Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Саврин, А. Ю. Труль, Точное решение уравнения Бете–Солпитера с запаздывающими пропагаторами в модели Вика–Кутковского, *ТМФ*, 1996, том 106, номер 3, 407–415

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1125>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:52:42

В. И. Саврин, А. Ю. Труль

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БЕТЕ–СОЛПИТЕРА С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМИ ПРОПАГАТОРАМИ В МОДЕЛИ ВИКА–КУТКОССКОГО

Исследуется дискретный спектр уравнения Бете–Солпитера в модели Вика–Кутковского. Показано, что в случае запаздывающих пропагаторов переменные разделяются и уравнение в S -волне сводится к одномерному. Методом контурного интегрирования получено точное решение уравнения, и исследован спектр релятивистских связанных состояний. Обсуждается неоднозначность в определении аналитического вида волновых функций, связанная с наличием нефизической переменной в задаче четырехмерного описания релятивистских систем.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] был предложен метод контурного интегрирования для нахождения точных решений интегрального уравнения в импульсном пространстве, описывающего связанную систему двух релятивистских частиц. В качестве такого уравнения рассматривалось квазипотенциальное уравнение Логанова–Тавхелидзе [2], которое не содержит нефизического параметра относительной энергии частиц и поэтому имеет явно трехмерную форму. В качестве квазипотенциала был выбран вклад одноглюонного обмена во взаимодействие двух скалярных частиц.

Эффективность предложенного метода естественным образом приводит к мысли предпринять попытку применить его к решению уравнения Бете–Солпитера в модели Вика–Кутковского, которая, можно сказать, моделирует скалярное кулоновское взаимодействие в квантовой теории поля.

Модель Вика–Кутковского [3], рассматривающая взаимодействие двух скалярных частиц посредством скалярного безмассового бозона в лестничном приближении, достаточно хорошо известна. Последний обзор результатов, полученных в рамках этой модели, опубликован Наканиши [4]. Модель уникальна тем, что, будучи полностью релятивистской квантовой задачей двух тел, она является аналитически исследуемой задачей и, конечно, идеально подходит для изучения различных свойств системы двух частиц.

К сожалению, в этой модели до сих пор не удалось получить аналитическое выражение для уровней энергии системы. Несмотря на то что различными способами [4] четырехмерное интегральное уравнение можно свести к одномерному дифференциальному

уравнению второго порядка, неопределенность в граничных условиях приводит к крайним задачам, чьи аналитические решения до настоящего времени не известны. Эта неопределенность проистекает из общей проблемы формулировки физически приемлемых граничных условий для различных явно ковариантных дифференциальных уравнений, претендующих на описание связанных состояний различных квантово-полевых систем, так как их четырехмерность обуславливает явное присутствие переменной относительной энергии или относительного времени двух частиц, для которой трудно сформулировать граничные условия из каких-либо физических соображений.

Поскольку интегральное уравнение неявно содержит в себе необходимые граничные условия, естественно попытаться получить необходимые решения, непосредственно решая интегральное уравнение. К сожалению, даже для S -волны аналитического решения исходного уравнения пока получить не удалось. Однако если в исходном уравнении заменить все причинные пропагаторы на запаздывающие, то, как будет показано, модифицированное таким образом уравнение удастся решить точно и полностью исследовать спектральные свойства соответствующего интегрального оператора в комплексной плоскости значений энергии системы.

Естественно, сразу же возникает вопрос о связи уравнения с запаздывающими пропагаторами с уравнением с причинными пропагаторами. В настоящей статье этот вопрос обсуждается в разделе 4.

1. РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

Запишем уравнение Бете–Солпитера на связанные состояния для модели Вика–Куткоского в покоящейся системе отсчета, ограничившись случаем двух частиц равной массы m :

$$[(p_0 + M)^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i0][(p_0 - M)^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i0]\Phi(p) = \frac{i\lambda}{\pi^2} \int \frac{d^4k \Phi(k)}{(p-k)^2 + i0}, \quad (1)$$

где $2M = \sqrt{S}$ – масса связанной системы, $\lambda = g^2/(4\pi)^2$, g – константа связи теории.

