Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Пелетминский, Ю. В. Слюсаренко, Метод собственных функций интеграла столкновений Больцмана в кинетической теории длинноволновых флуктуаций, *ТМФ*, 1996, том 106, номер 3, 469–488

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1130>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 18:31:12

С. В. Пелетминский, Ю. В. Слюсаренко

МЕТОД СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ИНТЕГРАЛА СТОЛКНОВЕНИЙ БОЛЬЦМАНА В КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДЛИННОВОЛНОВЫХ ФЛУКТУАЦИЙ

Линеаризованные общие уравнения кинетики длинных неравновесных флуктуаций решены (в методике, основанной на использовании собственных функций и собственных значений линеаризованного интеграла столкновений Больцмана) в асимптотической области $t \gg \tau_r$ (τ_r – время релаксации). Найден общий вид линеаризованных уравнений флуктуационной гидродинамики. Приведены эффективные начальные условия к уравнениям флуктуационной гидродинамики в том случае, когда в начальный момент времени флуктуации любого порядка отсутствуют. Найдена временная асимптотика одночастичной функции распределения на флуктуационно-гидродинамическом этапе эволюции, когда флуктуации гидродинамических величин играют существенную роль. Произведено сравнение с ранее полученными результатами теории “длинных гидродинамических хвостов”.

ВВЕДЕНИЕ

В связи с определяющей ролью гидродинамических длинноволновых флуктуаций в теории турбулентности [1–3], теории “длинных гидродинамических хвостов” [4–7], теории взаимодействующих мод [8, 9] неизбежно возникает вопрос о корректном выводе уравнений флуктуационной гидродинамики.

В теории турбулентности уравнения флуктуационной гидродинамики получают обычно в феноменологическом подходе, основанном на усреднении уравнений обычной гидродинамики по случайным начальным условиям либо по внешним случайным силам, действующим на систему (см., например, [10–12]).

Микроскопический подход к выводу уравнений гидродинамики длинноволновых флуктуаций использовался, в частности, в [7, 13–16], где эти уравнения получались в гиббсовском подходе.

Ясно, однако, что в случае газообразных сред флуктуационно-гидродинамическому этапу эволюции должен предшествовать флуктуационно-кинетический этап эволюции системы. Поэтому в данном случае уравнения гидродинамики длинноволновых флуктуаций должны получаться в результате решения в гидродинамическом приближении уравнений кинетики длинноволновых флуктуаций точно так же, как уравнения обычной гидродинамики получаются из обычных кинетических уравнений. В связи с этим в

первую очередь возникает задача последовательного вывода общих уравнений флуктуационной кинетики. Получению уравнений флуктуационной кинетики посвящено значительное число работ (см., например, [17–21]). В настоящей работе мы будем использовать уравнения кинетики длинноволновых флуктуаций, полученные нами в [21] в микроскопическом подходе, основанном на модификации известного метода сокращенного описания Боголюбова [22] применительно к флуктуирующим средам. С помощью этих уравнений мы изучим флуктуационно-гидродинамический этап эволюции системы и выведем линеаризованные около состояния равновесия уравнения флуктуационной гидродинамики.

Применение при решении уравнений кинетики длинноволновых флуктуаций методики, основанной на использовании собственных функций и собственных значений линеаризованного интеграла столкновений Больцмана, избавляет от необходимости в гипотезе о функциональной зависимости многочастичных функций распределения от флуктуационно-гидродинамических параметров (см. в этой связи [22]). Более того, в данном случае функциональная гипотеза может быть доказана параллельно с выводом линеаризованных общих уравнений флуктуационной гидродинамики, что является одной из главных задач настоящей работы.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Общие уравнения флуктуационной кинетики, полученные в [12, 21], имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) + \frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f(x, t) &= \exp \left(\mathcal{G} \left(\frac{\delta}{\delta f}; g \right) \right) L(x; f), \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{G}(u; g) + \int dx u(x) \frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \frac{\delta \mathcal{G}(u; g)}{\delta u(x)} &= \\ &= \left(\exp \left(\mathcal{G} \left(u + \frac{\delta}{\delta f}; g \right) - \mathcal{G}(u; g) \right) - \exp \left(\mathcal{G} \left(\frac{\delta}{\delta f}; g \right) \right) \right) \int dx u(x) L(x; f), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $f(x, t)$ — одночастичная функция распределения, $\mathcal{G}(u; g)$ — производящий функционал сглаженных (в смысле сглаживания мелкомасштабных флуктуаций, см. [21]) корреляционных функций $g_S(x_1, \dots, x_S)$ ($s \geq 2$ — номер корреляционной функции, $x_i \equiv (\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i)$ — координата фазовой точки i -й частицы):

$$\mathcal{G}(u; g) = \sum_{s=2}^{\infty} \frac{1}{s!} \int dx_1 \cdots \int dx_s u(x_1) \cdots u(x_s) g_S(x_1, \dots, x_s). \quad (1.2)$$

