Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Зверев, А. А. Славнов, Частичное пересуммирование диаграмм в двумерной решеточной модели фермионов, регуляризованной по Паули–Вилларсу, *ТМФ*, 1996, том 106, номер 3, 401–406

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1124>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 12:27:09

Н. В. Зверев, А. А. Славнов

ЧАСТИЧНОЕ ПЕРЕСУММИРОВАНИЕ ДИАГРАММ В ДВУМЕРНОЙ РЕШЕТОЧНОЙ МОДЕЛИ ФЕРМИОНОВ, РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ ПО ПАУЛИ–ВИЛЛАРСУ

С помощью частичного пересуммирования диаграмм вычислены поляризационный оператор и аксиальный ток в двумерной решеточной модели Швингера SLAC-фермионов, регуляризованной по Паули–Вилларсу. Показано, что пересуммирование диаграмм не меняет результата, полученного ранее в работе [1] для данной модели фермионов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Известные теории фермионов на решетке [2–7] используют различные способы снятия вырождения фермионного спектра. Так, в работе [2] предложена модель SLAC-фермионов, в которой решеточная дираковская производная совпадает внутри зоны Бриллюэна с производной в непрерывной теории и периодически продолжается на остальные зоны. Действие этой модели в координатном пространстве является нелокальным, но сохраняет калибровочную и киральную (в случае нулевой массы) инвариантности. Однако вследствие решеточной периодичности дираковская производная имеет разрыв на границе зоны Бриллюэна. С одной стороны, это не позволяет использовать обычные разложения корреляционных функций диаграмм в ряд Тейлора по внешним импульсам, а с другой стороны, приводит к появлению нелокальных лоренц-неинвариантных контрчленов, а также нефизических инфракрасных расходимостей [8, 9].

С целью преодоления этих трудностей Рабин [10] предложил процедуру частичного пересуммирования диаграмм-“головастиков”, приводящую к устранению разрывов дираковской производной. Однако, как было показано в работе [11], в результате применения процедуры Рабина к точно решаемой двумерной модели Швингера [12] получаются неверные результаты: во-первых, массовая щель оказывается в $\sqrt{2}$ раз больше, чем в непрерывной теории, во-вторых, в выражении для среднего аксиального тока присутствует лоренц-неинвариантное слагаемое, и в-третьих, аномалия аксиального тока равна нулю.

Недавно в работе [1] для устранения указанных недостатков модели [2] SLAC-фермионов было предложено использовать дополнительную регуляризацию Паули–

Вилларса, в которой регуляризующие массы коррелируют с шагом решетки a . Было показано, что без применения процедуры пересуммирования выражения для матричных элементов S -матрицы становятся локальными, лоренц-инвариантными. Вычисленные при этом поляризованный оператор и аксиальный ток в двумерной модели Швингера в пределе $a \rightarrow 0$ совпадают с выражениями для этих диаграмм, полученными в непрерывной теории [12].

В настоящей работе проводятся вычисления, аналогичные [1], но с использованием процедуры частичного пересуммирования [10]. При этом суммируется бесконечный ряд диаграмм, что существенно меняет поведение пропагаторов и вершин вблизи границы зоны Бриллюэна. Поэтому не является очевидным то, что полученные таким образом результаты будут согласованы с результатами работы [1] в рамках теории возмущений. Применяемая в настоящей работе процедура пересуммирования может оказаться полезной для исследования диаграмм высших порядков в более сложных моделях, так как она снимает проблему инфракрасных сингулярностей и позволяет использовать традиционные методы перенормировки, в частности вычитание расходимостей.

