Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Вшивцев, К. Г. Клименко, Б. В. Магницкий, Вакуумная структура $(\bar{\psi}\psi)_3^2$ -модели с учетом магнитного поля и химического потенциала, *ТМФ*, 1996, том 106, номер 3, 390–400

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1123>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 17:19:21

А. С. Вшивцев, К. Г. Клименко, Б. В. Магницкий
**ВАКУУМНАЯ СТРУКТУРА $(\bar{\psi}\psi)_3^2$ -МОДЕЛИ
С УЧЕТОМ МАГНИТНОГО ПОЛЯ
И ХИМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА**

Исследована фазовая структура $(2 + 1)$ -мерной теории поля с четырехфермионным взаимодействием с учетом внешнего магнитного поля H и химического потенциала μ . Показано, что существует критическая кривая $\mu = \mu_c(H)$, которая делит множество точек (μ, H) на две области. В одной из них вакуум кирально симметричен, а в другой симметрия спонтанно нарушена. Получено поведение критической кривой при больших и малых значениях магнитного поля.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы значительно возрос интерес к исследованию $(2 + 1)$ -мерных (трехмерных) квантовых теорий поля. Связано это прежде всего с попытками объяснить некоторые явления физики твердого тела, которые наблюдаются в планарных структурах (высокотемпературная сверхпроводимость [1], квантовый эффект Холла [2] и т.д.). Кроме того, трехмерные модели сами по себе привлекательны для теоретиков, так как обладают рядом необычных свойств (дробные спин и статистика и т.д.).

Особого внимания заслуживают трехмерные с четырехфермионным взаимодействием (3D4F) теории поля. Простейшие модели этого типа имеют лагранжиан вида

$$L_\psi = \bar{\psi}_k i \hat{\partial} \psi_k + \frac{g_0}{2N} (\bar{\psi}_k \psi)^2, \quad (1)$$

где подразумевается суммирование по k от 1 до N и для каждого фиксированного k ψ_k — четырехкомпонентный спинор Дирака. Дело заключается в том, что некоторые решеточные модели квантовых антиферромагнетиков в непрерывном пределе совпадают с (3D4F)-теориями вида (1) [3]. Они могут быть использованы для исследования высокотемпературной сверхпроводимости [4], квантового эффекта Холла и т.д. Эти явления кроме двумерной природы обладают еще одной особенностью: они макроскопичны и возможны, когда среднее число частиц отлично от нуля. Для их описания также важно привлекать внешнее магнитное поле и температуру. Конечно же, эти модели являются лишь грубым приближением для описания сложных явлений, происходящих в тонких пленках, и не претендуют на всеобъемлющую роль, однако в грубых чертах они позволяют описать те или иные физические закономерности этих систем.

В связи с этим в ряде работ уже исследовались критические свойства (3D4F)-модели (1) при ненулевых температуре T и химическом потенциале μ [5], во внешнем магнитном поле H и $T \neq 0$ [6–8]. Следует заметить, что в недавней работе [9] отмечалось, что наличие внешнего магнитного поля H является катализатором спонтанного нарушения киральной (флейворной) симметрии в $(2 + 1)$ -мерных квантовых теориях поля. Укажем, что еще в работах [6] была рассмотрена трехмерная модель Гросса–Невье в случае $H \neq 0$, $T \neq 0$ и показана возможность спонтанного нарушения киральной симметрии магнитным полем. Наряду с этим была вычислена критическая температура $T_c(H)$ (в отличие от КЭД не равная нулю), ниже которой массы фермионов отличны от нуля, т.е. $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$, и, следовательно, симметрия нарушена. Соответственно при $T > T_c(H)$ система переходит в безмассовую фазу через фазовый переход второго рода.

В предлагаемой работе мы остановимся на фазовой структуре этой теории при $H, \mu \neq 0$. Необходимость рассмотрения случая с $\mu \neq 0$ отвечает физическим ситуациям, в которых имеет место зарядовая асимметрия [10, 11]. В теории поля есть различные варианты введения конечного химического потенциала, являющегося лагранжевым множителем у слагаемого, обуславливающего число частиц в системе, и ассоциированного с зарядом частиц. Так, функция Грина соответствующего типа впервые была предложена в работе [12], а калибровочная инвариантность таких теорий обсуждалась в [13]. Существует еще одна возможность интерпретации $\mu \neq 0$, это связь с некоторым хиггсовским конденсатом – комплексным полем iA_0 , обсуждавшаяся в работах [14, 15].

2. ЭФФЕКТИВНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ПРИ $H \neq 0$, $\mu = 0$

Рассмотрим сначала относительно простой случай, когда $\mu = 0$, $H \neq 0$, на основе которого далее можно будет ввести химический потенциал. Пусть система находится во внешнем однородном магнитном поле H . Будем описывать ее с помощью лагранжиана

$$L_\sigma = \bar{\psi}(i\hat{\partial} - e\hat{A})\psi + \sigma\bar{\psi}\psi - \frac{N}{2g_0}\sigma^2, \quad (2)$$

который эквивалентен исходному (1) при $A_\mu = 0$. Действительно, с помощью уравнений движения вспомогательное поле σ можно исключить из (2) и получить (1). Эффективный потенциал модели (2) в главном порядке $1/N$ -разложения имеет вид [6]

$$\frac{1}{N}V_{\text{eff}}(\sigma) = \frac{\sigma^2}{2g_0} + \frac{i}{v} \text{Sp} \ln \Delta, \quad (3)$$

где

$$\Delta = i\hat{\partial} - e\hat{A} + \sigma, \quad A_{0,1} = 0, \quad A_2 = x_1 H, \quad v = \int d^3x, \quad (4)$$

а поле σ в (3) не зависит от точек пространства-времени. Там же в [6] показано, что функция (3) симметрична относительно преобразования $\sigma \rightarrow -\sigma$. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только неотрицательные значения σ . Обратимся сначала к

причинной функции Грина оператора Δ , которую можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}\Delta_{\alpha\beta}^{-1}(x, t; x', t') = & -i\theta(t - t') \sum_{\{n\}} \psi_{\{n\}\alpha}^{(+)}(x, t) \bar{\psi}_{\{n\}\beta}^{(+)}(x', t') + \\ & + i\theta(t' - t) \sum_{\{n\}} \psi_{\{n\}\alpha}^{(-)}(x, t) \bar{\psi}_{\{n\}\beta}^{(-)}(x', t').\end{aligned}\quad (5)$$

Здесь $\{n\} = (i, n, k)$, где $i = 1, 2$; $n = 0, 1, 2, \dots$; k — вещественное число, $-\infty < k < \infty$. Кроме того, $\psi_{\{n\}}^{(\pm)}$ — это положительно- и отрицательно-частотные ортонормированные решения уравнения Дирака $\Delta\psi = 0$, которые имеют вид (T — символ транспонирования)

$$\begin{aligned}\psi_{1nk}^{(\pm)T}(x, t) = & \exp(\mp i\varepsilon_n t + ikx_2) \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_n \mp \sigma}{4\pi\varepsilon_n}} I_{n,k}(x_1), \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_n \pm \sigma}{4\pi\varepsilon_n}} I_{n-1,k}(x_1), 0, 0 \right), \\ \psi_{2nk}^{(\pm)T}(x, t) = & \exp(\mp i\varepsilon_n t + ikx_2) \left(0, 0, \sqrt{\frac{\varepsilon_n \pm \sigma}{4\pi\varepsilon_n}} I_{n,k}(x_1), \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_n \mp \sigma}{4\pi\varepsilon_n}} I_{n-1,k}(x_1) \right),\end{aligned}\quad (6)$$

где

$$I_{n,k}(x_1) = \frac{(eH)^{1/4}}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2}\right) H_n(\zeta), \quad (7)$$

$H_n(\zeta)$ — полиномы Эрмита, $\varepsilon_n = \sqrt{\sigma^2 + 2eHn}$, $\zeta = \sqrt{eH}(x_1 - \frac{k}{eH})$. Функции (7) удовлетворяют условиям

$$\int dx_1 I_{n,k}^2(x_1) = \frac{1}{eH} \int dk I_{n,k}^2(x_1) = 1. \quad (8)$$

Кроме того, в формулах (6) предполагается, что $I_{-1,k}(x_1) \equiv 0$.

Теперь мы имеем материал, необходимый для вычисления величины

$$\frac{1}{N} \frac{d}{d\sigma} V_{\text{eff}}(\sigma) = \frac{\sigma}{g_0} + \frac{i}{v} \text{Sp}(\Delta^{-1}). \quad (9)$$

Для этого сначала нужно избавиться от θ -функции в (5) по правилу

$$\mp \theta(\pm t) \exp(\mp i\varepsilon_n t) f(\varepsilon_n) = \int \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{f(\pm\omega) \exp(-i\omega t)}{\omega \mp (\varepsilon_n - i0)}. \quad (10)$$

Подставляя затем полученное выражение для функции Грина в (9), имеем

$$\frac{1}{N} \frac{d}{d\sigma} V_{\text{eff}}(\sigma) = \frac{\sigma}{g_0} - \frac{i}{4\pi^2 v} \int d^3x \int d\omega \int dk \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\sigma [I_{n-1,k}^2(x_1) + I_{n,k}^2(x_1)]}{\omega^2 - \varepsilon_n^2 + i0}.$$