Величина $L(x; f)$ в уравнениях (1.1) представляет собой обобщенный интеграл столкновений кинетической теории Боголюбова [22]:

$$L(x; f) = \int dx' \{ V(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), f_2(x, x'; f) \}. \quad (1.3)$$

В газовом приближении функционал $L(x; f)$ квадратичен по $f(x)$ (интеграл столкновений Больцмана) и имеет вид

$$L(x; f) = \int dx' \int dx'' K(x; x', x'') f(x') f(x''), \quad (1.4)$$

где ядро $K(x; x', x'')$ определяется выражениями

$$K(x; x', x'') = \frac{1}{2} \frac{\delta^2 L(x; f)}{f(x')f(x'')} \Big|_{f=0} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'')K(\mathbf{p}; \mathbf{p}', \mathbf{p}''). \quad (1.5)$$

В [21] приведено явное выражение для $K(\mathbf{p}; \mathbf{p}', \mathbf{p}'')$ и доказана справедливость следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{p} \zeta_\alpha(\mathbf{p}) K(\mathbf{p}; \mathbf{p}', \mathbf{p}'') &= 0, \\ \int d\mathbf{p}' \int d\mathbf{p}'' K(\mathbf{p}; \mathbf{p}', \mathbf{p}'') \varphi(\zeta_\alpha(\mathbf{p}') + \zeta_\alpha(\mathbf{p}'')) &= 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

С учетом формул (1.4), (1.5) уравнения (1.1) приобретают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} G(u; g) + \int dx u(x) \frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \frac{\delta G(u; g)}{\delta u(x)} &= \\ = \int dx' \int dx'' u(x) K(x; x', x'') \left(\frac{\delta^2 G(u; g)}{\delta u(x') \delta u(x'')} + \frac{\delta G(u; g)}{\delta u(x')} \frac{\delta G(u; g)}{\delta u(x'')} \right), \end{aligned} \quad (1.7)$$

где

$$\begin{aligned} G(u; g) &= \int dx u(x) f(x) + \mathcal{G}(u; g) \equiv \\ &\equiv \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \int dx_1 \cdots \int dx_s u(x_1) \cdots u(x_s) g_S(x_1, \dots, x_s). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Гидродинамику длинноволновых флуктуаций будем строить исходя из уравнений (1.7) с учетом (1.8).

Уравнение (1.7) эквивалентно некоторой цепочке кинетических уравнений для сглаженных корреляционных функций $g_S(x_1, \dots, x_S)$.

Вблизи состояния статистического равновесия, описываемого равновесной функцией распределения Максвелла

$$f_0(x) = f_0(\mathbf{p}) = \exp(-Y_\alpha \zeta_\alpha(\mathbf{p})), \quad (1.9)$$

производящий функционал $G(u; g)$ может быть представлен в виде

$$G(u; g) = \int dx u(x) f_0(\mathbf{p}) + \tilde{G}(u; g) \quad (1.10)$$

($Y_0^{-1} = T$ – температура, $-Y_i Y_0^{-1} = u_i$ – средняя скорость, $-Y_4 Y_0^{-1} = \mu$ – химический потенциал). С учетом того факта, что в состоянии равновесия все сглаженные (длинноволновые) флуктуации отсутствуют, величина $\tilde{G}(u; g)$ представляет собой отклонение производящего функционала $G(u; g)$ от его равновесного значения $G_0(u; g) =$

