Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Ю. Волченков, М. Ю. Налимов, Поправки на сжимаемость жидкости к спектрам развитой турбулентности, *ТМФ*, 1996, том 106, номер 3, 375–389

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1122>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 15:35:56

Д. Ю. Волченков, М. Ю. Налимов

ПОПРАВКИ НА СЖИМАЕМОСТЬ ЖИДКОСТИ К СПЕКТРАМ РАЗВИТОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Построено регулярное разложение для случая слабой сжимаемости в теории развитой турбулентности изотропной однородной сжимаемой жидкости с функционалом действия MSR-типа. Параметром разложения является число Маха – Ma . В инерционном интервале теории несжимаемой жидкости изучены инфракрасные сингулярности, определяемые поперечными полями, характерными для теории несжимаемой жидкости. Данные особенности связаны с составными операторами поперечных полей, которые были исследованы методами квантово-полевой ренормгруппы. В результате было показано, что поперечные поля индуцируют скейлинговое поведение в теории, при этом скейлинговая размерность числа Ma равна $1/3$ (т.е. $Ma k^{-1/3}$ есть скейлингово-безразмерный параметр корреляционных функций теории в инерционном интервале).

1. ВВЕДЕНИЕ

Метод квантово-полевой ренормгруппы (РГ) успешно применялся для описания спектральных свойств в инерционном интервале развитой турбулентности несжимаемой жидкости, например, в работах [1–3]. В них используется стохастическое уравнение Навье–Стокса

$$\partial_t \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} (\eta \nabla^2 \mathbf{v} + \eta' \partial(\partial \mathbf{v}) - \partial p) - (\mathbf{v} \partial) \mathbf{v} + \mathbf{f}, \quad (1)$$

где $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ – векторное поле скорости, $\rho(\mathbf{x}, t)$ – поле плотности жидкости, η – сдвиговая вязкость, $\eta' = (\eta/3 + \zeta)$, ζ – объемная вязкость, $p(\mathbf{x}, t)$ – поле давления, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ – плотность случайной внешней силы, для которой предполагается гауссово распределение с коррелятором

$$\langle f_i(\mathbf{x}, t) f_j(\mathbf{x}', t') \rangle = D_{ij}(x - x') \delta(t - t'). \quad (2)$$

Скобки $\langle \dots \rangle$ означают здесь усреднение по случайной силе, а функция D_{ij} моделирует подкачку энергии в систему из крупномасштабной области.

Для несжимаемой жидкости уравнение неразрывности

$$\partial_t \rho + \partial_i(\rho v_i) = 0 \quad (3)$$

диктует поперечность поля $\mathbf{v}$. Сжимаемая жидкость описывается той же системой (1), (2), (3), которую следует дополнить уравнением состояния $p = p(\rho)$. Считая сжимаемость жидкости малой, вместо уравнения состояния можно использовать уравнение

адиабатической связи отклонений δp и $\delta \rho$ от равновесных значений p_0, ρ_0 :

$$\delta p = c^2 \delta \rho, \quad (4)$$

c – скорость звука (в дальнейшем мы будем опускать символ δ при этих отклонениях и считать равновесное значение плотности $\rho_0 = 1$). В теории появляется новый безразмерный параметр – число Маха: $Ma = v_c/c$, где v_c – характерная скорость турбулентных пульсаций.

Обобщение на случай сжимаемой жидкости феноменологической теории Колмогорова (приведенное, например, в [4]) вводит в инерционном интервале новую переменную, пропорциональную $Ma/k^{1/3}$, где k – волновое число. Аналогичный результат получен в [5] в рамках уравнений самосогласования. Интересным представляется проверка данного результата в последовательном статистическом подходе. В работе [6] декларировано полное решение этой проблемы при произвольных числах Ма непосредственным применением метода РГ в формулировке Вильсона. Однако мы считаем данную работу недостоверной. Используя формально более развитый, хотя и эквивалентный, квантово-полевой РГ-подход, в приложении к данной статье мы объясняем, что рассматриваемая теория (1)–(4) неренормируема и к ней нельзя прямо применять РГ-подход (в [6] вопрос ренормируемости не обсуждается вовсе, авторы ограничились однопетлевой ренормировкой одной из функций Грина).

Поэтому в [4] была рассмотрена теория (1)–(4) в приближении слабой сжимаемости жидкости, т.е. исследована первая поправка к спектрам в инерционном интервале несжимаемой жидкости по малому числу Ма. Из уравнений (1)–(3) с точностью до первого порядка по формально малому параметру c^{-2} поля продольной компоненты скорости и давления были выражены в локальном приближении по времени как составные операторы случайных полей поперечных пульсаций. После изучения ренормировки этих операторов был подтвержден результат [5] и определено, что первая поправка к спектрам турбулентности несжимаемой жидкости пропорциональна $Ma^2/k^{2/3}$. Таким образом, результаты [4, 5] свидетельствуют, что эти поправки формально существенны в инфракрасной (ИК) области спектра, а значит, c^{-2} является массивным параметром в скейлинговой области. В теории турбулентности несжимаемой жидкости нижняя граница инерционного интервала определяется ИК-массой (обратным интегральным масштабом турбулентности), которая содержится в модельной функции распределения случайной силы. Новый, связанный со сжимаемостью, массивный параметр начиная с некоторых чисел Ма попадает в инерционный интервал. При достаточно большом Ма вообще не останется интервала волновых чисел, в котором возможно построение теории турбулентности, не содержащей размерных параметров. Поэтому с точки зрения теории скейлингового поведения основная задача будет заключаться не в установлении размерностей, а в описании так называемых скейлинговых функций.

В некотором смысле первый шаг к решению этой задачи сделан в данной статье. Здесь предложен метод построения разложения турбулентных спектров по числу Ма (нулевой член разложения соответствует несжимаемой жидкости). Сущность предлагаемого метода заключается в следующем. Предъявлено квантово-полевое действие теории, в котором при вершинах взаимодействия новых полей (отсутствующих в теории турбулентности несжимаемой жидкости) стоят предполагаемые малыми множители, пропорциональные c^{-2} . В этой теории предлагается сперва проводить усреднение по поперечным полям и затем воспользоваться результатами РГ для несжимаемой жидкости. Тогда в вершины взаимодействия новых полей войдут составные операторы поперечных полей с известными скейлинговыми размерностями. Эти операторы и

определяют ИК-поведение в теории турбулентности сжимаемой жидкости со скейлинговыми размерностями полей и параметров: $\Delta[c] = -1/3$, $\Delta[p] = -2/3$, $\Delta[v_{\parallel}] = -1$ ($v_{\parallel}$ – продольная компонента скорости). Скейлинговая размерность времени оказалась равной $\Delta_t = -2/3$, как и без учета сжимаемости [2]. Показано, что ИК-существенные вклады поправок на сжимаемость жидкости представляются в виде рядов по переменной $c^{-2}k^{-2/3}$ (первый порядок разложения совпадает с определенным в [4]). В теории с учетом сжимаемости появляется новая соответствующая времени универсальная переменная ckt .

