс (2.3).

Для произведения элементов суперконформной полугруппы из (4.33) имеем

$$\max \operatorname{ind}_0 \mathbf{s} * \mathbf{t} = \begin{cases} \operatorname{ind}_0 \mathbf{t}, & \operatorname{ind}_0 \mathbf{s} \geq \operatorname{ind}_0 \mathbf{t}, \\ \operatorname{ind}_0 \mathbf{s} + 1, & \operatorname{ind}_0 \mathbf{s} < \operatorname{ind}_0 \mathbf{t}. \end{cases} \quad (4.34)$$

В частности,

$$\operatorname{ind}_0 \mathbf{g} * \mathbf{s} \leq \operatorname{ind}_0 \mathbf{s}, \quad \operatorname{ind}_0 \mathbf{s} * \mathbf{g} \leq \operatorname{ind}_0 \mathbf{s} + 1. \quad (4.35)$$

Аналогично определяются индексы соответствующих множеств элементов (4.23). Для них получаем

$$\max \operatorname{ind}_0 \mathbf{V}_1^{(n)} = n - 1, \quad \operatorname{ind}_0 \mathbf{V}_2^{(n)} = n, \quad \min \operatorname{ind}_0 \mathbf{V}_3^{(n)} = n + 1. \quad (4.36)$$

Из соотношений (4.34) и (4.35) следует, что величина $|\operatorname{ind}_0 \mathbf{s} * \mathbf{t} - \operatorname{ind}_0 \mathbf{s} - \operatorname{ind}_0 \mathbf{t}|$ ограничена, поэтому отличие отображения $\mathbf{s} \rightarrow \operatorname{ind}_0 \mathbf{s}$ от гомоморфизма конечно, что позволяет определить квазихарактер [21] по формуле $\chi(\mathbf{s}) := \operatorname{ind}_0 \mathbf{s}$, который мы назовем *идеальным квазихарактером*. Отметим некоторые свойства идеального квазихарактера: $\chi(\mathbf{s}^{*2}) \leq \chi(\mathbf{s})$, $\chi(\mathbf{g}) = \infty$. Из того факта, что множества $\mathbf{J}_n$, на которых определен идеальный квазихарактер, не пересекаются: $\mathbf{J}_n \cap \mathbf{J}_k = \emptyset$, $n \neq k$, следует вывод о том, что $\chi(\mathbf{s})$ действительно разделяет элементы полугруппы, а отношение π , заданное формулой $\mathbf{s} \stackrel{\pi}{\sim} \mathbf{t} \Leftrightarrow \chi(\mathbf{s}) = \chi(\mathbf{t})$, является отношением эквивалентности в суперконформной полугруппе.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, суперконформные полугруппы в теоретико-множественном отношении представляют собой довольно нетривиальные алгебраические объекты, обладающие новыми, далеко еще не изученными абстрактными свойствами. Их детальное рассмотрение даст возможность анализа существующих суперсимметричных теорий под нестандартным углом зрения, используя несколько иной, чем в настоящее время общепринят физиками, математический аппарат. В частности, применение необратимых преобразований позволит последовательно решить проблемы, связанные с появлением делителей нуля и нильпотентов. Это открывает перспективы дальнейшего построения и исследования новых конструкций и объектов будущей объединенной теории, в которой как основополагающий принцип рассматривается суперсимметрия или ее обобщения, использующие нильпотенты (например, квантовые супергруппы [49]).

Работа выполнена при поддержке фонда Александра фон Гумбольда.

Автор выражает благодарность D. Arinkin, A. Comtet, V.G. Drinfeld, J. Kupsch, J.M. Howie, M.V. Lawson, B.V. Novikov, W. Ruhl, S.D. Sinelshchikov, J. Wess, A.S. Wightman за полезные обсуждения, а также J.-P. Ader, J.W. Baker, S. Cho, A. Eremenko, J.-L. Gervais, P. Grillet, C. Grosche, L. Hodgkin, T. Kobayashi, P.R. Jones, I. Levi, K.D. Magill, J.M. Rabin, T. Schmitt, A. Sudbery, G. Szasz за присланные работы.

Список литературы

- [1] Volkov D.V., Akulov V.P. // JETP Lett. 1972. V. 16. P. 621–624.
- [2] Green M.B., Schwarz J.H., Witten E. Superstring Theory. V. 1, 2. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987.
- [3] Gates S.J., Grisaru M.T., Rocek M., et al. Superspace. Reading: Benjamin, 1983.