$\int dx u(x) f_0(\mathbf{p})$. Под $g_1(x, t)$ в дальнейшем будем понимать отклонение одночастичной функции распределения $f_1(x, t)$ от равновесной функции $f_0(\mathbf{p})$:

$$g_1(x, t) = f_1(x, t) - f_0(\mathbf{p}) = \delta f(x, t). \quad (1.11)$$

Линеаризованное уравнение движения для производящего функционала $\tilde{G}(u; g)$ согласно (1.7), (1.8) имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{G}(u; g) + \Lambda \tilde{G}(u; g) + Q \tilde{G}(u; g) = K \tilde{G}(u; g), \quad (1.12)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda &= \int dx u(x) \frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \frac{\delta}{\delta u(x)}, \\ Q &= \int dx' \int dx'' \int dx u(x) K(x; x', x'') \left(f_0(\mathbf{p}'') \frac{\delta}{\delta u(x')} + f_0(\mathbf{p}') \frac{\delta}{\delta u(x'')} \right), \\ K &= \int dx' \int dx'' \int dx u(x) K(x; x', x'') \frac{\delta^2}{\delta u(x') \delta u(x'')}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Для получения уравнений флуктуационной гидродинамики воспользуемся методом [23], аналогичным методу Чепмена–Энскога вывода уравнений обычной гидродинамики исходя из кинетического уравнения Больцмана. Исследуем с этой целью некоторые свойства линеаризованного интеграла столкновений $\hat{L} \delta f(x)$, который в соответствии с (1.3), (1.4) может быть представлен в виде

$$\hat{L} \delta f(x) = \int dx' \delta f(x', t) Q(x', x), \quad (1.14)$$

где

$$Q(x', x) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') Q(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = 2\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \int d\mathbf{p}'' K(\mathbf{p}; \mathbf{p}', \mathbf{p}'') f_0(\mathbf{p}''). \quad (1.15)$$

Из определения больцмановского интеграла столкновений следует, что¹⁾

$$f_0(\mathbf{p}) Q(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = Q(\mathbf{p}', \mathbf{p}) f_0(\mathbf{p}'). \quad (1.16)$$

Полагая $\delta f(x, t) = f_0(\mathbf{p}) h(x, t)$, легко видеть, что функция $\hat{L} \delta f(x)$ может быть представлена в виде действия в импульсном пространстве линейного оператора $\hat{Q}$ на функцию $h(x, t)$:

$$\hat{L} \delta f(x) = f_0(\mathbf{p}) \int d\mathbf{p}' Q(\mathbf{p}, \mathbf{p}') h(\mathbf{x}, \mathbf{p}', t), \quad (1.17)$$

¹⁾ Это соотношение выражает принцип симметрии кинетических коэффициентов применительно к кинетическому уравнению Больцмана [24].

где ядро $Q(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ этого оператора дается формулой (1.15). Приведем свойства линейного оператора $\hat{Q}$ ввиду его важной роли при построении флуктуационной гидродинамики. Используя (1.15), легко показать, что в скалярном произведении

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int d\mathbf{p} f_0(\mathbf{p}) \varphi_1(\mathbf{p}) \varphi_2(\mathbf{p}) \quad (1.18)$$

оператор $\hat{Q}$ эрмитов: $(\varphi_1, \hat{Q}\varphi_2) = (\hat{Q}\varphi_1, \varphi_2)$, и имеет, следовательно, полный набор собственных функций²⁾

$$\hat{Q}\chi_a = -\lambda_a \chi_a, \lambda_a \geq 0, \quad (1.19)$$

соответствующих неположительным собственным значениям λ_a . Будем считать, что первые пять собственных функций $\chi_a(\mathbf{p})$, $(a = 0, 1, 2, 3, 4)$ этого оператора имеют нулевые собственные значения (ядро оператора $\hat{Q}$) в соответствии с наличием пяти интегралов движения $\zeta_\alpha(\mathbf{p})$ (энергия, импульс и масса частицы), обращающих в нуль интеграл столкновений. Во введенном скалярном произведении (1.18) набор собственных функций можно выбрать ортонормированным:

$$(\chi_a, \chi_b) = \delta_{ab}, \quad (1.20)$$

где δ_{ab} – символ Кронекера, $a = (\alpha, r)$, $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4$; $r \geq 5$. По полному набору собственных функций $\chi_a(\mathbf{p})$ можно разложить любую функцию $\varphi(\mathbf{p})$:

$$\varphi(\mathbf{p}) = \sum_a \varphi_a \chi_a(\mathbf{p}), \varphi_a = (\chi_a, \varphi). \quad (1.21)$$

Из формул (1.20), (1.21) следует условие полноты функций $\chi_a(\mathbf{p})$:

$$\sum_a \chi_a(\mathbf{p}) \chi_a(\mathbf{p}') f_0(\mathbf{p}') = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (1.22)$$