Показано, что в ведущем порядке по $c^{-2}k^{-2/3}$ в конкретных диаграммах теории возмущений пропагаторы новых полей, связанных со сжимаемостью, дают $\delta(t)$ -образный вклад в поперечные функции Грина, что оправдывает использованное в [4] t -локальное приближение.

2. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Стохастическая задача (1)–(4), дополненная условиями запаздывания и начальными условиями нулевых флуктуаций полей при $t \rightarrow \infty$ эквивалентна квантово-полевой задаче с функционалом действия MSR-типа [7]:

$$S = \frac{1}{2}v'_i D_{ij} v'_j + v'_i \left[-\partial_t v_i - v_j \partial_j v_i + \frac{1}{1+p/c^2} (\eta \nabla^2 v_i + \eta' \partial_i \partial_j v_j - \partial_i p) \right] + \\ + p' \left(-\frac{1}{c^2} \partial_t p - \partial_i v_i - \frac{1}{c^2} v_i \partial_i p - \frac{1}{c^2} p \partial_i v_i \right). \quad (5)$$

Необходимые интегрирования по $\mathbf{x}$, t и суммирование по повторяющимся индексам полей здесь и в аналогичных формулах в дальнейшем подразумеваются. Производящий функционал корреляционных функций теории (1)–(4) определяется формулой $G(A_{\Phi}) = \int Dv' Dv Dp Dp' \det M \exp(S + \Phi A_{\Phi})$, где $\Phi = \{v, v', p, p'\}$, A_{Φ} – источники полей, а $\det M$ при определенных ограничениях на диаграммную технику, обсуждаемых в [2], представляет собой несущественный множитель. При $c^{-2} = 0$ интегрирование по полю p' в производящем функционале с действием (5) приводит к появлению $\delta(\partial_i v_i)$, поэтому поле скорости $\mathbf{v}$ становится поперечным, и мы получаем теорию несжимаемой жидкости. Действие последней S_{ic} получается из (5) при условии $p' = p = 0$ и замене $\mathbf{v}'$ и $\mathbf{v}$ на поперечные (в импульсном представлении) поля. Поэтому параметр c^{-2} определяет поправки на сжимаемость жидкости. Наша задача заключается в построении теории возмущений по $1/c$. Введем обозначения для продольных и поперечных компонент векторных полей $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$: $\mathbf{v}_{\perp} = P_{\perp} \mathbf{v}$; $\mathbf{v}_{\parallel} = P_{\parallel} \mathbf{v}$; $P_{\parallel ij} = k_i k_j / k^2$; $P_{\perp ij} = \delta_{ij} - P_{\parallel ij}$ (аналогично для $v'_{\perp}$ и $v'_{\parallel}$).

При $c^{-2} = 0$ в теории (5) отсутствуют продольные поля, уравнение (3) дает $v_{\parallel} \sim c^{-2}$. Поэтому естественной представляется замена переменных $v_{\parallel} \rightarrow \tilde{u}$, $p' \rightarrow q'$ в действии (5):

$$v_{\parallel} = \tilde{u}/c^2; \quad p' = c^2 q'. \quad (6)$$

Квантово-полевая теория возмущений для производящего функционала $G(A)$ получается в результате разложения $\exp S$ по вершинам (нелинейностям), т.е. членам, содержащим произведения трех и более полей. Для построения соответствующей диаграммной техники следует представить $1/(1+p/c^2)$ в виде ряда по p/c^2 . Чтобы эта

диаграммная техника естественно согласовывалась с разложением по c^{-1} , полезно добиться того, чтобы вершины взаимодействия, содержащие продольные и скалярные поля $v_{\parallel}$, $v'_{\parallel}$, p и p' (т.е. те поля, которые отсутствуют в теории турбулентности несжимаемой жидкости), были пропорциональны отрицательным степеням c . Для этого сделаем в теории с действием (5) следующую замену переменных $p \rightarrow q$, $\tilde{u} \rightarrow u$:

$$p = q - F_p \equiv \tilde{q}; \quad \tilde{u} = u + F_{v1} - F_{v2}q, \quad (7)$$

где $F_p = \Delta^{-1} \partial_i \partial_k v_{\perp i} v_{\perp k}$, $F_{v1} = \partial_i \Delta^{-1} \mathcal{D}_t \Delta^{-1} \partial_j \partial_k v_{\perp j} v_{\perp k}$ и $F_{v2} = \Delta^{-1} \partial_i \mathcal{D}_t$, $\mathcal{D}_t = \partial_t + (v_{\perp} \partial)$. Очевидно, что связанный с этим преобразованием якобиан тривиален. Замена переменных (7) включает в себя предложенные в [4] сдвиги полей p и $v_{\parallel}$, поэтому нами будут учтены рассмотренные в [4] поправки к спектрам несжимаемой турбулентности.

В результате замен (6)–(7) действие (5) принимает вид

$$\begin{aligned} S(\Phi) = & \frac{1}{2} v'_{\perp i} D_{\perp ij} v'_{\perp j} + \frac{1}{2} v'_{\parallel i} D_{\parallel ij} v'_{\parallel j} + v'_{\perp j} \left[-\partial_t v_{\perp i} - v_{\perp j} \partial_j v_{\perp i} - \right. \\ & - \frac{1}{c^2} v_{\perp j} \partial_j \tilde{u}_i - \frac{1}{c^2} \tilde{u}_j \partial_j v_{\perp i} + \frac{1}{1 + \tilde{q}/c^2} \eta \Delta v_{\perp i} - \frac{1}{c^4} \frac{\tilde{q}}{1 + \tilde{q}/c^2} (\eta + \eta') \Delta \tilde{u}_i \left. \right] + \\ & + v'_{\parallel i} \left[-\frac{1}{c^2} \partial_t \tilde{u}_i - \frac{1}{c^2} (v_{\perp j} \partial_j \tilde{u}_i + \tilde{u}_j \partial_j v_{\perp i}) - \frac{1}{c^4} \tilde{u}_j \partial_j \tilde{u}_i - \frac{1}{c^2} \frac{\tilde{q}}{1 + \tilde{q}/c^2} \eta \Delta v_{\perp i} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{c^2} \frac{1}{1 + \tilde{q}/c^2} (\eta + \eta') \Delta \tilde{u}_{\parallel i} - \partial_i q + \frac{1}{c^2} \frac{\tilde{q}}{1 + \tilde{q}/c^2} \partial_i \tilde{q} \right] - p' \left[\partial_i u_i + \frac{1}{c^2} \partial_i (\tilde{u}_i \tilde{q}) \right]. \quad (8) \end{aligned}$$