2. МОДЕЛЬ ШВИНГЕРА НА РЕШЕТКЕ С ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИЕЙ

SLAC-фермионное действие двумерной модели Швингера, регуляризованной по Паули-Вилларсу, имеет следующий вид [1, 2]:

$$I = \sum_{x,y,\mu} \bar{\psi}(x) i\gamma_\mu D_\mu(x-y) \exp \left\{ ie \sum_{z_\mu=x_\mu}^{y_\mu} A_\mu(z) \right\} \psi(y) - \sum_x m \bar{\psi}(x) \psi(x) + \\ + \sum_{x,y,\mu} \bar{\phi}(x) i\gamma_\mu D_\mu(x-y) \exp \left\{ ie \sum_{z_\mu=x_\mu}^{y_\mu} A_\mu(z) \right\} \phi(y) - \sum_x M \bar{\phi}(x) \phi(x). \quad (1)$$

Здесь $\psi(x)$ – физическое фермионное поле, $\phi(x)$ – регуляризующее бозонное поле, $A_\mu(x)$ – фотонное поле, $D_\mu(x)$ – дираковская производная в SLAC-формулировке:

$$D_\mu(x) = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} i p_\mu e^{ipx};$$

M – регуляризующая масса, связанная с шагом решетки a следующим образом:

$$M = \lambda N^\delta, \quad a^{-1} = \lambda N, \quad 0 < \delta < 1, \quad (2)$$

где λ – массовая шкала, N – безразмерный параметр.

Разлагая действие (1) в ряд по e , находим пропагаторы и вершины взаимодействия. Например, пропагатор поля ψ и простейшая вершина взаимодействия с калибровочным полем имеют соответственно вид

$$S_{\psi\bar{\psi}} = \frac{\hat{P}(p) + m}{P^2(p) + m^2}, \quad (3)$$

$$V_\mu^{(1)} = -e\gamma_\mu \frac{P_\mu(p+k) - P_\mu(p)}{d_\mu(k)}, \quad (4)$$

где $d_\mu(k) = \frac{2}{a} \sin \frac{1}{2} k_\mu a$, $P_\mu(p)$ – дираковская производная в импульсном пространстве, являющаяся периодической пилообразной функцией:

$$P_\mu(p) = p_\mu - 2n\frac{\pi}{a}, \quad (2n-1)\frac{\pi}{a} < p_\mu < (2n+1)\frac{\pi}{a}, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

Функция $P_\mu(p)$ имеет разрыв в точках $p_\mu = \pm \frac{\pi}{a}, \pm \frac{3\pi}{a}, \dots$. Поэтому нельзя выделять расходящиеся части диаграмм путем разложения их в ряд Тейлора по внешним импульсам. Разрывность $P_\mu(p)$ приводит также к появлению нелокальных лоренц-инвариантных контрчленов [8, 9]. Кроме того, появляются фиктивные инфракрасные расходимости: например, вершина (4) при $\frac{\pi}{a} - k_\mu < p_\mu < \frac{\pi}{a}$ пропорциональна $1/ad_\mu(k)$ и становится сингулярной, когда $k_\mu \rightarrow 0$.

Для устранения этих недостатков, вызванных разрывностью $P_\mu(p)$, Рабин предложил [10] процедуру частичного пересуммирования диаграмм. Эта процедура заключается в суммировании голых вершинных функций типа (4) с одинаковым числом внешних фотонных линий (“головастиков”), и она приводит к замене в действии (1) разрывной производной $D_\mu(x)$ на сглаженную производную $\mathcal{D}_\mu(x) = D_\mu(x)\mathcal{G}_\mu(x)$. Тогда в пропагаторах (3) и вершинах (4) функция $P_\mu(p)$ заменяется на непрерывную функцию $\mathcal{P}_\mu(p)$:

$$\mathcal{P}_\mu(p) = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{dp'_\mu}{2\pi} P_\mu(p_\mu - p'_\mu) \tilde{\mathcal{G}}_\mu(p'_\mu).$$

В работе [11] для $\tilde{\mathcal{G}}_\mu(p_\mu)$ было получено следующее асимптотическое выражение в пределе $a \rightarrow 0$:

$$\tilde{\mathcal{G}}_\mu(p_\mu) \approx \frac{\sqrt{8\pi^2/(1+\xi)}}{e \ln^{1/2}(1/\mu_0 a)} \exp \left\{ -\frac{2\pi p_\mu^2/(1+\xi)}{e^2 \ln(1/\mu_0 a)} \right\}, \quad (5)$$