Переход к запаздывающим пропагаторам сводится к изменению способа обхода полюсов. Легко понять, что уравнение с запаздывающими пропагаторами имеет вид

$$\begin{aligned} &[(p_0 + M + i0)^2 - \vec{p}^2 - m^2][(p_0 - M - i0)^2 - \vec{p}^2 - m^2]\Phi(p) = \\ &= \frac{i\lambda}{\pi^2} \int d^4k \frac{\Phi(k)}{(p_0 - k_0 + i0)^2 - (\vec{p} - \vec{k})^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Мы будем рассматривать любые комплексные M с положительной мнимой частью. Отметим также, что уравнение (2) справедливо только для системы частица–античастица.

В данной работе мы ограничимся рассмотрением только уравнения для S -волны. Это означает, что в (2) $\Phi(p) = \Phi(p_0, |\vec{p}|)$ не зависит от углов. В дальнейшем вместо $|\vec{p}|$ мы будем писать просто p и надеемся, что это не приведет к недоразумению. Проинтегрируем по углам и введем функцию $\Psi(p_0, p) = p\Phi(p_0, p)$, тогда имеем

$$\begin{aligned} &[(p_0 - p + M)(p_0 + p + M) - m^2][(p_0 - p - M)(p_0 + p - M) - m^2]\Psi(p_0, p) = \\ &= \frac{i\lambda}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \int_0^{\infty} dk \Psi(k_0, k) \ln \frac{[(p_0 - p) - (k_0 + k) + i0][(p_0 + p) - (k_0 - k) + i0]}{[(p_0 - p) - (k_0 - k) + i0][(p_0 + p) - (k_0 + k) + i0]}. \end{aligned} \quad (3)$$

Продолжим $\Psi(p_0, p)$ по p на отрицательную полуось антисимметрично: $\Psi(p_0, p) = -\Psi(p_0, -p)$. Переходя к переменным волнового фронта $p_0 + p = p_+$, $p_0 - p = p_-$, $\Psi(p_+, p_-) = -\Psi(p_-, p_+)$, получаем уравнение

$$\begin{aligned} & [(p_+ + M)(p_- + M) - m^2] [(p_+ - M)(p_- - M) - m^2] \Psi(p_0, p) = \\ & = \frac{\lambda}{4i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_+ dk_- \Psi(k_+, k_-) \left\{ \ln \frac{p_+ - k_+ + i0}{p_+ - k_- + i0} - \ln \frac{p_- - k_+ + i0}{p_- - k_- + i0} \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

которое в переменных волнового фронта разделяется.

Вводя обозначение

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' dz'' \Psi(z', z'') \ln \frac{z - z' + i0}{z - z'' + i0}, \quad (5)$$

получим для $\Psi(p_+, p_-)$ следующее представление:

$$\Psi(p_+, p_-) = \frac{\lambda}{4i\pi} \frac{F(p_+) - F(p_-)}{[(p_+ + M)(p_- + M) - m^2] [(p_+ - M)(p_- - M) - m^2]}. \quad (6)$$

Подставляя выражение (6) в (4), получим уравнение для $F(z)$:

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{\lambda}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz' dz'' F(z')}{[(z' + M)(z'' + M) - m^2] [(z' - M)(z'' - M) - m^2]} \ln \frac{z - z' + i0}{z - z'' + i0} = \\ &= -\frac{\lambda}{2M} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz' F(z')}{z'^2 - M^2 + m^2} \ln \frac{z - z' + i0}{z + M - \frac{m^2}{z' + M} + i0}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $z = p_+$ или p_- .

Таким образом, для S -волны оказывается возможным разделить переменные и редуцировать четырехмерное интегральное уравнение до одномерного интегрального уравнения.

Тот факт, что уравнение (4) разделяется именно в переменных волнового фронта, не должен казаться удивительным. Нетрудно видеть, что подействовав на уравнение (4) двумерным оператором Даламбера $\frac{\partial^2}{\partial p_+ \partial p_-}$, получим для функции $\chi(p_+, p_-) = [(p_+ + M)(p_- + M) - m^2] [(p_+ - M)(p_- - M) - m^2] \Psi(p_+, p_-)$ свободное волновое уравнение. Хорошо известно, что в переменных волнового фронта свободное волновое уравнение разделяется. Однако полное разделение переменных возможно лишь в случае, если и в граничных условиях переменные разделяются. Поскольку интегральное уравнение неявно содержит в себе и граничные условия, то полное разделение переменных в интегральном уравнении означает, что для свободного волнового уравнения необходимо решать задачу Гурса. Вывод о том, что интегральное уравнение (3) сводится к задаче Гурса для гиперболического дифференциального уравнения, может быть весьма общим и иметь место и для исходного уравнения (1) с причинными пропагаторами.

