Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Ц. Аджемян, С. В. Борисенок, М. Ю. Налимов, Расчет спектров развитой затухающей турбулентности в энергосодержащей и инерционной областях, *ТМФ*, 1996, том 106, номер 3, 416–424

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1126>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 17:08:53

Л. Ц. Аджемян, С. В. Борисенко, М. Ю. Налимов

РАСЧЕТ СПЕКТРОВ РАЗВИТОЙ ЗАТУХАЮЩЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ЭНЕРГОСОДЕРЖАЩЕЙ И ИНЕРЦИОННОЙ ОБЛАСТЯХ

Находится приближенное решение уравнения спектрального баланса энергии развитой затухающей однородной изотропной турбулентности, замкнутого в рамках статистической модели, основанной на принципе максимальной хаотичности с использованием ренормгруппы и ϵ -разложения. Рассчитаны спектры энергии и функции переноса в энергосодержащей и инерционной областях волновых чисел. Для константы Колмогорова получено значение $C_K = 1,55$. Вычисленный без подгоночных параметров продольный одномерный спектр энергии, нормированный в энергетических единицах фон Кармана–Ховарта, неплохо соответствует экспериментальным данным для затухающей турбулентности за решеткой.

1. ВВЕДЕНИЕ

Феноменологическая теория Колмогорова предсказывает универсальность спектров энергии $E(k)$ развитой турбулентности в инерционном интервале волновых чисел и диссипативной области. Это означает, что приведенные спектры $E(k)\bar{\epsilon}^{-2/3}k_d^{4/3}$ являются универсальной для всех турбулентных систем функцией безразмерного аргумента k/k_d , где $k_d \equiv (\bar{\epsilon}/\nu_0^3)^{1/4}$ – диссипативное волновое число, $\bar{\epsilon}$ – скорость диссипации энергии на единицу массы, ν_0 – кинематическая вязкость. Для широкого класса турбулентных систем экспериментальные данные подтверждают это заключение теории Колмогорова [1]. Что касается энергосодержащей области волновых чисел, то здесь приведенные спектры не ложатся при колмогоровском масштабировании на единую кривую, образуя широкий “веер” [1]. В этом отражается чувствительность длинноволновой части спектра к деталям накачки энергии в пульсационную составляющую, обусловленным граничными условиями и взаимодействием с усредненным течением. Однако для определенного класса течений можно рассчитывать на универсальное описание и в данной области спектра. Для этого должно выполняться условие локальной однородности, означающее малость интегрального масштаба турбулентности по сравнению с характерным расстоянием, на котором заметно меняются статистические характеристики пульсаций. Такое условие выполняется, в частности, для затухающей за решеткой турбулентности. Возможность универсального описания экспериментальных спектров в энергосодержащей области для подобных систем продемонстрирована в работе [2], где подробно обсуждаются различные варианты выбора приведенных переменных. Рассмотрение в [2] носит полуфеноменологический характер, задача нахождения явного вида универсального спектра в ней не ставится.

Решение последней задачи возможно только на основе какой-либо конструктивной статистической модели турбулентности. В работах [3, 4] была предложена такая модель, основанная на принципе максимальной хаотичности мгновенного поля пульсаций скорости. Анализ модели проведен с использованием ренормгруппы и ϵ -разложения. Построенная функция распределения включает в себя произвольную функцию $F(k)$, описывающую энергосодержащую часть спектра. Показано, что модель приводит к колмогоровскому спектру $k^{-11/3}$ в инерционном интервале и известным степенным законам затухания полной энергии и интегрального масштаба турбулентности. Для функции $F(k)$ в первом порядке ϵ -разложения получено замкнутое нелинейное интегродифференциальное уравнение.

Настоящая работа посвящена нахождению решения этого уравнения. Предварительно уравнение приведено к универсальному виду переходом к энергетическим единицам фон Кармана–Ховарта, согласующимся с полученными законами затухания и рассмотренными в [4] как один из возможных способов перехода к универсальному описанию. В результате определена функция распределения, позволяющая вычислять любые корреляционные функции в инфракрасной (ИК-) области спектра (инерционный интервал и энергосодержащая область). Результат вычисления спектра парной корреляционной функции хорошо согласуется с данными экспериментов.