В действии (8) мы различаем корреляторы $D_{\perp}$ и $D_{\parallel}$ поперечных и продольных компонент случайной силы. Чтобы продольная часть уравнения (1) не противоречила утверждению $v_{\parallel} \sim 1/c^2$, необходимо предположить $f_{\parallel} \sim 1/c^2$, откуда следует $D_{\parallel} \sim 1/c^4$. Поэтому по аналогии с [1, 2] выберем корреляторы в виде

$$D_{\perp ij}(k) = P_{\perp ij} g_0 \nu_0^3 k^{4-d-2\varepsilon}, \quad D_{\parallel ij}(k) = \frac{1}{c^4} P_{\parallel ij} g'_0 k^{4-d-2\varepsilon}, \quad (9)$$

где k – импульс, $\nu_0 = \eta/\rho_0$ – кинематическая вязкость, d – размерность пространства. Множитель ν_0^3 введен в выражение для $D_{\perp}$ (9) для обезразмеривания константы g_0 . Физическим значением параметра регулярного разложения РГ-функций в теории турбулентности несжимаемой жидкости является $\varepsilon = 2$ [1, 2]. Мы будем рассматривать случай трехмерного пространства $d = 3$.

Для краткости в дальнейшем обозначим $v_{\perp} = v$, $v'_{\perp} = v'$. Существенным является то, что действие (8) обладает той же галилеевой инвариантностью, что и теория турбулентности несжимаемой жидкости [2], а именно, оно инвариантно относительно преобразований полей $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{v}(t, \mathbf{x} + \mathbf{a}t) - \mathbf{a}$, $\Phi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \Phi(t, \mathbf{x} + \mathbf{a}t)$, где Φ – остальные поля, кроме $\mathbf{v}$. Чтобы в этом убедиться, необходимо учесть, что продольное поле $\tilde{u}$ или u представимо в виде градиента некоторого скалярного потенциала, поэтому $\partial_i \tilde{u}_j = \partial_j \tilde{u}_i$. Это свойство было использовано нами при написании действия (8) (оно позволило отбросить член $v'_i \tilde{u}_j \partial_j \tilde{u}_i$, поскольку $\tilde{u}_j \partial_j \tilde{u}_i$ – чисто продольный оператор), и с его помощью можно написать $v'_i v_j \partial_j \tilde{u}_i = -v'_i \tilde{u}_j \partial_i v_j$. После чего поперечное поле $\mathbf{v}$ входит в действие (8) либо под знаком производной, либо в ковариантной производной $\mathcal{D}_t$.

3. ЭФФЕКТИВНАЯ ТЕОРИЯ В ИК-ОБЛАСТИ

Действие (8) состоит из действия теории несжимаемой жидкости S_{ic} и членов, содержащих продольные и скалярные поля u , u' , q , p' . Для S_{ic} ИК-поведение в инерционном интервале установлено методом РГ в работах [1, 2], где показано, что скейлинговые размерности полей и их аргументов равны $\Delta_v = -1/3$, $\Delta'_v = 10/3$, $\Delta_t = -2/3$ при физических значениях параметров ε , d (как обычно, размерность импульса $d_k = 1$). Мы воспользуемся результатами этих работ для суммирования ИК-особенностей в подграфах, состоящих только из поперечных линий в обычной диаграммной технике в теории (8).

ТАБЛИЦА 1

Поперечные операторы теории сжимаемой жидкости

№	Оператор	Размерность	Поля	Фактор
1	$v'\partial v$	4	u	$1/c^2$
2	$\Delta F_{v1} F_p^l$	$1 - 2l/3$	u', q^n	$1/c^{2(l+n+1)}$
3	$v'\Delta v F_p^l$	$3\frac{2}{3} - 2l/3 + \omega$	q^n	$1/c^{2(l+n)}$
4	$\Delta F_{v2} F_p^l$	$1\frac{2}{3} - 2l/3$	u', q^{n+1}	$1/c^{2(l+n+1)}$
5	$v'\Delta F_{v1} F_p^l$	$4\frac{1}{3} - 2l/3$	q^n	$1/c^{2(l+n+1)}$
6	∂F_p^{l+1}	$1 - 2(l+1)/3$	u', q^n	$1/c^{2(l+n)}$
7	$v'\Delta F_p^l, (l+n) > 0$	$5\frac{1}{3} - 2l/3$	u, q^n	$1/c^{2(l+n+1)}$
8	∂F_{v1}	0	p', q	$1/c^2$
9	$v'\Delta F_{v2} F_p^l, (l+n) > 0$	$5 - 2l/3$	q^{n+1}	$1/c^{2(l+n+1)}$
10	∂F_{v2}	$2/3$	p', q^2	$1/c^2$
11	$\mathcal{D}_t F_{v1}$	$-1/3$	u'	$1/c^2$
12	∂F_p	$1/3$	u, p'	$1/c^2$
13	$F_{v1}\partial v$	$-1/3$	u'	$1/c^2$
14	$F_{v1}\partial F_p$	$-2/3$	p'	$1/c^2$
15	$\mathcal{D}_t F_{v2}$	$1/3$	q, u'	$1/c^2$
16	$F_{v2}\partial F_p$	0	q, p'	$1/c^2$
17	$F_{v2}\partial v$	$1/3$	q, u'	$1/c^2$
18	∂F_{v1}	0	u, u'	$1/c^4$
19	∂v	$2/3$	u, u'	$1/c^2$
20	∂F_{v2}	$2/3$	q, u, u'	$1/c^4$
21	$F_{v2}\partial F_{v1}$	-1	u'	$1/c^4$
22	ΔF_p^l	$2 - 2l/3$	u, q^n, u'	$1/c^{2(n+l+1)}$
23	$F_{v1}\partial F_{v2}$	$-1/3$	q, u'	$1/c^4$
24	$v'\partial v F_{v2}$	$3\frac{2}{3}$	q	$1/c^2$
25	$F_{v2}\partial F_{v2}$	$1/3$	u', q^2	$1/c^4$
26	$v'v\partial F_{v1}$	3	—	$1/c^2$
27	$\Delta v F_p^l, (l+n) > 0$	$12/3 - 2l/3$	u', q^n	$1/c^{2(l+n)}$

Тогда в производящем функционале корреляционных функций сперва выполняется усреднение по поперечным полям v , v' , а уже потом строится разложение по вершинам,

содержащим продольные и скалярные поля. Соответствующая диаграммная техника будет состоять из линий полей u' , u , q , p' и “одетых” пропагаторов и вершин поперечных полей v , v' . Пропагаторы продольных и скалярных полей присоединяются к своим собственным вершинам или к составным операторам поперечных полей.