Здесь можно проинтегрировать по переменной k (см. (8)):

$$\frac{1}{N} \frac{d}{d\sigma} V_{\text{eff}}(\sigma) = \frac{\sigma}{g_0} - \frac{ieH}{4\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int d\omega \frac{2\sigma s_n}{\omega^2 - \varepsilon_n^2 + i0}, \quad (11)$$

где $s_n = 2 - \delta_{0n}$. Это выражение очень удобно для учета температуры и химического потенциала. Мы, однако, продолжим вычисление эффективного потенциала при $\mu = 0$. С этой целью перейдем в (11) к евклидовой метрике, т.е. сделаем замену $\omega \rightarrow i\omega$, а потом воспользуемся α -представлением:

$$(\omega^2 + \varepsilon_n^2)^{-1} = \int_0^\infty d\alpha \exp[-\alpha(\omega^2 + \varepsilon_n^2)].$$

После интегрирования по ω и суммирования по n получим

$$\frac{1}{N} \frac{d}{d\sigma} V_{\text{eff}}(\sigma) = \frac{\sigma}{g_0} - \frac{\sigma e H}{2\pi^{3/2}} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}} e^{-\alpha\sigma^2} \text{cth}(eH\alpha). \quad (12)$$

Интегрируя обе части этого выражения по α в пределах от 0 до ∞ и опуская несущественные не зависящие от σ константы, получим

$$\frac{1}{N} V_{\text{eff}}(\sigma) = \frac{\sigma^2}{2g_0} + \frac{eH}{4\pi^{3/2}} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^{3/2}} e^{-\alpha\sigma^2} \text{cth}(eH\alpha). \quad (13)$$

В этом выражении интеграл расходится на нижнем пределе. Сделав тождественные преобразования в (13), можно локализовать эту расходимость в эффективном потенциале при $H = 0$:

$$\frac{1}{N} V_{\text{eff}}(\sigma) = \frac{1}{N} V_0(\sigma) + \frac{eH}{4\pi^{3/2}} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^{3/2}} e^{-\alpha\sigma^2} \left[\text{cth}(eH\alpha) - \frac{1}{eH\alpha} \right], \quad (14)$$

где

$$\frac{1}{N} V_0(\sigma) = \frac{\sigma^2}{2g_0} + \frac{1}{4\pi^{3/2}} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^{5/2}} e^{-\alpha\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{2g} + \frac{\sigma^3}{3\pi}. \quad (15)$$

Последнее равенство в (15) получено после перенормировки (см. приложение); константа связи g – конечный параметр, который не зависит ни от точки нормировки модели, ни от параметра обрезания. Очевидно, что глобальный минимум функции (15) лежит в точке $\sigma = 0$ при $g > 0$ и $\langle \sigma \rangle = -\pi/g \equiv M$, если $g < 0$ [6]. В последнем случае спонтанным образом нарушается инвариантность модели (1) относительно дискретных киральных преобразований $\psi_k \rightarrow \gamma^5 \psi_k$, а фермионы приобретают массу M .

Эффективный потенциал (14) может быть записан и в более компактном виде [16]:

$$\frac{1}{N} V_{\text{eff}}(\sigma) \equiv \frac{1}{N} V_H(\sigma) = \frac{\sigma^2}{2g} + \frac{eH\sigma}{2\pi} - \frac{(2eH)^{3/2}}{2\pi} \zeta\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sigma^2}{2eH}\right), \quad (16)$$

где $\zeta(s, v)$ – обобщенная дзета-функция Римана [17]. Экстремальные свойства функции (14)–(16) хорошо известны [6–8]. Так, при $eH \rightarrow 0$ точка глобального минимума $\sigma_0(H)$ имеет следующее поведение:

$$\sigma_0(H) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} g e H + \dots, & g > 0, \\ M \left\{ 1 + \frac{(eH)^2}{12M^4} + \dots \right\}, & g < 0. \end{cases} \quad (17)$$

При $H \rightarrow \infty$ независимо от знака константы связи g

$$\sigma_0(H) \approx \sqrt{0,2} \sqrt{eH}. \quad (18)$$

Таким образом, внешнее магнитное поле способствует спонтанному нарушению киральной инвариантности модели при $g > 0$ и стремится законсервировать фазу с нарушенной симметрией при $g < 0$.

3. ЭФФЕКТИВНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ПРИ $H, \mu \neq 0$

Рассмотрим теперь, как влияет на фазовую структуру исходной модели совместный учет магнитного поля и химического потенциала. Получим сначала выражение для эффективного потенциала в этом случае. Процедура эта хорошо известна и сводится к замене интегрирования по энергетическим переменным на суммирование по мацубаровским частотам. Следовательно, в нашем случае необходимо вместо интегрирования по ω в (11) ввести суммирование по дискретным значениям ω_m по правилу

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} f(\omega) \rightarrow \frac{i}{\beta} \sum_m f(\omega_m); \quad \omega_m = \frac{i\pi}{\beta}(2m+1) + \mu, \quad (19)$$

где $\beta = 1/T$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (ради удобства дополнительно к H, μ мы учли и температуру T , которую в конце всех вычислений устремим к нулю). Просуммировав в полученном выражении по m (аналогичные суммы вычислялись в [18]), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{d}{d\sigma} V_{\text{eff}}(\sigma) = & \left\{ \frac{\sigma}{g_0} - \frac{eH\sigma}{2\pi} \sum_n \frac{s_n}{\varepsilon_n} \right\} + \\ & + \frac{eH\sigma}{2\pi} \sum_n \frac{s_n}{\varepsilon_n} \left[[1 + e^{-\beta(\varepsilon_n + \mu)}]^{-1} + [1 + e^{-\beta(\varepsilon_n - \mu)}]^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Нетрудно видеть, что выражение в фигурных скобках в (20) есть не что иное, как правая часть в (11). Следовательно, после интегрирования по σ обеих частей (20) в пределах от 0 до ∞ получим представление для эффективного потенциала в операторной форме:

$$\frac{1}{N} V_{\text{eff}}(\sigma) = V_H(\sigma) - \frac{eH}{2\pi\beta} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \ln \left\{ [1 + e^{-\beta(\varepsilon_n + \mu)}] [1 + e^{-\beta(\varepsilon_n - \mu)}] \right\}. \quad (21)$$

Эффективный потенциал модели при $\mu = 0$ (16) мы здесь обозначили как $V_H(\sigma)$. Наконец, после перехода в (21) к пределу $\beta \rightarrow \infty$ получаем эффективный потенциал при $H, \mu \neq 0$:

$$\frac{1}{N} V_{\text{eff}}(\sigma) = V_H(\sigma) - \frac{eH}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \theta(\mu - \varepsilon_n)(\mu - \varepsilon_n). \quad (22)$$

Напомним, что $\varepsilon_n = \sqrt{\sigma^2 + 2eHn}$, $s_n = 2 - \delta_{0n}$.

4. ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ МОДЕЛИ ПРИ $g > 0$

Пусть константа связи $g > 0$. Исследуем потенциал (22) на абсолютный минимум. Для этого рассмотрим уравнение стационарности этой функции

$$\frac{1}{N} \frac{d}{d\sigma} V_{\text{eff}}(\sigma) = 0 = \frac{\sigma}{g} + \frac{eH}{2\pi} - \frac{\sigma\sqrt{2eH}}{2\pi} \zeta\left(\frac{1}{2}, \frac{\sigma^2}{2eH}\right) + \frac{eH}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \theta(\mu - \varepsilon_n) \frac{\sigma}{\varepsilon_n}. \quad (23)$$

Покажем сначала, что при $\mu > \sigma_0(H)$, где $\sigma_0(H)$ – единственное решение уравнения стационарности (см. (17), (18)) в случае $\mu = 0$, $H \neq 0$:

$$\frac{d}{d\sigma} V_H(\sigma) = 0 = \frac{\sigma}{g} + \frac{eH}{2\pi} - \frac{\sigma\sqrt{2eH}}{2\pi} \zeta\left(\frac{1}{2}, \frac{\sigma^2}{2eH}\right), \quad (24)$$

в теории реализуется кирально-симметричная фаза (равенство (24) получается дифференцированием функции (16) по σ).

Разобьем плоскость параметров (μ, H) (при $\mu, H \geq 0$) на области Ω_n :

$$(\mu, H) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n; \quad \Omega_n = \{(\mu, H) : 2eHn \leq \mu^2 \leq 2eH(n+1)\}. \quad (25)$$

Очевидно, что в области Ω_0 вклад в уравнение (23) будет давать только первое слагаемое из суммы, стоящей в нем, в Ω_1 – два первых слагаемых из суммы и т.д. В дальнейшем нам понадобится очень важное разложение ζ -функции Римана [19] ($v = \sigma^2/2eH$):

$$\zeta\left(\frac{1}{2}, v\right) = \sum_{i=0}^m (v+i)^{-1/2} - 2\sqrt{m+v} - \sum_{i=m}^{\infty} f_i(v), \quad (26)$$

где

$$f_k(v) = \frac{1}{2} \int_k^{k+1} \frac{(u-k)du}{(u+v)^{3/2}} > 0. \quad (27)$$