По сравнению с [3, 4, 5], в данной работе используются более традиционные [1, 2] обозначения: $\bar{\epsilon}$ вместо W для скорости диссипации, $T(k)$ вместо $-H(k)$ для функции переноса, l вместо r_c для интегрального масштаба турбулентности в определении фон Кармана–Ховарта, а также введена функция $F(k) \equiv 1/f(k)$.

2. УРАВНЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОГО БАЛАНСА В ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ ФОН КАРМАНА–ХОВАРТА

Спектральный баланс энергии однородной затухающей турбулентности описывается уравнением

$$\partial_t E(k) = -2\nu k^2 E(k) + T(k), \quad (1)$$

где спектральное распределение энергии $E(k)$ и функция переноса $T(k)$ связаны соотношениями

$$E(k) = G_{ii}(k)/2, \quad (2)$$

$$T(k) = -ik_j (2\pi)^{-3} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) G_{ljl}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \quad (3)$$

с парным и тройным одновременными корреляторами скорости

$$\langle v_i(\mathbf{x}) v_j(\mathbf{x}_1) \rangle = (2\pi)^{-3} \int d\mathbf{k} G_{ij}(\mathbf{k}) \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)], \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \langle v_i(\mathbf{x}) v_j(\mathbf{x}_1) v_l(\mathbf{x}_2) \rangle &= (2\pi)^{-6} \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 G_{ijl}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \times \\ &\times \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \exp[i\mathbf{k}\mathbf{x} + i\mathbf{k}_1\mathbf{x}_1 + i\mathbf{k}_2\mathbf{x}_2], \end{aligned} \quad (5)$$

по повторяющемуся значку подразумевается суммирование. Уравнению (1) с учетом $\int d\mathbf{k} T(k) = 0$ отвечает интегральный баланс полной энергии $\mathcal{E} = (2\pi)^{-3} \int d\mathbf{k} E(k)$:

$$\partial_t \mathcal{E}(t) = -\bar{\epsilon}, \quad (6)$$

где $\bar{\varepsilon} = (2\pi)^{-3} \int d\mathbf{k} \cdot 2\nu k^2 E(k)$ – скорость диссипации энергии на единицу массы. В ИК-области волновых чисел $k \ll k_d \equiv (\bar{\varepsilon}/\nu^3)^{1/4}$ вязкостью в уравнении (1) можно пренебречь. Для парной и тройной корреляционных функций в этой области получены выражения [4]

$$G_{ij}(\mathbf{k}) = P_{ij}(\mathbf{k})(g_*/A)^{2/3}k^{-11/3}F(kl)/2, \quad (7)$$

$$G_{ijl}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = i(g_*^2/8A)(kk_1k_2)^{-11/3}P_{is}(\mathbf{k})P_{jt}(\mathbf{k}_1)P_{lp}(\mathbf{k}_2) \times \\ \times [k^3 F(k_1l)F(k_2l)(k_t\delta_{sp} + k_p\delta_{st}) + k_1^3 F(kl)F(k_2l) \times \\ \times (k_{1s}\delta_{tp} + k_{1p}\delta_{st}) + k_2^3 F(kl)F(k_1l)(k_{2s}\delta_{tp} + k_{2t}\delta_{sp})], \quad (8)$$

где $P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ – поперечный проектор, $g_*^2 = 20\pi^2$ – вычисленное в первом порядке ϵ -разложения значение инвариантного заряда в неподвижной точке ренормгруппы, функция $F(x)$ нормирована условием $F(\infty) = 1$. Для спектральной энергии $E(k)$ и функции переноса $T(k)$ из (2), (3), (7), (8) следуют выражения вида

$$E(k) = (g_*/A)^{2/3}k^{-11/3}F(kl)/2, \quad (9)$$

$$T(k) = A^{-1}k^{-3}\tau(kl). \quad (10)$$

Сильная разнесенность масштабов $k_d \gg l^{-1}$, характеризующая развитую турбулентность, обеспечивает существование инерционного интервала волновых чисел $l^{-1} \ll k \ll k_d$. В этом интервале для $E(k)$ из (9) следует колмогоровская асимптотика $E(k) \sim k^{-11/3}$. Функция же $T(k)$ обращается в этой области в нуль для любой $G_{ijl}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ в (3), удовлетворяющей колмогоровскому скейлингу и допускающей снятие инфракрасных и ультрафиолетовых обрезаний [6], в частности для G_{ijl} из (8). По отношению к $\tau(\chi)$ в (10) это означает, что $\tau(\infty) = 0$.