2. ВЫБОР КЛАССА ФУНКЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Для дальнейшего исследования уравнения (7) удобно ввести безразмерные переменные $\mu = (z + M)/m$, $\nu = (z' + M)/m$, а также безразмерный параметр $E = M/m$

и константу взаимодействия скалярной электродинамики $\alpha = \pi\lambda/m^2$. Кроме того, переопределим волновую функцию $F(z)$ в новых переменных следующим образом: $F(z) = (\mu + 1/\mu - 2E)\varphi(\mu)$. В результате уравнение (7) принимает вид

$$(\mu^2 - 2E\mu + 1)\frac{\varphi(\mu)}{\mu} = -\frac{\alpha}{2\pi E} \int_{\gamma} d\nu \frac{\varphi(\nu)}{\nu} \ln \frac{\mu - \nu + i0}{\mu - 1/\nu + i0}. \quad (8)$$

Мы не будем исключать возможности того, что параметр энергии E , вообще говоря, принимает комплексные значения ($\text{Im } E > 0$), поэтому контур интегрирования γ будет лежать в верхней полуплоскости на горизонтальной прямой, отстоящей от начала координат на расстояние $\text{Im } E$.

Нетрудно видеть, что логарифмическая функция обуславливает наличие двух разрывов у подынтегральной функции, один из которых лежит над контуром интегрирования, а второй – в нижней полуплоскости вдоль внутренней стороны окружности Γ с центром в точке $(0, \frac{1}{2}\text{Im } E)$ и радиусом $\frac{1}{2}\text{Im } E$. Из уравнения (8) следует, что функция $\varphi(\mu)$ может иметь особенности в точках $E \pm \sqrt{E^2 - 1}$, одна из которых лежит над контуром интегрирования, а вторая – внутри вышеупомянутой окружности Γ .

Сделаем два дополнительных предположения об аналитических свойствах функции $\varphi(\mu)$:

- 1) отношение $\varphi(\mu)/\mu$ должно достаточно быстро убывать на бесконечности, так чтобы интеграл по бесконечно удаленному контуру стремился к нулю;
- 2) между контурами γ и Γ функция $\varphi(\mu)$ не имеет особенностей.

Эти предположения выделяют класс функций, в котором ищется решение (8). Естественно, после получения решения необходимо будет проверить выполнение этих предположений.

Первое условие вполне естественно, поскольку волновая функция связанного состояния должна иметь конечную норму в импульсном пространстве, и позволяет замыкать контур интегрирования на бесконечности. Второе условие также достаточно естественно, поскольку вряд ли имеет смысл рассматривать функции с особенностями, не просматривающимися непосредственно из уравнения, и мотивировано желанием иметь определенную свободу деформации контура интегрирования, что пригодится нам в дальнейшем. Например, делая замену переменных $\nu \leftrightarrow 1/\nu$ в интеграле в правой части уравнения (8), получим

$$\int_{\Gamma} d\nu \frac{\varphi(1/\nu)}{\nu} \ln \frac{\mu - 1/\nu + i0}{\mu - \nu + i0}. \quad (9)$$

Используя теперь сделанные нами предположения, мы деформируем контур Γ в γ и получим важное интегральное свойство функции $\varphi(\mu)$:

$$\int_{\gamma} d\nu \frac{\varphi(\nu) + \varphi(1/\nu)}{\nu} \ln \frac{\mu - \nu + i0}{\mu - 1/\nu + i0} = 0. \quad (10)$$

3. РЕШЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ КОНТУРНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Из вида левой части (8) ясно, что особенности функции $\varphi(\mu)/\mu$ должны иметь полюсный характер и быть сосредоточены в точках $\kappa = E + i\sqrt{1 - E^2}$ и $1/\kappa = E -$

$i\sqrt{1-E^2}$. Поскольку логарифмические разрезы в подынтегральном выражении уравнения (8) лежат в разных полуплоскостях, удобно правую часть (8) представить в виде суммы интегралов, соответствующих каждому логарифму:

$$\int_{\gamma} \frac{d\nu}{\nu} \varphi(\nu) \ln(\mu - \nu) - \int_{\gamma} \frac{d\nu}{\nu} \varphi(\nu) \ln(\mu - 1/\nu). \quad (11)$$

В первом интеграле можно замкнуть контур интегрирования в нижней полуплоскости, а во втором – в верхней полуплоскости. Замыкать контур можно, поскольку мы ищем решение в выделенном нами классе функций. Деформируем полученные контуры в окрестности малого радиуса вокруг точек $1/\kappa$ и κ , соответственно.