где μ_0 – вспомогательная масса, вводимая для устранения инфракрасных сингулярностей, ξ – параметр калибровки. Дифференцируя $\mathcal{P}_\mu(p)$ по p_μ , получим

$$\frac{d\mathcal{P}_\mu(p)}{dp_\mu} = 1 - \frac{1}{a} \tilde{\mathcal{G}}_\mu \left(|p_\mu| - \frac{\pi}{a} \right). \quad (6)$$

Как следует из (5), (6), функция $\mathcal{P}_\mu(p)$ при малых p_μ совпадает с $P_\mu(p)$, а затем на краю зоны Бриллюэна в области $|p_\mu - \frac{\pi}{a}| \sim e \ln^{1/2}(1/\mu_0 a)$ она резко падает к нулю [10, 11]. Коэффициент наклона $\mathcal{P}_\mu(p)$ в этой области имеет порядок $1/ea \ln^{1/2}(1/\mu_0 a)$ и в пределе $a \rightarrow 0$ стремится к бесконечности.

Для дальнейших вычислений нам также потребуются коэффициенты наклона функции $\mathcal{P}_\mu(p)$, введенные в работе [11]:

$$c_{j\mu} = \frac{d\mathcal{P}_\mu(\bar{p}_j)}{d\bar{p}_\mu}, \quad \bar{p}_{j\mu} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\pi}{a}.$$

Асимптотические значения этих коэффициентов, полученные с помощью (5), (6), приведены в таблице [11].

3. ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЙ ОПЕРАТОР И АКСИАЛЬНЫЙ ТОК В НЕПРЕРЫВНОМ ПРЕДЕЛЕ

Как показано в работе [11], фермионные петли с числом фотонных линий $n > 2$ в непрерывном пределе $a \rightarrow 0$ исчезают. В этом пределе не исчезают лишь диаграммы

Наклоны функции $\mathcal{P}_\mu(p)$ в ее нулях [11]

j	$\bar{p}_j = (\bar{p}_{j1}, \bar{p}_{j2})$	c_{j1}	c_{j2}
1	$(0, 0)$	1	1
2	$(\frac{\pi}{a}, 0)$	$\frac{-\sqrt{8\pi^2/(1+\xi)}}{ea \ln^{1/2}(1/\mu_0 a)}$	1
3	$(0, \frac{\pi}{a})$	1	$\frac{-\sqrt{8\pi^2/(1+\xi)}}{ea \ln^{1/2}(1/\mu_0 a)}$
4	$(\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a})$	$\frac{-\sqrt{8\pi^2/(1+\xi)}}{ea \ln^{1/2}(1/\mu_0 a)}$	$\frac{-\sqrt{8\pi^2/(1+\xi)}}{ea \ln^{1/2}(1/\mu_0 a)}$

поляризационного оператора и среднего аксиального тока. Для поляризационного оператора имеем согласно [11] следующее выражение:

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu}^{\text{reg}}(k) = & e^2 \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \text{tr} \left\{ \gamma_\mu \frac{\mathcal{P}_\mu(p+k) - \mathcal{P}_\mu(p)}{d_\mu(k)} \cdot \frac{\widehat{\mathcal{P}}(p+k) + m}{\mathcal{P}^2(p+k) + m^2} \times \right. \\
& \times \gamma_\nu \frac{\mathcal{P}_\nu(p+k) - \mathcal{P}_\nu(p)}{d_\nu(k)} \cdot \frac{\widehat{\mathcal{P}}(p) + m}{\mathcal{P}^2(p) + m^2} + \frac{\widehat{\mathcal{P}}(p) + m}{\mathcal{P}^2(p) + m^2} \times \\
& \left. \times \gamma_\mu \delta_{\mu\nu} \cdot \frac{\mathcal{P}_\mu(p+k) + \mathcal{P}_\mu(p-k) - 2\mathcal{P}_\mu(p)}{d_\mu^2(k)} \right\} - (m \rightarrow M). \quad (7)
\end{aligned}$$

Здесь $(m \rightarrow M)$ обозначает аналогичный интеграл, в котором вместо массы фермиона m стоит регуляризующая масса M . Выражение для среднего аксиального тока на решетке $A_{\mu\nu}^{\text{reg}}(k)$ отличается от (7) лишь заменой γ_μ на $\gamma_\mu \gamma_3$.