Функции (7)–(10) характеризуются автомодельной зависимостью от времени через корреляционный радиус $l(t)$ и амплитуду $A(t)$. Последние описываются степенными законами [4]

$$A(t) = a_A t^{11/5}, \quad l(t) = a_l t^{2/5}. \quad (11)$$

Интегрированием (9) находится соответствующий закон затухания полной энергии $\mathcal{E}(t)$, а из (6) – закон затухания скорости диссипации $\bar{\varepsilon}(t)$:

$$\mathcal{E}(t) = a_E t^{-6/5}, \quad \bar{\varepsilon}(t) = \frac{6}{5} a_E t^{-11/5}, \quad (12)$$

где

$$a_E = (2\pi)^{-2} (g_* a_l / a_A)^{2/3} I, \quad (13)$$

$$I = \int_0^\infty d\chi \cdot \chi^{-5/3} F(\chi). \quad (14)$$

Хотя выражения (9), (10) справедливы только в ИК-области $k \ll k_d$, верхний предел в (14) распространен до ∞ вследствие сходимости интеграла. То же самое можно сказать об интеграле по ИК-области от $T(k)$. В этом случае сходимость на верхнем пределе обеспечивается отмеченным выше обращением в нуль функции $\tau(\chi)$ в (10) при $\chi \rightarrow \infty$. Интеграл от производной $\partial_t E(k)$ также набирается (при $k_d l \gg 1$) в ИК-области, поэтому, учитывая (6), заключаем, что функция (10) удовлетворяет нормировочному условию $-(2\pi)^{-3} \int d\mathbf{k} T(k) = \bar{\varepsilon}$ или

$$-\frac{1}{2\pi^2 A} \int_0^\infty \frac{d\chi}{\chi} \tau(\chi) = \bar{\varepsilon}. \quad (15)$$

Все приведенные соотношения справедливы также для турбулентного потока за решеткой (вдоль оси Z), если в (1) заменить ∂_t на $V\partial_z$, а в (11), (12) — t на z (V — постоянная средняя скорость потока). Для этого необходимо условие локальной однородности, которое для степенных законов (11), (12) сводится к требованию $l \ll z$, выполняющемуся на достаточном удалении от решетки.

Подстановка (9), (10) в (1) с $\nu = 0$ приводит с учетом (11) к уравнению

$$\frac{1}{5}g_*^{2/3}a_A^{1/3}a_l^{2/3}\chi^{-2/3}(-\chi\partial_\chi + 11/3)F(\chi) = \tau(\chi), \quad \chi \equiv kl. \quad (16)$$

При определении закона эволюции (11) корреляционного радиуса в [4] не была зафиксирована его нормировка, т.е. имеется произвол в выборе амплитуды a_l . Этим произволом можно воспользоваться для исключения произведения $a_A^{1/3}a_l^{2/3}$ из (16), приняв, например, известное определение фон Кармана–Ховарта

$$l = u^3/\bar{\varepsilon}, \quad \mathcal{E} \equiv 3u^2/2. \quad (17)$$

Это определение не противоречит степенным законам (11), (12), а сравнение амплитуд дает соотношение $a_l = (5/6)(2/3)^{3/2}a_E^{1/2}$, подставляя в которое a_E из (13), находим

$$a_A^{1/3}a_l^{2/3} = \frac{5}{12\pi}(2/3)^{3/2}I^{1/2}g_*^{1/3}. \quad (18)$$

Подстановка (18) в (16) делает это уравнение универсальным по форме, т.е. одинаковым для всех турбулентных систем рассматриваемого типа и не зависящим от амплитуд a_l , a_E , характеризующих конкретное течение.