- [4] *Berezin F.A.* Introduction to Superanalysis. Dordrecht: Reidel, 1987.
- [5] *Clifford A.H., Preston G.B.* The Algebraic Theory of Semigroups. V. 1. Providence: Amer. Math. Soc., 1961.
- [6] *Ljapin E.S.* Semigroups. Providence: Amer. Math. Soc., 1968.
- [7] *Kawakubo K.* The Theory of Transformation Groups. New York: Clarendon Press, 1991.
- [8] *Howie J.M.* // Math. Chronicle. 1987. V. 16. P. 1–14.
- [9] *Duplij S.* // J. Math. Phys. 1991. V. 32. №11. P. 2959–2965; // Sov. J. Nucl. Phys. 1990. V. 52. №10. P. 742–745.
- [10] *Duplij S.* // Theor. Math. Phys. 1991. V. 86. №2. P. 138–143; // J. Phys. 1991. V. A24. №13. P. 3167–3179; // Acta Phys. Pol. 1990. V. B21. №10. P. 783–811.
- [11] *Petrich M.* Cayley theorems for semigroups. Semigroups and Their Applications. /Ed. Coberstein S.M., Higgins P.M. Dordrecht: D. Reidel, 1987. P. 133–138.
- [12] *Magill K.D.* // Semigroup Forum. 1975. V. 11. №1. P. 1–189.
- [13] *Aizenstat A.J.* // Izv. Vuzov. Math. 1965. V. 1. P. 3–11.
- [14] *Hofmann K.H., Mostert P.S.* Elements of Compact Semigroups. Columbus: Merrill, 1966.
- [15] *Leites D.A.* // Russian Math. Surv. 1980. V. 35. №1. P. 1–64.
- [16] *Rogers A.* // J. Math. Phys. 1980. V. 21. №5. P. 1352–1365.
- [17] *Khrennikov A.Y.* // Russian Math. Surv. 1988. V. 43. №2. P. 87–114; // Theor. Math. Phys. 1987. V. 72. №3. P. 24–34.
- [18] *Schwarz A.S.* // Theor. Math. Phys. 1984. V. 60. №1. P. 37–42; *Voronov A.A.* // Theor. Math. Phys. 1984. V. 60. №1. P. 43–48; *Vladimirov V.S., Volovich I.V.* // Theor. Math. Phys. 1984. V. 59. №1. P. 3–27.
- [19] *Boyer C.P., Güttler S.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. V. 285. №1. P. 241–267.
- [20] *Catenacci R., Reina C., Teofilatto P.* // J. Math. Phys. 1985. V. 26. №4. P. 671–674.
- [21] *Shtern A.I.* // Func. Anal., Appl. 1991. V. 25. №2. P. 140–143.
- [22] *Berezin F.A., Kac G.I.* // Math. Sbornik. 1970. V. 11. P. 311–326.
- [23] *Schwarz A.S.* Superanalogs of symplectic and contact geometry and their applications to quantum field theory: UC Davis preprint-94-06-01, HEP-TH-9406120, 1994.
- [24] *Witt B.S.D.* Supermanifolds. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1984.
- [25] *Dubrovin B.A., Fomenko A.T., Novikov S.P.* Modern Geometry. Methods and Applications. Part 1. The Geometry of Surfaces, Transformation Groups and Fields. Berlin: Springer-Verlag, 1984; Part 2. The Geometry and Topology of Manifolds. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
- [26] *Shander V.N.* // Func. Anal. Appl. 1988. V. 22. №1. P. 91–92.
- [27] *Baranov M.A., Frolov I.V., Schwarz A.S.* // Theor. Math. Phys. 1989. V. 79. №2. P. 241–252.
- [28] *Gilmer R.* Multiplicative Ideal Theory. New York: Dekker, 1972; *Larsen M.D., McCarthy P.J.* Multiplicative Theory of Ideals. New York: Academic Press, 1971; *Császár A., Thümmel E.* // Acta Math. Hung. 1990. V. 56. № 3–4. P. 189–204.
- [29] *Baranov A.M., Schwarz A.S.* // Int. J. Mod. Phys. 1987. V. A2. P. 1773–1781.
- [30] *Crane L., Rabin J.M.* // Commun. Math. Phys. 1988. V. 113. №4. P. 601–623.
- [31] *Giddings S.B., Nelson P.* // Commun. Math. Phys. 1988. V. 116. №4. P. 607–634; // Phys. Rev. Lett. 1987. V. 59. №23. P. 2619–2622.
- [32] *Friedan D.* Notes on string theory and two dimensional conformal field theory. Unified String Theories. /Ed. Green M., Gross D. Singapore: World Sci., 1986. P. 118–149.
- [33] *Baranov M.A., Frolov I.V., Schwarz A.S.* // Theor. Math. Phys. 1987. V. 70. №1. P. 92–103; *Rosly A.A., Schwarz A.S., Voronov A.A.* // Commun. Math. Phys. 1988. V. 119. №1. P. 129–152.
- [34] *Distler J., Nelson P.* // Phys. Rev. Lett. 1991. V. 66. №15. P. 1955–1959; *Covindarajan S., Nelson P., Rey S.-J.* // Nucl. Phys. 1991. V. B365. №3. P. 633–652; *Covindarajan S., Nelson P., Wong E.* // Commun. Math. Phys. 1992. V. 147. №2. P. 253–275.
- [35] *Giddings S.B., Nelson P.* // Commun. Math. Phys. 1988. V. 118. P. 289–302; *Hodgkin L.* // J. Geom. Phys. 1989. V. 6. №3. P. 333–338; *Rogers A.* // Super Riemann surfaces. The Interface of Mathematics and Particle Physics / Eds. Quillen D.G., Segal G.B., Tson S.T. New York: Clarendon Press, 1990. P. 87–96.
- [36] *Rogers A., Langer M.* // Class. Q. Grav. 1994. V. 11. P. 2619–2626.