В каждой точке такой окружности соответствующий логарифм может быть представлен в виде суммы сходящегося ряда:

$$\begin{aligned} \ln(\mu - \nu) &= \ln(\mu - 1/\kappa) - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\nu - 1/\kappa)^l}{l(\mu - 1/\kappa)^l}; \\ \ln(\mu - 1/\nu) &= \ln(\mu - 1/\kappa) - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\nu - \kappa)^l}{l(1/\mu - \kappa)^l} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\kappa - \nu)^l}{l\kappa^l}. \end{aligned}$$

Подставляя эти разложения в уравнение (8), получим следующее представление левой части (8) в виде ряда Лорана:

$$(\mu^2 - 2E\mu + 1) \frac{\varphi(\mu)}{\mu} = \frac{i\alpha}{E} \sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{C_{l+1}^-}{l(\mu - 1/\kappa)^l} - \frac{C_{l+1}^+}{l(1/\mu - \kappa)^l} + \frac{(-1)^l C_{l+1}^+}{l\kappa^l} \right], \quad (12)$$

где

$$C_l^+ = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\nu=\kappa} \frac{d\nu}{\nu} \varphi(\nu) (\nu - \kappa)^{l-1}; \quad (13)$$

$$C_l^- = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\nu=1/\kappa} \frac{d\nu}{\nu} \varphi(\nu) (\nu - 1/\kappa)^{l-1}. \quad (14)$$

Мы учли при этом следующее очевидное равенство:

$$\oint_{\nu=\kappa} d\nu \frac{\varphi(\nu)}{\nu} = - \oint_{\nu=1/\kappa} d\nu \frac{\varphi(\nu)}{\nu}. \quad (15)$$

В результате мы обнаруживаем, что левая часть уравнения (8) имеет полюс только в точке $1/\kappa$. Это означает, что для всех $l > 1$ $C_l^+ = 0$, поэтому окончательно имеем

$$(\mu^2 - 2E\mu + 1) \frac{\varphi(\mu)}{\mu} = \frac{i\alpha}{E} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{C_{l+1}^-}{l(\mu - 1/\kappa)^l}. \quad (16)$$

Умножая обе части соотношения (16) на $(\mu - 1/\kappa)^{n-1}$ и интегрируя обе части вокруг точки $1/\kappa$ в положительном направлении, получаем бесконечную систему зацепляющихся однородных уравнений для вычетов C_n^- :

$$C_{n+2}^- + \left(\frac{i\alpha}{En} - \kappa + 1/\kappa \right) C_{n+1}^- = 0. \quad (17)$$

Условие совместности системы, т.е. равенство нулю ее определителя, и доставляет необходимый нам спектр:

$$\kappa - 1/\kappa = 2i\sqrt{1 - E^2} = \frac{i\alpha}{nE}; \quad (18)$$

$$E_n^\pm = \sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{n^2}}}. \quad (19)$$

Соответствующие собственные функции уравнения (8) имеют вид

$$\frac{\varphi_n^\pm(\mu)}{\mu} = \frac{i\alpha/E_n^\pm}{\mu^2 - 2E_n^\pm\mu + 1} \sum_{l=1}^n \frac{C_{l+1}^-}{l(\mu - 1/\kappa_n^\pm)^l}. \quad (20)$$

Отметим, что полученный нами спектр в точности совпадает со спектром, полученным в [1] при решении квазипотенциального уравнения для скалярных частиц.

Из (18) видно, что в физическом секторе ($\text{Re } E > 0$) спектр существует лишь при $\alpha > 0$, что соответствует системе частица–античастица. Также нетрудно видеть, что спектр распадается на два сектора, отвечающих знакам (+) и (–) в (19). Чтобы лучше понять физическую природу такого раздвоения спектра, проанализируем (19) при малых значениях константы связи α . В этом случае можно приближенно записать:

$$\begin{aligned} (+) \quad \varepsilon &\approx -\frac{\alpha^2 m}{4n^2}; \\ (-) \quad \varepsilon &\approx -2m + \frac{\alpha m}{n}, \end{aligned} \quad (21)$$

где введена энергия связи $\varepsilon = \sqrt{S} - 2m$.