Зависимость правой части (16) от функции F определяется соотношениями (3), (8), (10). Для облегчения численного интегрирования в (3) мы несколько изменим форму подынтегрального выражения по сравнению с приведенной в [4], симметризуя его относительно перестановки $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$. Это дает

$$\begin{aligned} \tau(\chi) = & -\frac{1}{8}g_*^2(2\pi)^{-3} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) [k_1^2 - (\mathbf{k}_1 \mathbf{n})^2] \times \\ & \times k_1^{-17/3} k_2^{-17/3} \left\{ [1 - (\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2) - 2(\mathbf{n} \mathbf{k}_1)(\mathbf{n} \mathbf{k}_2)] F(k_1 \chi) F(k_2 \chi) - \right. \\ & \left. - [k_1^2(\mathbf{n} \mathbf{k}_2) + k_2^2] k_2^3 F(\chi) F(k_1 \chi) - [k_2^2(\mathbf{n} \mathbf{k}_1) + k_1^2] k_1^3 F(\chi) F(k_2 \chi) \right\}, \quad (19) \end{aligned}$$

где $\mathbf{n} \equiv \mathbf{k}/k$, $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ — безразмерные (в единицах k) переменные интегрирования. В области малых χ численное интегрирование в (19) осложняется особенностями подынтегрального выражения в точках $\mathbf{k}_1 = 0$ и $\mathbf{k}_2 = 0$. Выполнив интегрирование по $\mathbf{k}_2$ с помощью δ -функции, в оставшемся интеграле по $\mathbf{k}_1$, используя симметрию относительно перестановки $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$, можно ограничить область интегрирования полупространством $z \geq 1/2$ (с осью Z вдоль $\mathbf{n}$), умножив результат на 2. После этого в ней остается только особенность при $\mathbf{k}_1 = 0$, т.к. точка $\mathbf{k}_2 = -\mathbf{k}_1 - \mathbf{n} = 0$ теперь отсутствует. Интегрируя по углу φ сферической системы координат и переходя к переменной $t = \cos \theta$, после подстановки (18), (19) в (16) с учетом $g_*^2 = 20\pi^2$ получаем

$$\frac{4}{9}(2 \cdot I/15)^{1/2} \chi^{-2/3} [\chi \partial_\chi - 11/3] \cdot F(\chi) = I_1(\chi), \quad (20)$$

$$\begin{aligned} I_1(\chi) = & \left[\int_0^{1/2} dk \int_{-1}^1 dt + \int_{1/2}^\infty dk \int_{-1/2k}^1 dt \right] (1 - t^2) k^{-5/3} q^{-17/3} \times \\ & \times [(1 + 3kt + k^2 + 2k^2 t^2) F(\chi k) F(\chi q) - (1 + 2kt - k^3 t) q^3 F(\chi) F(\chi k) - \\ & - (kt + k^2 + 2k^2 t^2 + k^3 t) k^3 F(\chi) F(\chi q)], \quad q^2 \equiv 1 + 2kt + k^2. \quad (21) \end{aligned}$$

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ. СПЕКТРЫ ЭНЕРГИИ И ФУНКЦИИ ПЕРЕНОСА

Приближенное решение уравнения (20) искалось методом пробных функций. В пределе $\chi \rightarrow \infty$ эти функции должны быть нормированы условием $F(\infty) = 1$, при выполнении которого обе части (20) асимптотически обращаются в нуль. Для левой части это очевидно, а равенство $I_1(\chi = \infty) = 0$ в правой части – эквивалент обсуждавшегося выше условия $\tau(\infty) = 0$. В другом предельном случае $\chi \rightarrow 0$ функция $F(\chi)$ имеет асимптотику $F(\chi) \sim \chi^{11/3}$, обеспечивающую конечность $E(k)$ при $k = 0$ (см. (9)). Оба слагаемых в левой части (20) пропорциональны при этом χ^3 и сокращаются между собой, а правая часть, как нетрудно убедиться, пропорциональна $\chi^{13/3}$, т.е. имеет более высокий порядок малости.