Предположим, что $(\mu, H) \in \Omega_0$. С учетом асимптотики (18) очевидно, что при достаточно больших H кривая $\mu = \sigma_0(H)$ проходит через область Ω_0 , т.е. внутри нее есть точки, удовлетворяющие условию $\mu > \sigma_0(H)$. В этом случае уравнение стационарности (23) с помощью формулы (26), в которую нужно подставить $m = 0$, можно привести к виду

$$\frac{\sigma}{g} + \frac{\sigma^2}{\pi} + \frac{\sigma\sqrt{2eH}}{2\pi} \sum_{i=0}^{\infty} f_i\left(\frac{\sigma^2}{2eH}\right) - \frac{eH}{2\pi} + \frac{eH\theta(\mu - \sigma)}{2\pi} = 0. \quad (28)$$

Это уравнение для $\sigma < \mu$ имеет только решение $\sigma = 0$. Если $\sigma \geq \mu$, то (28) формально совпадает с (24), что нетрудно видеть с помощью разложения (26), и будем иметь решение $\sigma_0(H)$ только при $\mu < \sigma_0(H)$. Если же, как мы договорились вначале, $\mu > \sigma_0(H)$, то уравнение (28) не будет иметь решений, находящихся в области $\sigma \geq \mu$. Таким образом, для точек из Ω_0 при условии $\mu > \sigma_0(H)$ соответствующий эффективный потенциал (22)

имеет единственную стационарную точку $\sigma = 0$, в которой у него находится глобальный минимум и вакуум модели кирально-инвариантен (при $\mu < \sigma_0(H)$ у потенциала появляется еще одна стационарная точка $\sigma_0(H)$, в которой, вообще говоря, находится локальный минимум).

Пусть $\mu > \sigma_0(H)$ и $(\mu, H) \in \Omega_n$, где n — произвольное фиксированное число, большее нуля. Тогда в уравнение (23) дадут вклад $(n+1)$ первых слагаемых стоящей там суммы, и оно примет вид

$$\frac{\sigma}{g} + \frac{eH}{2\pi} - \frac{\sigma\sqrt{2eH}}{2\pi} \zeta\left(\frac{1}{2}, \frac{\sigma^2}{2eH}\right) + \frac{eH\sigma}{2\pi} \sum_{i=0}^n \frac{\theta(\mu - \varepsilon_i)}{\varepsilon_i} = 0. \quad (29)$$

Выделим на полуоси $\sigma \geq 0$ $(n+1)$ точек $\sigma_k = \sqrt{\mu^2 - 2eHk}$ ($k = 0, 1, \dots, n$). Этими точками полуось разбивается на $(n+2)$ множеств

$$\begin{aligned} \{\sigma \geq 0\} &= \bigcup_{i=0}^{n+1} A_i; \quad A_0 = \{\sigma \geq \sigma_0\}, \quad A_{n+1} = \{0 \leq \sigma \leq \sigma_n\}, \\ A_k &= \{\sigma_k \leq \sigma \leq \sigma_{k-1}\}, \quad k \neq 0, n+1. \end{aligned}$$

Покажем, что при наложенных выше ограничениях на (μ, H) не существует решения уравнения (29), принадлежащего одному из множеств A_k , $k \neq 0, n+1$. Предположим противное, т.е. пусть существует такое решение $\tilde{\sigma} \in A_k$, $0 < k < n+1$. В этом случае, разложив ζ -функцию по формуле (26) при $m = (k-1)$ и заметив, что на множестве A_k отличны от нуля только k первых слагаемых из стоящей в (29) суммы, получаем для $\tilde{\sigma}$ уравнение

$$\frac{\tilde{\sigma}}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{g} + \sqrt{\frac{eH}{2}} \left[2\sqrt{(k-1) + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2eH}} + \sum_{i=k-1}^{\infty} f_i\left(\frac{\tilde{\sigma}^2}{2eH}\right) \right] \right\} = 0. \quad (30)$$

Очевидно, что это равенство противоречиво, т.к. $\tilde{\sigma} \neq 0$, поскольку $\tilde{\sigma} \notin A_{n+1}$. Кроме того, $g > 0$, $f_i > 0$, поэтому выражение в фигурных скобках в (30) строго положительно и не может обратиться в нуль, т.е. исходное предположение неверно.