Первая формула (21) воспроизводит уровни энергии нерелятивистской кулоновой задачи. Вторая формула описывает глубоколежащие уровни энергии, которые отсутствуют в нерелятивистском пределе и существование которых в релятивистской связанной системе для уравнения с причинными пропагаторами было отмечено ранее рядом авторов [5].

Полученные формулы показывают по крайней мере близость спектров уравнений с причинными и запаздывающими пропагаторами. Мы обсудим вопрос о близости спектров более подробно в следующем разделе, а сейчас вернемся к точной формуле (19) и проанализируем поведение спектра при произвольных α . Очевидно, что при $\alpha \leq 1$ весь спектр остается действительным, и мы имеем дело с обычными связанными состояниями. Однако при больших α массы первых радиальных возбуждений ($n < \alpha$) становятся комплексными, т.е. соответствующие уровни перестают быть стабильными, причем как физические могут рассматриваться только состояния из сектора (+) с положительной мнимой частью,

$$\sqrt{S_n^\pm} = m \left\{ \sqrt{\frac{\alpha}{n} + 1} \pm i\sqrt{\frac{\alpha}{n} - 1} \right\}; \quad n < \alpha. \quad (22)$$

Как отмечалось в работах [6], размывание низколежащих уровней релятивистской системы в сильных полях, по-видимому, связано с открывающейся возможностью рождения пар из вакуума, при котором исследуемая задача уже не может рассматриваться как двухчастичная.

4. О БЛИЗОСТИ СПЕКТРОВ УРАВНЕНИЙ С ПРИЧИННЫМИ И ЗАПАЗДЫВАЮЩИМИ ПРОПАГАТОРАМИ И ИХ СВЯЗЬ С КУЛОНОВОЙ ЗАДАЧЕЙ

Спектральные свойства интегрального оператора в (8) можно изучить другим способом. Запишем уравнение для $\varphi(\mu)$ вместе с уравнением для $\varphi(1/\mu)$:

$$\begin{aligned} (\mu^2 - 2E\mu + 1) \frac{\varphi(\mu)}{\mu} &= -\frac{\alpha}{2\pi E} \int_{\gamma} d\nu \frac{\varphi(\nu)}{\nu} \ln \frac{\mu - \nu + i0}{\mu - 1/\nu + i0}; \\ (\mu^2 - 2E\mu + 1) \frac{\varphi(1/\mu)}{\mu} &= -\frac{\alpha}{2\pi E} \int_{\gamma} d\nu \frac{\varphi(\nu)}{\nu} \ln \frac{1/\mu - \nu + i0}{1/\mu - 1/\nu + i0} = \\ &= -\frac{\alpha}{2\pi E} \int_{\gamma} \frac{d\nu}{\nu} \varphi(\nu) \ln \nu^2 - \frac{\alpha}{2\pi E} \int_{\gamma} d\nu \frac{\varphi(1/\nu)}{\nu} \ln \frac{\mu - \nu - i0}{\mu - 1/\nu - i0}. \end{aligned} \quad (23)$$

Видно, что уравнение для $\varphi(1/\mu)$ оказывается неоднородным. Это не удивительно, потому что $\mu\varphi(1/\mu)$ не убывает на бесконечности, а стремится к константе

$$A = -\frac{\alpha}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu}{\nu} \varphi(\nu) \ln \nu^2.$$

Заметим, однако, что благодаря свойству (10) ядро линейного оператора, т.е. множество функций (принадлежащих выбранному классу, см. раздел 2), которое он переводит в ноль, составляют функции, симметричные при замене $\mu \leftrightarrow 1/\mu$. Поскольку спектральные свойства линейного оператора не зависят от элементов ядра [7] (появившаяся неоднородность принадлежит ядру), значение этой константы никак не сказывается на свойствах спектра физических связанных состояний.