При нахождении среднеквадратичного отклонения левой и правой частей (20), вычисленных с некоторой пробной функцией $F(x)$, естественно перейти к одномерным спектрам энергии $E_1(k) = 4\pi k^2 E(k)/(2\pi)^3$ и функции переноса $T_1(k) = 4\pi k^2 T(k)/(2\pi)^3$. Вводя константу Колмогорова C_K , запишем $E_1(k)$ в виде

$$E_1(k) = C_K \cdot \bar{\varepsilon}^{2/3} k^{-5/3} F(kl). \quad (22)$$

Интегрируя (22), получаем $\mathcal{E} = \int_0^\infty dk E_1(k) = C_K (\bar{\varepsilon}l)^{2/3} I$ с I из (14), что с учетом (17) дает

$$C_K = 3/2I. \quad (23)$$

Сравнение (22) с (9) определяет связь амплитуды $A(t)$ со скоростью диссипации:

$$\bar{\varepsilon}(t) = A^{-1}(t) g_* C_K^{-3/2} (2\pi)^{-3}. \quad (24)$$

Нормированный спектр $T_1(k)/\bar{\varepsilon}l \equiv \tilde{T}$ является согласно (10), (24) универсальной функцией от $\chi = kl$ (не зависит от l и A):

$$\tilde{T}(\chi) = 4\pi g_*^{-1} C_K^{3/2} \tau(\chi) / \chi. \quad (25)$$

Как следует из (15), он удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty d\chi \cdot \tilde{T}(\chi) = -1. \quad (26)$$

В качестве простейшей пробной функции была выбрана модель фон Кармана–Ховарта для спектра энергии

$$E_1(k) = \frac{C_K \cdot \bar{\varepsilon}^{2/3} k^2}{(k^2 + b^2 l^{-2})^{11/6}}, \quad (27)$$

в которую введен дополнительный параметр b (в модели фон Кармана $b = 1$). Спектру (27) отвечает функция $F(\chi)$ вида

$$F(\chi) = \frac{\chi^{11/3}}{(\chi^2 + b^2)^{11/6}}. \quad (28)$$

Она удовлетворяет указанным выше асимптотическим условиям; отметим также, что спектр аналитичен при малых k^2 . Параметр b был найден из условия минимизации среднеквадратичного отклонения левой и правой частей (20) в интервале $0 \leq \chi \leq 15$, правая

Рис. 1. График приближенного решения уравнения (20) с пробной функцией (28). Штриховая линия – приведенная функция переноса $T_1(k)/u^3$ – правая часть уравнения, сплошная линия – левая часть.

часть находилась численным интегрированием (21). При минимизации обе части (20) были предварительно умножены на χ^{-1} , что соответствует переходу к одномерным спектрам $E_1(k)$ и $T_1(k)$ в (1) (напомним, что при получении (20) уравнение (1) было умножено на k^3). Наилучшее согласие достигнуто при $b = 1,33$, результат иллюстрируется на рис. 1. Интеграл (14) в модели (28) легко вычисляется: $I = b^{-2/3} \sqrt{\pi} \cdot \Gamma(1/3)/4\Gamma(11/6)$, где $\Gamma(x)$ – гамма-функция. Для найденного значения b это приводит согласно (23) к $C_K = 1,44$.

Таким образом, уже простая однопараметрическая модель для $F(\chi)$ оказывается неплохим приближением к решению уравнения (20) и дает значение константы Колмогорова, хорошо соответствующее эксперименту [7] (предварительное рассмотрение этой модели проведено в [5]). Выбор более сложной модели осуществлялся исходя из желания улучшить выполнение уравнения (18) в области $\chi \gg 1$, а также добиться сближения значений амплитуд и положений минимумов (см. рис. 1). Для соблюдения первого из этих условий потребуем совпадения асимптотического поведения при $\chi \gg 1$ обеих частей (20). Асимптотика левой части определяется предельным значением $F(\infty) = 1$ функции $F(\chi)$ и имеет вид $B_1 \chi^{-2/3}$, где $B_1 \equiv -(44/27) \cdot (2 \cdot I/15)^{1/2} \chi^{-2/3}$. Асимптотика (20) вследствие равенства $I_1(\infty) = 0$ связана с поправкой к $F(\infty)$ при больших χ . Нетрудно убедиться, что она также будет иметь вид $I_1(\chi) \simeq -B_2 \chi^{-2/3}$ при $F(\chi) \simeq 1 - h \chi^{-2/3}$. Значение коэффициента B_2 находится линеаризацией (20) по h :