На множестве A_{n+1} уравнение (29) имеет вид (30) при $k = n+1$. В этом случае оно имеет решение $\tilde{\sigma} = 0$, т.к. эта точка принадлежит отрезку A_{n+1} . Наконец, в области A_0 уравнение (29) имеет вид (24), т.е. совпадает с уравнением стационарности без химического потенциала. Единственное его решение $\sigma_0(H)$ не попадает в область A_0 при наложенном выше ограничении $\mu > \sigma_0(H)$. Таким образом, уравнение (29) имеет одно и только одно решение $\sigma = 0$. Следовательно, при $(\mu, H) \in \Omega_n$ и $\mu > \sigma_0(H)$ находятся точки, которым соответствует вакуум с ненарушенной киральной симметрией. Ниже линии $\mu = \sigma_0(H)$, т.е. при $\mu < \sigma_0(H)$, лежат точки (μ, H) , для которых у эффективного потенциала (22) есть два локальных минимума: $\sigma = 0$ и $\sigma_0(H)$. Поскольку эти выводы

справедливы для произвольной фиксированной области Ω_n , то они справедливы и для всей плоскости (μ, H) .

На рисунке штриховой линией изображена кривая $\mu = \sigma_0(H)$, выше которой находятся точки, соответствующие кирально-симметричной фазе теории. При пересечении этой кривой у эффективного потенциала спонтанно появляется еще один, вообще говоря, локальный минимум, находящийся в точке $\sigma_0(H) \neq 0$. Соответствующее ему основное состояние метастабильно до тех пор, пока мы не пересечем критическую кривую $\mu = \mu_c(H)$, которая находится из условия

$$V_{\text{eff}}(0) = V_{\text{eff}}(\sigma_0(H)) \quad (31)$$

(критическая кривая на рисунке показана сплошной линией). Ниже этой кривой глобальный минимум переходит из $\sigma = 0$ в $\sigma_0(H) \neq 0$. Здесь стабильна фаза с массивными фермионами (киральная симметрия нарушена), а безмассовая – метастабильна. В силу того что точка глобального минимума скачком изменяет свое значение при пересечении критической кривой, в модели происходит фазовый переход первого рода из кирально симметричной (безмассовой) в кирально несимметричную (массивную) фазу и наоборот. Более детальный вид уравнения для критической кривой $\mu = \mu_c(H)$ можно получить из (31) с помощью (22):

$$V_H(0) - \frac{eH}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \theta(\mu - \sqrt{2eHn})(\mu - \sqrt{2eHn}) = V_H(\sigma_0(H)). \quad (32)$$

Из вышеприведенных рассуждений ясно, что критическая кривая должна лежать под кривой $\mu = \sigma_0(H)$. Однако из (17), (18) видно, что как при достаточно больших, так и при достаточно малых значениях H линия $\mu = \sigma_0(H)$ находится в области Ω_0 (25). Значит, при этих значениях H и критическая кривая находится в Ω_0 , и, следовательно, в уравнении (32) необходимо оставить только первое слагаемое под знаком суммы, стоящей в левой части. В результате мы получим вид критической кривой $\mu = \mu_c(H)$ при достаточно больших и малых значениях H :

$$\mu_c(H) = \frac{2\pi}{eH} \left[V_H(0) - V_H(\sigma_0(H)) \right]. \quad (33)$$

Из (24) и (33) следует, что при $H \rightarrow 0$

$$\mu_c(H) \cong \frac{2\pi}{eH} \frac{dV_H(0)}{d\sigma} \sigma_0(H) = \sigma_0(H). \quad (34)$$

Кроме того, формула (33) позволяет с помощью (14)–(16) и (18) получить асимптотику критической кривой при $H \rightarrow \infty$:

$$\mu_c(H) \simeq \sqrt{eH^2} \left\{ 2 \left[\zeta \left(-\frac{1}{2}; 0, 1 \right) - \zeta \left(-\frac{1}{2}; 0 \right) \right] - \sqrt{0, 1} \right\} - \frac{0, 2\pi}{g}. \quad (35)$$

5. ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ МОДЕЛИ ПРИ $g < 0$

В этом случае все уравнения стационарности имеют тот же вид, что и при $g > 0$. Однако они имеют некоторые особенности, которые позволяют получить строгие результаты лишь при достаточно больших значениях магнитного поля.

Предположим, что $(\mu, H) \in \Omega_0$. Рассмотрим уравнение стационарности (28). При $\sigma > \mu$ оно может иметь решение $\sigma_0(H)$ (при $\mu < \sigma_0(H)$) или не иметь решения вовсе (при $\mu > \sigma_0(H)$). В области $\sigma < \mu$ уравнение (28), очевидно, имеет тривиальное решение $\sigma = 0$. Кроме того, из-за отрицательного значения константы связи g уравнение (28) может, вообще говоря, иметь в этой области другие нетривиальные решения, отличные от $\sigma_0(H)$. В последнем случае процесс нахождения той стационарной точки, в которой потенциал имеет глобальный минимум, значительно усложняется. Чтобы этого избежать, мы выделим значения H , при которых уравнение (28) может иметь не больше двух решений $\sigma = 0$ или $\sigma_0(H)$. Напомним, что $\sigma_0(H)$ – единственное решение уравнения стационарности при $\mu = 0$, $H \neq 0$.