Возвращаясь на действительную ось, произведем фурье-преобразования функций $\varphi(\mu)/\mu$ и $\varphi(1/\mu)/\mu$:

$$\frac{\varphi(\mu)}{\mu} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x) e^{i(\mu-E)x}, \quad \frac{\varphi(1/\mu)}{\mu} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \chi(x) e^{i(\mu-E)x},$$

где x — координата, сопряженная безразмерному импульсу p_+/m или p_-/m . Применяя к обоим уравнениям в (23) преобразование Фурье, получим

$$\begin{cases} \psi'' + (E^2 - 1)\psi = -\frac{\alpha\theta(x)}{Ex} \{\psi - \chi\}; \\ \chi'' + (E^2 - 1)\chi = -A\delta(x) - \frac{\alpha\theta(-x)}{Ex} \{\psi - \chi\}. \end{cases} \quad (24)$$

Хорошо видно, что система (24) разбивается на две области $x < 0$ и $x > 0$. Решая (24) в каждой области, получаем

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \begin{cases} C_1 \exp(-\sqrt{1-E^2}x) + B_1 R(x), & x > 0, \\ C_2 \exp(\sqrt{1-E^2}x), & x < 0; \end{cases} \\ \chi(x) &= \begin{cases} C_1 \exp(-\sqrt{1-E^2}x), & x > 0, \\ C_2 \exp(\sqrt{1-E^2}x) + B_2 R(-x), & x < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (25)$$

где $R(r)$ — решение кулоновой краевой задачи

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{d^2}{dr^2} + E^2 - 1 + \frac{\alpha/E}{r} \right\} R(r) &= 0, \\ R(r) &\rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad R(r) \in C^1(\mathbb{R}_+). \end{aligned} \quad (26)$$

Граничные условия на бесконечности следуют из леммы Римана [8]. Непрерывная дифференцируемость $R(r)$ вытекает из предположения существования вторых производных $\psi''(x)$ и $\chi''(x)$ в каждой точке (хотя бы односторонних). Это позволяет сформулировать граничные условия сшивки $\psi(x)$ и $\chi(x)$ в нуле:

$$\begin{cases} \psi(+0) = \psi(-0), \\ \psi'(+0) = \psi'(-0); \end{cases} \quad \begin{cases} \chi(+0) = \chi(-0), \\ \chi'(+0) - \chi'(-0) = -A. \end{cases} \quad (27)$$

Константа A , как и следовало ожидать, задает скачок производной $\chi'(x)$ в нуле. Решая граничные условия, получим

$$\begin{aligned} C_1 = C_2 = C, \quad B_1 R'(0) &= 2\sqrt{1 - E^2}C, \\ B_2 R'(0) &= B_1 \int_0^\infty dr R(r) \exp(-iEr). \end{aligned} \quad (28)$$

Хорошо видно, что решение определяется с точностью до одной константы, значение которой, как обычно, определяется из нормировки. Мы, таким образом, показали, что спектральная задача (8) сводится к кулоновой, спектр которой, конечно, совпадает со спектром, полученным методом контурного интегрирования. Но в отличие от метода контурного интегрирования мы можем утверждать, что нами найден весь спектр, т.к. известно, что регулярные в нуле и убывающие на бесконечности решения существуют только при кулоновом спектре.

Естественно, что весь полученный спектр отвечает стабильным состояниям, но не резонансам. Поскольку причинный пропагатор в координатном представлении при больших положительных временах переходит в запаздывающий, то можно высказать предположение, что уравнения с запаздывающими и причинными пропагаторами имеют одинаковые спектры, отвечающие стабильным состояниям. Что касается резонансов, то информация о них при больших положительных временах теряется и, конечно, в уравнении с запаздывающими пропагаторами содержаться не может.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные выше волновые функции (20) удовлетворяют, очевидно, предположениям, определяющим выбранный нами класс функций. Таким образом, исходная задача полностью исследована в определенном классе функций, выбранном в соответствии с аналитическими свойствами волновых функций нерелятивистской квантовой механики в импульсном пространстве.