- [37] *Grillet P.A.* // Semigroup Forum. 1991. V. 43. P. 187–201; *Sullivan R.P.* // J. Algebra. 1987. V. 110. №2. P. 324–343.
- [38] *Grillet P.A.* // Semigroup Forum. 1995. V. 50. №1. P. 25–36; *Sullivan R.P.* // J. Austr. Math. Soc. 1987. V. A43. №1. P. 127–136.
- [39] *Grillet P.A., Petrich M.* // Pacific J. Math. 1968. V. 26. P. 493–508; *Bogdanović S., Ćirić M.* // Proc. Japan Acad. 1992. V. A68. №6. P. 115–117; P. 126–130; *Wang L.M.* // Semigroup Forum. 1993. V. 47. P. 353–358.
- [40] *Steinfeld O., Thang T.T.* // Beitrage Alg. Geom. 1988. V. 26. P. 127–135; *Clifford A.H.* // Semigroup Forum. 1978. V. 16. №2. P. 183–196; *Steinfeld O.* Quasi-ideals in Rings and Semigroups. Budapest: Akadémiai Kiado, 1978.
- [41] *Miccoli M.M.* // Note Mat. 1987. V. 7. №1. P. 83–89; *Catino F.* // Rev. Mat. Pure Appl. 1989. V. 4. P. 89–92; *Lajos S.* // Acta Sci. Math. Seged. 1961. V. 22. №1. P. 217–222.
- [42] *Hmelnitsky I.L.* // Semigroup Forum. 1985. V. 32. P. 135–144; *Shevrin L.N., Prosvirov A.S.* // Trans. Moscow Math. Soc. 1973. V. 29. P. 235–246; *Long D.Y.* // Chinese Ann. Math. 1992. V. A13. №3. P. 360–363.
- [43] *Huckaba J.A.* Commutative Rings with Zero Divisors. New York: Dekker, 1988; *Visweswaran S.* // Bull. Austr. Math. Soc. 1991. V. 43. № 2. P. 233–240.
- [44] *Gomes G.M.S., Howie J.M.* // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1987. V. 30. №3. P. 383–395; *Garba G.U.* // Semigroup Forum. 1994. V. 48. №1. P. 37–49; *Yamada M.* // Proc. Japan Acad. 1964. V. 40. P. 94–98.
- [45] *Levi I., Williams W.* // Semigroup Forum. 1991. V. 43. P. 344–356; *Levi I.* // Glasgow Math. J. 1987. V. 29. P. 149–157; *Levi I., Seif S.* // Semigroup Forum. 1991. V. 43. P. 93–113; *Levi I.* Green's relations on G -normal semigroups: Louisville preprint, 1992.
- [46] *Schein B.M.* Cosets in groups and semigroups. Semigroups With Applications. /Ed. Howie J.M., Munn W., Weinert H.J. River Edge: World Sci., 1992. P. 205–221.
- [47] *Meakin J.* // J. London Math. Soc. 1980. V. 21. P. 244–256.
- [48] *Anderson L., Hunter R., Koch R.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. V. 117. P. 521–529.
- [49] *Manin Y.* // Commun. Math. Phys. 1989. V. 123. P. 123–135; Topics Noncommutative Differential Geometry. Princeton: Princeton University Press, 1991; *Khoroshkin S.M., N. Tolstoy V.* // Commun. Math. Phys. 1991. V. 141. №3. P. 599.

Department of Physics,
University of Kaiserslautern
D-67653 Kaiserslautern, Germany
Харьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
28.III.1995 г.

S. A. Duplij

THE IDEAL STRUCTURE OF SUPERCONFORMAL SEMIGROUPS

The role of noninvertible transformations in superstring theories is discussed. A new parametrization of superconformal groups is found, which enable us to construct their ideal extensions, superconformal semigroups. The latter consist of a group containing the standard superconformal transformations and of an ideal. The general abstract structure of superconformal groups is analysed in detail. A classification in terms of indices of nilpotency is presented. The ideal series is constructed, and new generalized “vector” and “tensor” Green's relations and several quasicharacters are defined. The necessity of similar constructions in other supersymmetric and superquantum models is stressed.