Скейлинговые размерности составных операторов поперечных полей, входящих в действие (8), известны нам из работ [4, 8] и вычисляются по аналогии с [4]. Эти размерности приведены в таблице 1.

Во второй графе таблицы схематично (без указания индексной структуры и с произвольным расположением производных) представлены составные операторы поперечных полей, к которым в действии (8) присоединяются продольные и скалярные поля, указанные в графе 4. Степень c^{-2} при соответствующей вершине взаимодействия приведена в графе 5. Множители $1/(1 + \tilde{q}/c^2)$ в действии (8) мы рассматриваем в виде разложения по $\tilde{q}/c^2$, поэтому в некоторых строках таблицы приведены сведения о размерностях бесконечных последовательностей операторов при любых $l, n \geq 0$ (иногда указаны дополнительные ограничения на l, n , обусловленные индексной структурой полей, т.е. продольностью и поперечностью). Третий столбец таблицы дает скейлинговую размерность соответствующего составного оператора при физических значениях $d = 3$, $\varepsilon = 2$. ИК-поправочный индекс теории ω в старших порядках теории возмущений не известен, однако в соответствии с результатами первого порядка ε -разложения и с общей идеологией $\omega > 0$ (его положительность необходима для существования ИК-устойчивой фиксированной точки уравнения РГ теории развитой турбулентности в несжимаемой жидкости).

Скейлинговые размерности составных операторов с произвольным числом вставок операторов F_p ранее были неизвестны. Мы их определили методом, аналогичным использованному в [4]. Обозначим простой линией пропагатор Δ_{vv} , линией со стрелкой — $\Delta_{vv'}$ (стрелка направлена в сторону поля v'), волнистой линией — оператор Δ^{-1} , а штрихом — пространственную производную. В таких обозначениях, например, первый неисследованный в [4] составной оператор из семейства 3 представляется рис. 1.

Рис. 1

Известно, что при ренормировке к нелокальному оператору могут примешиваться локальные той же канонической размерности. Каноническая размерность оператора в логарифмической теории определяется как сумма канонических размерностей входящих в оператор полей и производных ($\dim v = \dim \partial = 1$, $\dim v' = \dim \partial_t = 2$ при $d = 3$), поэтому $\dim F_p = 2$, $\dim F_{v1} = 3$, $\dim F_{v2} = 1$, откуда следует, что каноническая размерность рассматриваемого оператора равна 9. Этот оператор, как и все операторы, представленные в табл. 1, галилеево-инвариантный, поэтому к нему могут примешиваться при ренормировке только галилеево-инвариантные локальные состав-

ные операторы. Как и в [4], имеются веские основания полагать, что эти локальные операторы ИК-несущественны по сравнению с нелокальными. Поэтому ограничимся рассмотрением элементов матрицы ренормировки, ответственных за смешивание нелокальных операторов.

Для операторов, рассмотренных в [4], скейлинговая размерность определялась как сумма размерностей входящих в них локальных фрагментов, производных и Δ^{-1} -операторов. При ренормировке оператора, представленного на рис. 1, такой же результат получается после устранения расходимостей подграфов, помещенных в штриховые рамки на рис. 2 (в результате диагональный элемент матрицы ренормировки данного составного оператора равен произведению констант ренормировки оператора $v'\Delta v$ и двух операторов vv).

Рис. 2

Но в отличие от [4] к данному оператору при ренормировке могли бы примешиваться и нелокальные составные операторы типа $v'_i \Delta v_i \Delta^{-2} (\partial_j v_l) (\partial_l v_m) (\partial_m v_n) (\partial_n v_j)$ из-за расходимости подграфа, помещенного в штриховую рамку на рис. 3.

Рис. 3

Однако на самом деле этот оператор не примешивается к рассматриваемому благодаря все тому же свойству галилеевой инвариантности. Действительно, мысленно стянув в точку подграф, обведенный штриховой линией на рис. 3, мы получаем в качестве локального фрагмента оператор $\partial_j \partial_l \partial_m \partial_n (v_l v_m v_n v_j)$, который галилеево-инвариантен (хотя включает в себя галилеево-инвариантный $(\partial_j v_l) (\partial_l v_m) (\partial_m v_n) \times (\partial_n v_j)$), а потому не примешивается к данному.

Таким образом, даже в классе нелокальных составных операторов в принципе возможны нетривиальные смешивания при ренормировке за счет примеси новых локальных фрагментов к одному или нескольким исходным. Из приведенных рассуждений сле-

дует, что для обсуждения этой проблемы требуется рассмотреть ренормировку корреляционных функций с несколькими вставками локальных составных операторов. Более подробно этот вопрос освещен в приложении 2.

Для конкретного оператора, представленного на рис. 1, следует, что по соображениям галилеевой инвариантности к паре фрагментов $\partial_i \partial_j v_i v_j$, $\partial_l \partial_m v_l v_m$ при ренормировке могут примешиваться лишь галилеево-инвариантные операторы типа $\Delta^2 \partial_i \partial_j v_i v_j$, а к паре $v'_i \Delta v_i$, $\partial_l \partial_m v_l v_m$ – типа $\partial_l \partial_m (\partial_j v'_i \partial_i v_j \partial_l v_m)$. Логично предположить, что примешивающиеся операторы менее ИК-существенны, поскольку содержат большое количество производных, каждая из которых повышает размерность оператора на единицу. Таким образом, наиболее ИК-существенный вклад в рассматриваемый оператор, видимо, имеет скейлинговую размерность, равную сумме скейлинговых размерностей $v' \Delta v$, двух $\partial_l \partial_m v_l v_m$ и двух Δ^{-1} .

Скейлинговые размерности всех операторов в табл. 1 были определены с учетом того, что $\Delta[v' \Delta v] = 11/3 + \omega$, $\Delta[F_p] = -2/3$, $\Delta[F_{v1}] = -1$, $\Delta[F_{v2}] = -1/3$, $\Delta[v'v] = 3$ (см. [4, 9]).

Мы намерены подтвердить результаты [4] о скейлинговой размерности $\Delta[c] = -1/3$. При таком предположении все операторы, получаемые разложением $(1 + \tilde{q}/c^2)^{-1}$ в ряд по F_p/c^2 , одинаково ИК-существенны. Ниже будет определена скейлинговая размерность поля q : $\Delta[q] = -2/3$, поэтому также одинаково существенны все члены разложения этих множителей по q/c^2 . Тогда операторы табл. 1 можно сравнивать между собой по любым представителям указанных под определенными номерами семейств.