С этой целью вычислим интеграл $f_0(v)$ (27) и представим (28) в виде

$$\frac{\sigma}{\pi} \left\{ -M + \frac{eH + \sigma^2}{\sqrt{2eH + \sigma^2}} \right\} + \frac{\sigma\sqrt{2eH}}{2\pi} \sum_{i=1}^{\infty} f_i \left(\frac{\sigma^2}{2eH} \right) + \frac{eH}{2\pi} [\theta(\mu - \sigma) - 1] = 0, \quad (36)$$

где $M = -\pi/g$. Выражение в фигурных скобках в (36) положительно для всех $\sigma \geq 0$, если

$$2M^2 < eH. \quad (37)$$

Теперь, наложив на магнитное поле ограничение (37), мы можем сделать те же выводы о фазовой структуре модели в области Ω_0 , которые были сделаны в предыдущем разделе для случая $g > 0$. Нетрудно видеть, что уравнения стационарности эффективного потенциала для $(\mu, H) \in \Omega_n$ ($n > 0$) также могут иметь не более двух решений при ограничении (37). Это следует из того, что выражение в фигурных скобках в (30) строго положительно при условии (37) и $k > 1$. Если $k = 1$, то оно совпадает с (28), (36) при $\sigma < \mu$ и, следовательно, тоже положительно. В связи с этим можно утверждать, что при $g < 0$, $eH > 2M^2$ в плоскости (μ, H) существует критическая кривая $\mu = \mu_c(H)$, которая задается уравнением (32). В области Ω_0 она имеет, очевидно, вид (33), и поэтому $\mu_c(H) \sim \sqrt{eH}$ при достаточно больших H . Эти выводы получаются аналогично результатам раздела 4.

К сожалению, о поведении критической кривой в области малых H мы ничего не можем сказать, кроме того что $\mu_c(0) = M$. Это следует из анализа модели при $H = 0$ и $\mu, T \neq 0$ [5].

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предложенной работе была исследована фазовая структура простейшей трехмерной теории поля с четырехфермионным взаимодействием (1) с ненулевым химическим потенциалом во внешнем магнитном поле H . Мы показали, что для этой модели существует критическая кривая $\mu = \mu_c(H)$, которая разделяет плоскость (μ, H) на две области. В одной из них (при $\mu > \mu_c(H)$) находятся точки, соответствующие безмассовой фазе с ненарушенной киральной симметрией. Точкам другой (т.е. при $\mu < \mu_c(H)$) соответствует массивная теория, в которой киральная инвариантность спонтанно нарушена. При пересечении критической кривой в модели происходит фазовый переход первого рода. Независимо от знака константы связи g критическая кривая при достаточно больших значениях магнитного поля ведет себя как $\sqrt{eH}$. В области малых значений внешнего магнитного поля

$$\mu_c(H) \sim \begin{cases} \frac{1}{2\pi} g e H, & g > 0, \\ M, & g < 0. \end{cases}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 95-02-03704а.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Докажем формулу (15). Имеющийся в ней интеграл расходится на нижнем пределе. Сделаем его конечной величиной, интегрируя не от нуля, а от некоторой малой величины λ . Полученное выражение дважды проинтегрируем по частям:

$$\int_{\lambda}^{\infty} d\alpha \alpha^{-5/2} e^{-\alpha\sigma^2} = \left[\frac{2}{3} \lambda^{-3/2} - \frac{4}{3} \sigma^2 \lambda^{-1/2} \right] e^{-\lambda\sigma^2} + \frac{4}{3} \sigma^3 \int_{\lambda\sigma^2}^{\infty} y^{-1/2} e^{-y} dy. \quad (\text{П.1})$$

Выделяя в (П.1) расходящиеся при $\lambda \rightarrow 0$ слагаемые, можно представить эффективный потенциал $V_0(\sigma)$ (15) в следующем виде:

$$V_0(\sigma) = \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{1}{g_0} - \frac{1}{\sqrt{\pi^3 \lambda}} \right) + \frac{\sigma^3}{3\pi}, \quad (\text{П.2})$$

где отброшен бесконечный член, не зависящий от σ . Потребуем теперь, чтобы потенциал (П.2) удовлетворял нормировочному условию (m — точка нормировки)

$$\left. \frac{d^2 V_0}{d\sigma^2} \right|_{\sigma=m} = \frac{1}{g(m)}, \quad (\text{П.3})$$