Поляризационный оператор $\Pi_{\mu\nu}^{\text{reg}}$ и аксиальный ток $A_{\mu\nu}^{\text{reg}}$ удовлетворяют тождествам Уорда в виде

$$\sum_\nu d_\nu(k) \Pi_{\mu\nu}^{\text{reg}}(k) = \sum_\nu d_\nu(k) A_{\mu\nu}^{\text{reg}}(k) = 0. \quad (8)$$

Вычислим $\Pi_{\mu\nu}^{\text{reg}}$ и $A_{\mu\nu}^{\text{reg}}$ в непрерывном пределе $a \rightarrow 0$. Для этого разбиваем область интегрирования $|p| \leq \pi/a$ на 4 подобласти $|p - \bar{p}_j| \leq \pi/2a$, где $\bar{p}_j$ указаны в таблице, и рассматриваем интегралы по соответствующим областям. Проводя вычисления аналогично [11] и полагая $m = 0$, получим следующие асимптотические выражения в пределе $a \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu}^{\text{reg}}(k) = & \frac{e^2}{\pi} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \left\{ 1 - \int_0^1 d\alpha \frac{\alpha(1-\alpha)k^2}{\alpha(1-\alpha)k^2 + M^2} \right\} + \\
& + \sum_{j=2,3,4} \frac{e^2}{\pi} \frac{c_{j\mu} c_{j\nu}}{|c_{j1} c_{j2}|} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{c_{j\mu} k_\mu c_{j\nu} k_\nu}{(c_j k)^2} \right) (M^2 / (c_j k)^2) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{\sqrt{1/4 + M^2/(c_j k)^2}} \left\{ 2 \ln \left(1/2 + \sqrt{1/4 + M^2/(c_j k)^2} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \ln \left(M^2/(c_j k)^2 \right) \right\} + O(a) + O \left(1/e \ln^{1/2}(1/\mu_0 a) \right), \\
\\
A_{\mu\nu}^{\text{reg}}(k) &= \frac{e^2}{i\pi} \left(\varepsilon_{\mu\nu} - \frac{\sum_{\lambda} \varepsilon_{\mu\lambda} k_{\lambda} k_{\nu}}{k^2} \right) \left\{ 1 - \int_0^1 d\alpha \frac{\alpha(1-\alpha)k^2}{\alpha(1-\alpha)k^2 + M^2} \right\} + \\
&+ \sum_{j=2,3,4} \frac{e^2}{i\pi} \frac{c_{j1} c_{j2}}{|c_{j1} c_{j2}|} \left(\varepsilon_{\mu\nu} - \frac{\sum_{\lambda} \varepsilon_{\mu\lambda} k_{\lambda} k_{\nu} c_{j\lambda}^2}{(c_j k)^2} \right) (M^2/(c_j k)^2) \times \\
&\times \frac{1}{\sqrt{1/4 + M^2/(c_j k)^2}} \left\{ 2 \ln \left(1/2 + \sqrt{1/4 + M^2/(c_j k)^2} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \ln \left(M^2/(c_j k)^2 \right) \right\} + O(a) + O \left(1/e \ln^{1/2}(1/\mu_0 a) \right), \tag{9}
\end{aligned}$$

где обозначено: $c_j k = (c_{j1} k_1, c_{j2} k_2)$.