В заключение обсудим произвол в определении волновых функций. Он существует уже в формуле (5). Соответствующий интеграл мы можем положить равным не $F(z)$, а $F(z) + \text{const}$, тогда в левой части (8) появится константа. Тем не менее и методика решения, и спектр благодаря свойству (10) останутся неизменными. Соответствующую $\text{const}/(\nu^2 - 2E\nu + 1)$ необходимо вписать под интеграл, прибавив к $\varphi(\nu)/\nu$. Интеграл же от этой добавки равен нулю из-за (10). В результате собственные функции (20) сдвинутся на эту же добавку, а спектр не изменится. В системе (24) также очень легко заметить произвол. Одновременное добавление и к $\psi(x)$, и к $\chi(x)$ функции $\text{const} \exp(-\sqrt{1 - E^2}|x|)$ никак не изменяет кулонову задачу (26). Изменяются лишь условия сшивки (27). Ситуация очень сильно напоминает калибровку. Приравняв интеграл в (5) $F(z)$, мы фактически зафиксировали калибровку, положив $\text{const} = 0$. Хорошо известно [9], что калибровка с точки зрения гамильтоновой механики означает

существование нефизической степени свободы. Поэтому мы полагаем, что константа не несет в себе никакой физической нагрузки, но указывает на то, что в уравнении Бете–Солпитера содержится нефизическая переменная.

Предположение о том, что в уравнении Бете–Солпитера содержится нефизическая переменная, послужило в свое время основанием для развития квазипотенциального подхода [2], получившего свое дальнейшее развитие в методе одновременной редукции [10]. В настоящей работе чисто математически показано наличие нефизической степени свободы в уравнении Бете–Солпитера, и тем самым подтверждается физическая обоснованность проведения одновременной редукции в квантовой теории поля.

Авторы выражают искреннюю благодарность Б.А. Арбузову, А.А. Архипову, Э.Э. Боосу, Р.Н. Фаустову, С.А. Шичанину за полезные обсуждения и интерес к работе.

Список литературы

- [1] Боос Э.Э., Саврин В.И., Шаблыгин Е.М. // ТМФ 1987. Т. 72. №3. С. 197–203.
- [2] Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. // Nuovo Cim. 1963. V. 29. P. 380–399; Logunov A.A., Tavkhelidze A.N., Todorov I.T., Khrustalev O.A. // Nuovo Cim. 1963. V. 30. P. 134–142.
- [3] Wick G.C. // Phys. Rev. 1954. №96. P. 1124–1134; Cutkosky R.E. // Phys. Rev. 1954. №96. P. 1135–1141.
- [4] Nakanishi N. // Prog. Theor. Phys. Suppl. 1988. №95. P. 1–23.
- [5] Nakanishi N. // Phys. Rev. B. 1965. V. 138. P. 1182–1192; V. 139. P. 1401–1406; Kyriakopoulos E. // Phys. Rev. 1968. №174. P. 1846–1859; Tanaka F., Nakanishi N. // Prog. Theor. Phys. 1975. №53. P. 797–802; Muller H.J.W. // Z. Phys. 1969. №227. P. 340–343.
- [6] Саврин В.И., Шаблыгин Е.М. Препринт НИИЯФ МГУ 88-41/62. М.: НИИЯФ МГУ, 1988; Боос Э.Э., Саврин В.И., Шичанин С.А. // ТМФ. 1988. Т. 77. №2. С. 247–252.
- [7] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
- [8] Зорич В.А. Математический анализ. Т. 2. М.: Наука, 1984.
- [9] Дирак Р.А.М. Лекции по квантовой механике. М.: Мир, 1968.
- [10] Архипов А.А., Саврин В.И. // ЭЧАЯ. 1985. Т. 16. Вып. 5. С. 1091–1125; Саврин В.И., Скачков Н.Б. Трехмерная ковариантная формулировка релятивистской теории связанных состояний. Квантовая теория поля и физика высоких энергий. (Тр. V Школы молодых ученых, Куйбышев, 1990). С. 147–188. М.: МГУ, 1990.

Научно-исследовательский институт
ядерной физики им. Д.В. Скобельцина
Московского государственного университета

Поступила в редакцию
5.V.1995 г.

V. I. Savrin, A. Yu. Troole

EXACT SOLUTION OF BETHE–SALPETER EQUATION WITH RETARDING PROPAGATORS IN WICK–CUTKOSKY MODEL

We investigate the discrete spectrum of the Bethe–Salpeter equation for the Wick–Cutkosky model. It is shown that in the case of retarding propagators the equation becomes separable, and in the S -wave case it is reduced to a one-dimensional equation. Using the method of contour integration, we obtain the exact solution of this equation and investigate the spectrum of relativistic bound states. We discuss the ambiguity of analytical expressions for the wave function, which originates from the occurrence of unphysical variable in the problem of four-dimensional description of relativistic systems.