$$B_2 = h I_2,$$

$$I_2 = \left[\int_0^{1/2} dk \int_{-1}^1 dt + \int_{1/2}^{\infty} dk \int_{-1/2k}^1 dt \right] (1-t^2) k^{-5/3} q^{-17/3} \times$$

$$\times [(1 + 3kt + k^2 + 2k^2t^2)(k^{-2/3} + q^{-2/3}) - (1 + 2kt - k^3t)q^3(1 + k^{-2/3}) - (kt + k^2 + 2k^2t^2 + k^3t)k^3(1 + q^{-2/3})]. \quad (29)$$

Приравнивая B_1 и B_2 , получаем

$$h = (44/27 \cdot I_2)(2 \cdot I/15)^{1/2}. \quad (30)$$

Численное интегрирование (29) дало $I_2 \simeq 0,892$.

Рис. 2. Нормированные одномерные спектры энергии (вверху) и функции переноса (внизу), соответствующие моделям (31) (сплошная линия) и (27) (штриховая линия).

Требуемая асимптотика $F(\chi)$ достигалась введением в пробную функцию множителя $1/[1 + h(c^2 + \chi^2)^{-1/3}]$, не нарушающего аналитичности $E(k)$ при малых k^2 . Расчет показал, что этот множитель мало влияет на относительное положение минимумов кривых рис. 1. Эффективным способом добиться их сближения оказалась замена в (28) знаменателя $(\chi^2 + b^2)^{11/6}$ на $(\chi^4 + 2\chi^2 m^2 + b^4)^{11/12}$. Таким образом, в качестве пробной функции выбиралась

$$F(\chi) = \frac{\chi^{11/3}}{(\chi^4 + 2\chi^2 m^2 + b^4)^{11/12}} \cdot \frac{1}{[1 + h(c^2 + \chi^2)^{-1/3}]}. \quad (31)$$

Четыре параметра b, m, h, c в функции (31) связаны соотношением (30) (которое учитывалось итерационно), поэтому свободными фактически являются три параметра. Их

Рис. 3. Продольный нормированный спектр энергии в модели (31). Экспериментальные точки соответствуют данным работы [8], полученным на различных расстояниях от решетки. Штриховой линией показан наклон колмогоровского спектра.

оптимальные значения получены с помощью описанной выше схемы минимизации отклонений:

$$b = 1,482, \quad m = 0,582, \quad c = 1,791, \quad h = 0,656. \quad (32)$$

Вычисленное согласно (23), (14) значение константы Колмогорова для модели (31), (32) оказалось равным $C_K = 1,550$. Относительное среднеквадратичное отклонение обеих частей уравнения (20) составило 1,3%.

Формулами (7), (31), (32) представлен результат для спектра энергии. Соответствующий нормированный одномерный спектр приведен на рис. 2. Там же для сравнения показана кривая, соответствующая однопараметрической модели (27). Из рисунка видна устойчивость решения по отношению к введению в модель дополнительных параметров, что подтверждается также сравнением спектров функции переноса в обеих моделях, приведенных на том же рисунке.