Завершим переход к пределу $a \rightarrow 0$. Из условия (2) следует, что при $a \rightarrow 0$ в подобластях интегрирования с номерами $j = 2, 3, 4$ имеет место свойство (см. таблицу)

$$M^2/(c_j k)^2 \sim M^2 a^2 \ln(1/\mu_0 a) \sim \frac{\ln N}{N^{2(1-\delta)}} \rightarrow 0, \quad a \rightarrow 0. \tag{10}$$

Рассмотрим соотношения (9) для случая разных индексов: $\mu \neq \nu$. В этом случае выражения под знаком суммы в непрерывном пределе исчезают в силу свойства (10). Интегралы в (9) с M^2 в знаменателе в пределе $a \rightarrow 0$ тоже не дают вклада. Поэтому в данном пределе получаем стандартные выражения непрерывной модели Швингера для поляризационного оператора и среднего аксиального тока, когда $\mu \neq \nu$. Случай совпадающих индексов μ и ν ($\mu = \nu$) сводится к предыдущему ($\mu \neq \nu$) с учетом тождеств Уорда (8).

В итоге в пределе $a \rightarrow 0$ получим поляризационный оператор и аксиальный ток в следующем стандартном [12] виде:

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu}(k) &= \lim_{a \rightarrow 0} \Pi_{\mu\nu}^{\text{reg}}(k) = \frac{e^2}{\pi} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{k^2} \right), \\
A_{\mu\nu}(k) &= \lim_{a \rightarrow 0} A_{\mu\nu}^{\text{reg}}(k) = \frac{e^2}{i\pi} \left(\varepsilon_{\mu\nu} - \frac{\sum_{\lambda} \varepsilon_{\mu\lambda} k_{\lambda} k_{\nu}}{k^2} \right).
\end{aligned}$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе показано, что вычисление поляризационного оператора и среднего значения аксиального тока с использованием процедуры пересуммирования [10] в двумерной SLAC-модели Швингера, регуляризованной по Паули–Вилларсу, приводит в пределе $a \rightarrow 0$ к стандартным результатам непрерывной теории [12]. Это позволяет надеяться на то, что и в более сложных моделях SLAC-фермионов, регуляризованных по Паули–Вилларсу, можно использовать процедуру частичного пересуммирования диаграмм, которая существенно облегчает выполнение необходимых перенормировок.

Работа А. А. Славнова поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 94-01-00300а) и Международным научным фондом (грант MNB000).

Список литературы

- [1] *Slavnov A. A.* // Nucl. Phys. (Proc. Suppl.) 1995. V. B42. P. 166.
- [2] *Drell S., Weinstein M., Yankielovitz S.* // Phys. Rev. 1976. V. D14. P. 487; 1627.
- [3] *Wilson K.* // Phys. Rev. 1974. V. D10. P. 2445.
- [4] *Wilson K.* // New Phenomena in Subnuclear Physics / Ed. A. Zichichi. NY: Plenum Press, 1977.
- [5] *Smit J.* // Nucl. Phys. 1980. V. B175. P. 307.
- [6] *Swift P.* // Phys. Lett. 1984. V. B145. P. 256.
- [7] *Kogut J., Susskind L.* // Phys. Rev. 1975. V. D14. P. 395.
- [8] *Karsten L., Smit J.* // Nucl. Phys. 1978. V. B144. P. 536.
- [9] *Karsten L., Smit J.* // Phys. Lett. 1979. V. B85. P. 100.
- [10] *Rabin J.* // Phys. Rev. 1981. V. D24. P. 3218.
- [11] *Bodwin G., Kovacs E.* // Phys. Rev. 1987. V. D35. P. 3198.
- [12] *Schwinger J.* // Phys. Rev. 1962. V. 128. P. 2425.

Математический институт им. В.А.Стеклова
Российской академии наук

Поступила в редакцию
2.VI.1995 г.

N. V. Zverev, A. A. Slavnov

A PARTIAL RESUMMATION OF DIAGRAMMS IN THE TWO DIMENSIONAL LATTICE FERMION MODEL WITH THE PAULI-VILLARS REGULARIZATION

The polarization operator and axial current are obtained by means of partial resummation in the two dimensional lattice SLAC-fermion Schwinger model with the Pauli-Villars regularization. It is shown that the resummation procedure does not change the result obtained earlier in [1] for the fermion model considered.