В соответствии со своими скейлинговыми размерностями семейства операторов № 5 и № 9 менее ИК-существенны, чем № 3. Оператор из семейства № 3 с $n = 1$ несуществен по сравнению с № 24. Поэтому семейства операторов № 3, 5 и 9 могут в дальнейшем не рассматриваться. Оператор из № 7 при $n = 0$ несуществен по сравнению с № 1; № 27 и № 2 при $n = 0$ несущественны по сравнению с № 11, а № 4 – по сравнению с № 15, оператор № 22 при $n = 0$ и $l = 1$ – по сравнению с № 18. В духе идеологии Ландау следует отбросить все указанные ИК-несущественные операторы для получения эффективного действия, описывающего ИК-асимптотику рассматриваемой теории.

Однако это действие мы приведем несколько позже, т.к. существует возможность его еще упростить. После замен переменных (6), (7) квадратичная часть действия (8) приобретает вид

$$S_2 = \frac{1}{2} v'_i D_{\perp ij} v'_j + \frac{1}{2} u'_i D_{\parallel ij} u'_j + v'_i (-\partial_t v_i + \nu \Delta v_i) + u'_i \left(-\frac{1}{c^2} \partial_t u_i + \frac{1}{c^2} \nu' \Delta u_i - \partial_i q - \frac{1}{c^2} \nu' \partial_i \partial_t q + \frac{1}{c^2} \Delta^{-1} \partial_i \partial_t^2 q \right) - p' \partial_i u_i, \quad (10)$$

где ν – кинематическая вязкость, $\nu = \eta/\rho_0$ (напомним, что $\rho_0 = 1$), а $\nu' = (\eta + \eta')/\rho_0$. Выражение (10) определяет пропагаторы теории

$$\begin{aligned} \Delta_{v'v} &= \frac{P_{\perp}}{-i\omega + \nu k^2}, & \Delta_{vv} &= \frac{D_{\perp} P_{\perp}}{\omega^2 + \nu^2 k^4}, \\ \Delta_{qq} &= \frac{k^2 D_{\parallel} c^4}{(\omega^2 - k^2 c^2)^2 + \nu'^2 \omega^2 k^4}, & \Delta_{p'q} &= \frac{-i\omega - \nu' k^2}{\omega^2 - c^2 k^2 - i\nu' \omega k^2}, \\ \Delta_{p'u} &= \frac{ik_i}{k^2}, & \Delta_{u'q} &= -\frac{c^2 ik_i}{\omega^2 - c^2 k^2 - i\nu' \omega k^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Остальные пропагаторы равны нулю. При переходе в импульсно-частотное представление в пропагаторах продольных и скалярных полей интегралы по ω вычисляются по вычетам в полюсах $\omega \approx -i\nu'k^2/2 \pm kc$, где в вещественной части значения полюса мы пренебрегли членами порядка $\nu'^2 k^2/c^2$ (малыми как за счет малых k в ИК-области, так и ввиду больших c). В результате пропагаторы (11) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\Delta_{v'v} &= P_{\perp} \theta(t) e^{-\nu k^2 t}, \quad \Delta_{vv} = P_{\perp} \frac{D_{\perp}}{2\nu k^2} e^{-\nu k^2 |t|}, \\ \Delta_{qq} &\cong c^2 D_{\parallel} e^{-\nu' k^2 |t|/2} \cos(ck|t|)/2k^2 \nu', \quad \Delta_{p'q} \cong -e^{-\nu' k^2 t/2} \theta(t) \cos(ckt), \\ \Delta_{p'u} &\cong ik_i \delta(t)/k^2, \quad \Delta_{u'q} \cong -c\theta(t) k_i e^{-\nu' k^2 t/2} \sin(ckt)/k.\end{aligned}\quad (12)$$

При физических значениях ε, d скейлинговая размерность времени, вычисляемая в “поперечной науке”, равна $-2/3$. Поэтому безразмерная переменная ckt в пропагаторах (12) также определяет размерность c как $\Delta[c] = -1/3$. Тогда по пропагаторам (12) можно определить скейлинговые размерности продольных и скалярных полей:

$$\Delta[q] = -\frac{2}{3}, \quad \Delta[p'] = 3\frac{2}{3}, \quad \Delta[u] = -1, \quad \Delta[u'] = 3\frac{1}{3}. \quad (13)$$

Таким образом, все члены в $\tilde{q}$ и $\tilde{u}$ оказались одних размерностей (одинаково существенны). В соответствии с (13) дальнейшее сокращение табл. 1 не представляется возможным (все оставшиеся составные операторы одинаково существенны), зато можно утверждать ИК-несущественность вершин взаимодействия $\nu' u' \Delta u q^l / c^{2l}$ действия (8) для любого l . В результате, оставляя лишь ИК-существенные члены (8), эффективное действие теории развитой турбулентности сжимаемой жидкости можно написать в виде

$$\begin{aligned}S(\Phi) &= \frac{1}{2} v'_i D_{\perp ij} v'_j + \frac{1}{2} u'_i D_{\parallel ij} u'_j + \\ &+ v'_i \left(-\partial_t v_i - v_j \partial_j v_i - \frac{1}{c^2} v_j \partial_j \tilde{u}_i - \frac{1}{c^2} \tilde{u}_j \partial_j v_i + \nu \Delta v_i \right) + \\ &+ u'_i \left(-\frac{1}{c^2} \partial_t \tilde{u}_i + \frac{1}{c^2} \nu' \Delta u_i - \frac{1}{c^2} (v_j \partial_j \tilde{u}_i + \tilde{u}_j \partial_j v_i) - \right. \\ &- \frac{1}{c^2} \nu' \partial_i \partial_t q + \frac{1}{c^2} \Delta^{-1} \partial_i \partial_t^2 q - \frac{1}{c^4} \tilde{u}_j \partial_j \tilde{u}_i - \partial_i q + \frac{1}{c^2} \frac{\tilde{q}}{(1 + \frac{\tilde{q}}{c^2})} \partial_i \tilde{q} \Big) + \\ &+ p' \left(-\partial_i u_i - \frac{1}{c^2} \tilde{u}_i \partial_i \tilde{q} - \frac{1}{c^2} \tilde{q} \partial_i \tilde{u}_i \right).\end{aligned}\quad (14)$$

В действии (14) следует провести ренормировку поперечных полей и их составных операторов. Оно естественным образом представляется в виде суммы $S_{ic} + S_c$, где S_{ic} – действие теории несжимаемой жидкости [2], S_c – добавка к нему за счет учета сжимаемости. Все вершины взаимодействия из S_c содержат малости c^{-2}, c^{-4} .