где $g(m)$ — перенормированная константа связи, зависящая от m и не зависящая от λ . Из (П.2), (П.3) имеем

$$\frac{1}{g_0} - \frac{1}{\sqrt{\pi^3 \lambda}} = \frac{1}{g(m)} - \frac{2m}{\pi} \equiv \frac{1}{g}. \quad (\text{П.4})$$

Подставляя (П.4) в (П.2), получаем искомое выражение для эффективного потенциала при $H = 0$:

$$V_0(\sigma) = \frac{\sigma^2}{2g} + \frac{\sigma^3}{3\pi}. \quad (\text{П.5})$$

Нетрудно видеть, что константа связи g (П.4), (П.5) не зависит ни от m (т.к. g_0 не зависит от точки нормировки), ни от λ (т.к. перенормированная константа $g(m)$ не зависит от параметра обрезания λ).

Список литературы

- [1] *Davydov A. S.* // Phys.Rep. 1990. V. 190. P. 191.
- [2] Quantum Hall Effect / Eds. Prangle R. E. and Girvin S. M. New York: Springer-Verlag, 1987.
- [3] *Affleck J.* // Nucl.Phys. 1986. V. B 265. P. 409.
- [4] *Semenoff G., Wijewardhana L.* // Phys.Rev.Lett. 1989. V. 63. P. 2633; *Dorey N., Mavromatos N.* // Phys. Lett. 1990. V. B 250. P. 107; *Carena M., Clark T. E., Wagner C. E. M.* // Nucl. Phys. 1991. V. B 356. P. 117.
- [5] *Klimenko K. G.* // Z. Phys. 1988. Bd. C 37. S. 457; *Okopinska A.* // Phys. Rev. 1988. V. D 38. P. 2507; *Rosenstein B., Warr B. J., Park S. H.* // Phys. Rev. 1989. V. D 39. P. 3088; *Вшивцев А. С., Жуковский В. Ч., Магницкий Б. В.* // Вестн. МГУ. Сер. 3, физика, астрономия. 1990. Т. 31. С. 22.
- [6] *Klimenko K. G.* // Z. Phys. 1992. Bd. C 54. S. 323 *Клименко К. Г.* // ТМФ. 1991. Т. 89. С. 211; 1992. Т. 90. С. 3.
- [7] *Криве И. В., Нафтулин С. А.* // ЯФ. 1991. Т. 54. С. 1471.
- [8] *Вшивцев А. С., Клименко К. Г., Магницкий Б. В.* // ТМФ. 1994. Т. 101. С. 391.
- [9] *Gusynin V. P., Miransky V. A., Shovkovy I. A.* // Phys. Rev. Lett. 1994. V. 73. P. 3499.
- [10] *Шабад А. Е.* // Тр. ФИАН СССР. 1988. Т. 192. С. 5–152.
- [11] *Chodos A., Everding K., Owen D. A.* // Phys. Rev. 1990. V. D 42. P. 2881.
- [12] *Боголюбов Н. Н., Тябликов С. В.* // ДАН СССР. 1959. Т. 126. С. 53.
- [13] *Тютин И. В.* Калибровочная инвариантность в теории поля и в статистической физике в операторной формулировке: Препринт ФИАН СССР, № 39. М., 1975.
- [14] *Belyaev V. M., Eletsky V. L.* Two-loop free energy for finite temperature $SU(2)$ gauge theory in a constant external field: Preprint ITEP 89-68. М.: Atominform, 1989.
- [15] *Starinets A. O., Vshivtsev A. S., Zhukovskii V. Ch.* // Phys. Lett. 1994. V. B 322. P. 403.
- [16] *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981.
- [17] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т.1. М.: Наука, 1965.
- [18] *Dolan L., Jackiv R.* // Phys. Rev. 1974. V. D 9. P. 3320.
- [19] *Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н.* Курс современного анализа. Т. 2. М.–Л.: ГТТИ, 1934.

Московский государственный институт
радиотехники, электроники и автоматики
(технический университет)

Поступила в редакцию
25.I.1995 г.

A. S. Vshivtsev, K. G. Klimenko, B. V. Magnitsky

VACUUM STRUCTURE OF $(\bar{\psi}\psi)_3^2$ -MODEL WITH ACCOUNTING FOR THE MAGNETIC FIELD AND CHEMICAL POTENTIAL

The phase structure of $(2 + 1)$ -dimensional field theory with a quartic fermion interaction is investigated with accounting for the background magnetic field H and chemical potential μ . It is shown that there is a critical curvature $\mu = \mu_c(H)$, which separates the multitude of the points (μ, H) into two regions. In one of them the vacuum is chiral-symmetric, and in the other the symmetry is spontaneously broken. The behavior of the critical curvature at large and small magnitudes of a background field is analyzed.