Полученные предсказания для спектра энергии сравнивались с экспериментальными данными для продольных спектров $E_{||}(k)$ затухающей за решеткой турбулентности [8]. В случае однородной изотропной турбулентности $E_{||}(k)$ связаны с одномерными спектрами $E_1(k)$ соотношением [1]

$$E_{||}(k) = \int_k^\infty \frac{dk_1}{k_1} [1 - k^2/k_1^2] E_1(k_1). \quad (33)$$

Нормированный продольный спектр $E_{||}(k)/u^2 l \equiv \tilde{E}_{||}$ является согласно (22), (17) универсальной функцией χ :

$$\tilde{E}_{||}(k) = C_K \chi^{-5/3} \int_1^\infty dq \cdot q^{-8/3} (1 - q^{-2}) F(\chi q). \quad (34)$$

Спектры $\tilde{E}_{||}$, соответствующие измерениям [8] для различных расстояний от решетки, приведены в [2]. Они показаны на рис. 3, сплошная линия здесь – результат расчета по формуле (34) с функцией $F(\chi)$ из (31), (32). На рисунке оставлена часть экспериментальных спектров, отвечающая условию $k \ll k_d$. Первоначальный “веер” экспериментальных данных, соответствующих различным расстояниям до решетки [8], неплохо собирается в универсальную кривую после перехода к нормированному спектру $\tilde{E}_{||}$. Теоретическая кривая удачно описывает экспериментальные данные, причем согласие улучшается с ростом числа Рейнольдса (уменьшением расстояния до решетки). Экспериментальные точки в правой части графика не соответствуют наклону $5/3$, что связано, по-видимому, с выходом из ИК-области $k \ll k_d$. Напомним, что кривая на рис. 3 получена в теории, не содержащей подгоночных параметров, поскольку коэффициенты (32) в функции (31) найдены не путем сравнения с экспериментом, а из условия оптимизации приближенного решения уравнения (20).

Представляло бы несомненный интерес сравнить с экспериментальными данными также и нормированный спектр функции переноса $\tilde{H}(k)$ (нижняя часть рис. 2). Однако известные нам измерения этого спектра [1] не имеют, к сожалению, достаточной точности, допускающей количественное сопоставление с теорией.

Авторы благодарны М. Стеглику (Институт экспериментальной физики, Кошице, Словакия) за содействие в проведении компьютерных расчетов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 93-02-14515), а также Международного научного фонда (ISF) и Правительства Российской Федерации (грант R 63300).

Список литературы

- [1] Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Т. 2. М.: Наука, 1967.
- [2] George W.K. // Phys. Fluids. 1992. V. A4. № 7. P. 1492–1509.
- [3] Аджемьян Л.Ц., Налимов М.Ю. // ТМФ. 1992. Т. 91. № 2. С. 294–308.
- [4] Аджемьян Л.Ц., Налимов М.Ю. // ТМФ. 1993. Т. 96. № 1. С. 150–159.
- [5] Борисенко С.В. // Вестн. СПбГУ. 1994. Сер. 4. Вып. 2 (№ 11). С. 70–76.
- [6] Orszag S.A. // Fluid Dynamics / Eds. R. Balian and J.L. Peube. New York: Gordon and Breach, 1977. P. 235–374.
- [7] Яглом А.М. // Изв. АН СССР. Физ. атмосферы и океана. 1981. Т. 17. С. 1235–1241; Кузнецов В.Р., Прасковийский А.А., Сабельников В.А. // Изв. АН СССР. Сер. МЖГ. 1988. № 6. С. 51–58.
- [8] Comte-Bellot G., Corrsin S. // J. Fluids Mech. 1971. V. 48. P. 273–279.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступила в редакцию
15.VI.1995 г.

L. Ts. Adzhemyan, S. V. Borisenok, M. Yu. Nalimov

CALCULATION OF THE SPECTRA FOR DEVELOPED DECAYING TURBULENCE IN THE ENERGY-CONTAINING AND INERTIAL REGIONS

We construct an approximated solution to the equation of energy spectrum balance for developed decaying homogeneous isotropic turbulence. This equation is closed within the framework of statistical model based on the principle of maximal randomness with using renormalization group and ϵ -expansion. We calculate the energy spectra and transfer functions in the case where the wave numbers lie in the energy-containing and inertial regions. In this case, the Kolmogorov constant is equal to $C_K = 1,55$. It is shown that the one-dimensional longitudinal spectrum for the energy, calculated with no free fitting parameters and normalized in the von Karman–Hovart energy units, is in good agreement with experimental data for decaying turbulence.