4. ОСОБЕННОСТИ ПРЕДЛАГАЕМОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ПО c^{-2}

В [4] утверждается, что поправки первого порядка по c^{-2} к корреляционным функциям поперечных полей определяются вставкой составного оператора $c^{-2} v' v \partial F_{v1}$ (№ 26

в табл. 1). Чтобы подтвердить это, необходимо уточнить степени по c вкладов в корреляционные функции вершин и пропагаторов (14).

Некоторые вершины взаимодействия (14) содержат производные по времени. Входящая в операторы F_{v2} производная ∂_t , действуя на $\sin ckt$ и $\cos ckt$ в пропагаторах (12), дает лишний множитель c . Следует также отметить, что в случае больших c зависимость от времени в пропагаторах продольных и скалярных полей складывается из быстрых осцилляций за счет множителей $\sin ckt$, $\cos ckt$ (за исключением $\Delta_{p'u}$ -пропагатора, вклад которого в диаграммную технику с точки зрения зависимости от t очевиден и в дальнейшем обсуждаться не будет) на фоне медленного затухания, обеспечиваемого множителями $\exp\{-\nu'k^2t/2\}$.

В функции Грина, составленные из пропагаторов только поперечных полей, время входит в виде инвариантной переменной $\bar{\nu}k^2t$, где $\bar{\nu}$ – РГ-инвариант, на который следует заменить ν после выполнения интегрирования $\int \mathcal{D}v' \mathcal{D}v$ (т.е. после вычисления диаграмм, составленных из поперечных линий, которое осуществляется в теории возмущений по g). Известно [2], что $\bar{\nu} \sim k^{-4/3}$, поэтому времени в теории турбулентности несжимаемой жидкости и приписывается скейлинговая размерность $\Delta[t] = -2/3$. В продольных и скалярных пропагаторах (12) скейлингово-безразмерная переменная $-ckt$, а вторая связанная со временем переменная $\nu'k^2t$ является ИК-несущественной в скейлинговой области, поскольку ν' не заменяется на $\bar{\nu}'$. Однако содержащие данную комбинацию множители должны быть оставлены в пропагаторах (12), чтобы обеспечить затухание по времени, и могут быть опущены лишь в интегралах, которые сходятся сами по себе. Последнее бывает, если продольная или скалярная линия присоединена обоими концами к подблоку поперечных линий (где имеет место затухание $\exp\{-\bar{\nu}k^2t\}$).

Для определения порядка теории по c^{-1} , в который дает вклад та или иная диаграмма, полезно утверждение, что в ведущем порядке по c^{-1} в пропагаторах продольных и скалярных линий (12) (“одетых”, т.е. с включением подграфов без поперечных линий) $c \sin ckt \sim \delta(kt)$ (доказывается в полной аналогии с известным представлением δ -функции $\delta(t) = -1/2 \lim_{N \rightarrow \infty} N e^{-N|t|}$). Аналогично для линий, присоединенных обоими концами к поперечному подблоку, можно утверждать, что $c^2 \cos ckt \sim \bar{\nu} \delta(t)$, $\partial_t \cos ckt \sim \delta(t)$. Учитывая $D_{||} \sim 1/c^4$, для таких линий справедливо

$$\begin{aligned} \Delta_{qq} &\sim c^{-4}, \quad \Delta_{p'q} \sim c^{-2}, \quad \Delta_{p'u} \sim 1, \quad \Delta_{u'q} \sim 1, \\ \partial_t \Delta_{qq} &\sim c^{-2}, \quad \partial_t \Delta_{p'q} \sim 1, \quad \partial_t^2 \Delta_{qq} \sim 1, \quad \partial_t \Delta_{u'q} \sim 1. \end{aligned} \quad (15)$$

Поэтому в отношении поправок на сжимаемость в корреляторы поперечных полей диаграммы со вставками продольных и скалярных линий оказываются старшего порядка по c^{-2} по сравнению с результатами [4]. Кроме отрицательных степеней c в вершинах (14) дополнительную малость по c^{-1} содержат пропагаторы Δ_{qq} , $\Delta_{p'q}$ и $\partial_t \Delta_{qq}$. Из (14), (15) можно утверждать, что в каждый порядок по c^{-2} дает вклад конечное число диаграмм. Это касается не только поправок на сжимаемость к корреляторам поперечных полей, но и к описываемым предлагаемой теорией корреляционным функциям с внешними продольными и скалярными полями.

В заключение отметим еще одну особенность, присущую предлагаемой диаграммной технике. Вершины взаимодействия (14) содержат до двух производных по времени. Пропагаторы $\Delta_{u'q}$, $\Delta_{p'q}$ и $\Delta_{v'v}$ пропорциональны $\theta(t)$, а Δ_{qq} и Δ_{vv} зависят от $|t|$, поэтому, например, $\partial_t \Delta_{p'q}$ и $\partial_t^2 \Delta_{qq}$ содержат члены, пропорциональные $\delta(t)$. Это приводит к появлению неопределенностей типа $\theta(0)$ в диаграммах, содержащих подграфы вида, представленного на рис. 4, и сингулярностей, пропорциональных $\delta(0)$, в диа-

Рис. 4

Рис. 5

граммах, содержащих подграфы вида, представленного на рис. 5. На обоих рисунках крестиком на линии отмечена производная по времени.

Аналогичная проблема обсуждалась в [4] (составной оператор, который рассматривался в этой работе также содержал ∂_t), но в нашем случае ситуация принципиально иная. Дело в том, что в отличие от [4] мы не изменили исходных стохастических уравнений (1)–(4), поэтому можем сравнивать результаты нашей диаграммной техники с таковыми, получаемыми непосредственным итерированием уравнений (1)–(4) с последующим усреднением по случайной силе. При этой итерационной процедуре не возникает обсуждаемых сингулярностей. В нашей же диаграммной технике они появились в результате замен функциональных переменных интегрирования (7) (с тривиальным якобианом). Поскольку результаты двух теорий возмущений должны совпадать, вышеуказанные неопределенности и сингулярности в предлагаемой диаграммной технике сокращаются сами по себе. Достаточно предъявить подходящую регуляризацию. В качестве таковой мы предлагаем заменить $\delta(t)$ в корреляторах случайных сил (12) на $\lim_N \rightarrow \infty (N/\sqrt{\pi}) \exp\{-N^2 t^2/2\}$ и дополнить диаграммную технику предписанием перекидывать производные ∂_t в вершинах так, чтобы на линии со штрихованным полем (за исключением $\Delta_{p'u}$) действовало не более одной производной ∂_t . Тогда сингулярности находят свое выражение в положительных степенях N и можно проследить их сокращение.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-02-14515) и Международного научного фонда (ISF grant R-63000).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Ренормируемость теории (1)–(4) удобнее обсуждать, рассматривая действие MSR-типа, записанное в полях v, ρ, v', ρ' :

$$S = \frac{1}{2} v'_i D_{ij} v'_j + v'_i \left(-\partial_t v_i - v_j \partial_j v_i + \frac{1}{1+\rho} (\eta \nabla^2 v_i + \eta' \partial_i \partial_j v_j - c^2 \partial_i \rho) \right) + \rho' (-\partial_t \rho - \partial_i (v_i \rho)), \quad (16)$$

(как обычно, ρ' и v' – вспомогательные поля). Учитывая (9) и полагая, как обычно, импульсную размерность d^p и частотную размерность d^ω равными единице, а также определив полную размерность как $d = d^p + 2d^\omega$ [2], получим канонические размерности полей и переменных действия (табл. 2).

ТАБЛИЦА 2

Канонические размерности полей и переменных

$d/\text{Поля и параметры}$	v'	v	ρ'	ρ	c^2	η, η'	g
d^p	$d+1$	-1	d	0	-2	-2	2ε
d^ω	-1	1	0	0	2	1	0
d	$d-1$	1	d	0	2	0	2ε

Регулярное ε -разложение строится от логарифмической точки $\varepsilon = 0$, в которой константа g безразмерна. В соответствии со своей канонической размерностью параметр c^2 УФ-несущественный, поэтому ренормировку теории можно изучать, отбросив члены действия (16), при которых стоит коэффициентом c^2 (аналогично переходу к безмассовой теории при ренормировке теории φ^4), рассматривая отброшенные члены в качестве составных операторов. Пропагаторы теории (16) получаются из (11) заменами $p \rightarrow c^2 \rho$, $p' \rightarrow \rho' c^2$ и $v_{\parallel} \rightarrow c^2 v_{\parallel} - c^2 \Delta^{-1} \partial_i \partial_i \rho$ (с учетом (6)–(7)) и нетривиально зависят от c^2 :

$$\begin{aligned}
\Delta_{v_{\parallel} v_{\parallel}} &= \frac{\omega^2 c^4 D_{\parallel}}{(\omega^2 - k^2 c^2)^2 + \nu'^2 \omega^2 k^4}, & \Delta_{\rho' \rho} &= \frac{-i\omega - \nu' k^2}{\omega^2 - c^2 k^2 - i\nu' \omega k^2}, \\
\Delta_{\rho' v_{\parallel}} &= -\frac{ik_i c^2}{\omega^2 - c^2 k^2 - i\omega \nu' k^2}, & \Delta_{v'_{\parallel} \rho} &= -\frac{ik_i}{\omega^2 - c^2 k^2 - i\omega \nu' k^2}, \\
\Delta_{v'_{\parallel} v_{\parallel}} &= -\frac{i\omega}{\omega^2 - k^2 c^2 - i\nu' k^2}, & \Delta_{\rho \rho} &= \frac{k^2 D_{\parallel}}{(\omega^2 - k^2 c^2)^2 + \nu'^2 \omega^2 k^4}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Несложно убедиться, что теория (15) с отброшенным пропорциональным c^2 членом — нетривиальна (хотя в ней и отсутствуют пропагаторы $\Delta_{v_{\parallel} \rho'}$ и $\Delta_{v_{\parallel} v_{\parallel}}$; здесь мы не будем полагать $D_{\parallel} \sim 1/c^4$).

При $\varepsilon = 0$ теория тогда не содержит размерных параметров, поверхностные расходимости в ней определяются каноническими размерностями полей (табл. 2). Несложный анализ показывает, что поверхностно расходятся 1-неприводимые диаграммы с внешними линиями $\{v v'\}$, $\{v' \rho\}$, $\{\rho \rho'\}$, $\{v v v'\}$, $\{v v v v'\}$, а также вышеперечисленные с добавлением произвольного числа внешних линий ρ -типа, поскольку полная каноническая размерность поля ρ равна нулю. Каждому типу расходящихся 1-неприводимых диаграмм соответствует новый тип контрчленов в действии ренормированной теории (мы не включили в список расходящихся функций Грина формально расходящиеся функции типа $\langle v' v' \rangle$, т.к. контрчлены должны быть локальны по импульсам и частотам, и учли, что 1-неприводимые функции без внешних штрихованных полей обращаются в ноль, как и в случае несжимаемой жидкости [2], а также что структура взаимодействия (15) обеспечивает вынесение производной на внешнюю линию ρ' -типа в любой диаграмме, что устраняет некоторые расходимости).

Таким образом, для ренормировки теории (15) требуется бесконечное число контрчленов, причем все эти члены маргинальны (в них не входят размерные параметры). Следовательно, эта теория неренормируема, попытка применения метода ренормгруппы к ней наталкивается на необходимость поиска фиксированной точки в бесконечной системе β -функций зарядов и исследования ее устойчивости. Прецеденты решения этой проблемы нам неизвестны.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

В теории критического поведения традиционно делается неконтролируемое предположение: при построении эффективного действия (гамильтониана) из гамильтониана Гинзбурга–Ландау, который обычно имеет вид бесконечного ряда, отбрасываются все члены, являющиеся ИК-несущественными по своей канонической размерности в логарифмической теории. Оправданием этого шага обычно признается то, что при рассмотрении отброшенных членов в качестве составных операторов их скейлинговые размерности вычисляются в виде суммы канонической размерности и поправок по параметру регулярного разложения ε , которые при малых ε не превышают разности канонических размерностей. Поскольку данное рассуждение касается всевозможных локальных составных операторов, а при ренормировке функций Грина с несколькими вставками составных операторов к ним примешиваются лишь составные операторы большей канонической размерности, обычно достаточно ограничиться изучением одной вставки каждого составного оператора. Конечно, интересующей нас физической теории соответствует достаточно большое значение параметра ε , размерности при физическом ε (во всех порядках разложения) всех составных операторов нам никогда неизвестны, поэтому возможность перехода к конечному эффективному действию от полного гамильтониана Гинзбурга–Ландау всегда является лишь гипотезой, оправдываемой полученными результатами.

Особенность теории развитой турбулентности заключается в том, что вследствие галилеевой инвариантности нам точно известны скейлинговые размерности полей, времени и некоторых составных операторов во всех порядках по ε (при физическом значении $\varepsilon = 2$, $d = 3$ [2, 4, 9]: $\Delta[v] = -1/3$, $\Delta[v'] = 10/3$, $\Delta[t] = -2/3$, $\Delta[\partial_i v_j \partial_i v_j] = 0$, $\Delta[v' \Delta v] = 3 + \omega$, $\Delta[v^n] = -n/3$ для любого n). Этими результатами мы воспользовались при построении эффективного действия (14).

При изучении скейлинговых размерностей нелокальных операторов (табл. 1 из раздела 2) нам впервые реально пришлось рассматривать ренормировку функций Грина с более чем одной вставкой составного оператора. Хотя в этой ренормировке нет ничего принципиально нового, насколько нам известно, этот вопрос ранее не обсуждался в литературе. Поэтому в данном приложении мы рассмотрим его более подробно.

Рис. 6

Обозначим некоторый составной оператор (например, v^2) точкой с двумя выходящими линиями. Ренормировка составного оператора (в функциях Грина с одной вставкой) осуществляется со смешиванием, если поверхностно расходятся 1-неприводимые диаграммы с этим оператором и разным числом внешних линий (или коэффициент при расходимости диаграммы имеет сложную структуру значков или производных). Например, в случае поверхностной расходимости обведенных подграфов на рис. 6 следует заключить, что рассматриваемый оператор ренормируется сам (для простоты мы ограничимся случаем, когда у поля v отсутствует константа ренормировки Z_v , как это

имеет место в теории турбулентности несжимаемой жидкости) и что к нему примешивается оператор, линейный по полю v .

Известно, что поверхностные расходимости диаграмм локальны, т.е. представляются в виде некоторой константы Z , умноженной на локальный оператор (см. рис. 6). Константы Z безразмерны, поэтому примешивающиеся операторы должны иметь те же канонические размерности, что и исходный оператор F (например, ∂v для v^2).

Рассмотрим ренормировку функций Грина со вставками двух составных операторов F (см. рис. 7). В соответствии со стандартным размерным анализом поверхностно расходиться при этом могут новые типы 1-неприводимых диаграмм (что для случая оператора v^2 означает примесь операторов v^4 , $v^2\partial v$, $\partial v\partial v$, $v\partial^2 v$ и $\partial^3 v$).

Рис. 7

При увеличении числа вставок оператора F семейство примешивающихся операторов еще увеличивается. Можно утверждать, что к нескольким операторам F могут примешиваться все локальные составные операторы, каноническая размерность которых равна сумме канонических размерностей рассматриваемого набора операторов F .

Этот факт учитывался нами при определении скейлинговых размерностей операторов табл. 1 (раздел 2) и при получении эффективного действия (14). Однако для строгого обоснования наших результатов (касающихся ренормировки бесконечного числа вставок составных операторов) требуется знание скейлинговых размерностей всех локальных операторов, которым мы не обладаем. Поэтому мы пользовались следующими правдоподобными соображениями.

Обсуждая ИК-существенность операторов при физическом значении ε , мы вместо канонической размерности оператора используем сумму скейлинговых размерностей входящих в него полей и производных. Это справедливо для операторов типа v^n , которые, имея отрицательную скейлинговую размерность, крайне ИК-существенны. Однако они галлилеево-инвариантны и поэтому не примешиваются к рассматриваемым нами.

Вспоминая [2], что логарифмическую теорию можно выбрать при некоторой размерности пространства $d \neq 3$, заключаем, что при смешивании операторов постоянным является число полей v' (его каноническая размерность зависит от d), поэтому при построении примешивающегося оператора в отличие от случая $d = 3$ нельзя заменить два поля v' (оцениваемых по размерности как $20/3$) на галлилеево-инвариантную комбинацию $\partial v\partial v$ (оценка размерности для нее дает $4/3$, и потому она более ИК-существенна).

В рассматриваемых операторах накапливается комбинация $\partial_i v_k \partial_k v_i$, скейлинговая размерность которой известна точно ($4/3$). Но при ренормировке к n операторам $\partial_i v_k \partial_k v_i$ не примешивается оператор $(\partial v)^n$ (с разными расстановками значков), поскольку из каждого $\partial_i v_k \partial_k v_i$ производные выносятся наружу из 1-неприводимой диаграммы, а операторы $\partial\partial \dots \partial(vv \dots v)$ не являются галлилеево-инвариантными. Поэтому к n операторам $(\partial v)^2$ может примешиваться разве что $\partial^n (\partial v)^{n/2}$, в котором слишком много производных, так что его логично считать несущественным.

К паре операторов $v'\Delta v$ (признанных нами несущественными из-за сдвигки их размерности на ω) может примешиваться $\partial v'\partial v\partial v'\partial v$, размерность которого нам неизвестна. Поэтому строго обосновать допустимость использования идеологии Ландау для получения эффективного действия (14) мы не можем, впрочем как всегда в теории критического поведения.

Список литературы

- [1] *De Dominicis C., Martin P. C.* // Phys Rev A. 1979. V. 29. P. 419.
- [2] *Аджемян Л.Ц., Васильев А.Н., Письмак Ю.М.* // ТМФ. 1983. Т. 57. №2. С. 268.
- [3] *Аджемян Л.Ц., Антонов Н.В., Васильев А.Н.* // ЖЭТФ. 1989. Т. 95. Вып. 4. С. 1272.
- [4] *Аджемян Л.Ц., Налимов М. Ю., Степанова М. М.* // ТМФ. 1995. Т. 104. №2. С. 260–270.
- [5] *Львов В.С., Михайлов А.В.* Препринт № 54. Новосибирск: ИАиЭ, 1977.
- [6] *Staroselsky I., Yakhot V., Kida S., Orszag A. S.* // Phys Rev. Lett. 1990. V. 65. №2. P. 171.
- [7] *Martin P. C., Siggia E. D., Rose H. A.* // Phys Rev. A. 1973. V. 8. P. 423.
- [8] *Аджемян Л. Ц., Ким Т. Л.* // Вестн. С.-П. ун-та, сер 4: Физика, химия. 1992. Вып. 3. (№ 18) С. 71.
- [9] *Аджемян Л.Ц., Васильев А.Н., Гнатич М.* // ТМФ. 1988. Т. 74. №2. С. 180.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступила в редакцию
27.III.1995 г.

D. Yu. Volchenkov, M. Yu. Nalimov

THE CORRECTIONS TO FULLY DEVELOPED TURBULENT SPECTRA DUE TO THE COMPRESSIBILITY OF FLUID

We construct the regular expansion at small compressibility for the theory of fully developed turbulence of isotropic homogeneous compressible fluid with the action of MSR-type. The parameter of the expansion is the Mach number Ma . In the inertial range (of compressible fluid) the infrared peculiarities determined by the transversal fields (used in the theory of incompressible fluid) are studied. These peculiarities are connected with the composite operators of transversal fields, which are investigated by the quantum-field renormalization group method. As a result, it is shown that the transversal fields induce the scaling behavior in the theory proposed with the scaling dimension of Ma equal to $1/3$ (i.e., $Ma k^{-1/3}$ is the scaling dimensionless parameter of the correlation functions in the inertial range).