Вернемся теперь к уравнению (1.12). Воспользовавшись разложением функционального аргумента $u(x)$ производящего функционала $\tilde{G}(u; g)$ по полному набору собственных функций $\chi_a(\mathbf{p})$:

$$u(x) = \sum_a u_a(\mathbf{x}) \chi_a(\mathbf{p}), \quad (1.23)$$

выражение для $\tilde{G}(u; g)$ в соответствии с (1.21), (1.22) можно представить в виде

$$\tilde{G}(u; g) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \int d\mathbf{x}_1 \cdots \int d\mathbf{x}_S u_{a_1}(\mathbf{x}_1) \cdots u_{a_S}(\mathbf{x}_S) g_S(a_1 \mathbf{x}_1, \dots, a_S \mathbf{x}_S) \equiv \tilde{G}(u_a(\mathbf{x})), \quad (1.24)$$

²⁾Заметим, что в работе [25] было показано, что весь спектр собственных значений линеаризованного оператора столкновений с потенциалом взаимодействия r^{-n} ($n > 2$) или с потенциалом типа жестких сфер является дискретным.

так что $\tilde{G}(u_a(\mathbf{x}))$ представляет собой производящий функционал корреляционных функций:

$$g_S(a_1 \mathbf{x}_1, \dots, a_S \mathbf{x}_S) \equiv \int d\mathbf{p}_1 \dots \int d\mathbf{p}_S \chi_{a_1}(\mathbf{p}_1) \dots \chi_{a_S}(\mathbf{p}_S) g_S(x_1, \dots, x_S). \quad (1.25)$$

Легко видеть, что

$$\frac{\delta}{\delta u_a(\mathbf{x})} = \int d\mathbf{p} \chi_a(\mathbf{p}) \frac{\delta}{\delta u(\mathbf{x})}, \quad \frac{\delta}{\delta u(x)} = f_0(\mathbf{p}) \sum_a \chi_a(\mathbf{p}) \frac{\delta}{\delta u_a(\mathbf{x})}. \quad (1.26)$$

Поэтому выражения (1.13) для функциональных операторов Λ , Q , K могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \Lambda &= \sum_{a,b} \left(\chi_b, \frac{\mathbf{p}}{m} \chi_a \right) \int d\mathbf{x} u_b(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \frac{\delta}{\delta u_a(\mathbf{x})}, \\ Q &= \sum_a \lambda_a \int d\mathbf{x} u_a(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta u_a(\mathbf{x})}, \\ K &= \sum_{a,a',a''} \int d\mathbf{x} u_a(\mathbf{x}) K_{a;a',a''} \frac{\delta^2}{\delta u_{a'}(\mathbf{x}) \delta u_{a''}(\mathbf{x})}, \end{aligned} \quad (1.27)$$

где

$$K_{a;a',a''} = \int d\mathbf{p}' \int d\mathbf{p}'' \int d\mathbf{p} \chi_a(\mathbf{p}) K(\mathbf{p}; \mathbf{p}', \mathbf{p}'') f_0(\mathbf{p}') f_0(\mathbf{p}'') \chi_{a'}(\mathbf{p}') \chi_{a''}(\mathbf{p}''). \quad (1.28)$$

Уравнение (1.12) эквивалентно следующему интегральному уравнению:

$$\tilde{G}(t) = \exp(-Qt) \tilde{G}(0) - \int_0^t \exp(-Q\tau) (\Lambda - K) \tilde{G}(t - \tau) d\tau. \quad (1.29)$$

2. ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ ЭТАП ЭВОЛЮЦИИ

Будем рассматривать времена, значительно большие времени релаксации системы, определяемого спектром собственных значений λ_r оператора $\hat{Q}$:

$$\tilde{G}(t) \xrightarrow{t \gg \tau_r} G_\infty(t), \quad \tau_r = \max\{\lambda_r^{-1}\}. \quad (2.1)$$

Представим асимптотический функционал $G_\infty(t)$ в виде

$$\begin{aligned} G_\infty(t) &= \mathcal{G}(t) + G(t), \\ \mathcal{G}(t) &= \mathcal{P} G_\infty(t), \quad G(t) = (1 - \mathcal{P}) G_\infty(t). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь $\mathcal{P}$ – оператор проектирования на ядро оператора $\hat{Q}$, действие которого на произвольный функционал $G(u_a)$ определяется соотношением

$$\mathcal{P} G(u_a) = G(u_a)|_{u_r=0}. \quad (2.3)$$

Таким образом, производящий функционал $\mathcal{G}(t)$ в качестве функциональных аргументов $u_a(\mathbf{x})$ содержит только функции $u_\alpha(\mathbf{x})$ (напомним, что индекс α нумерует собственные функции оператора $\hat{Q}$ с нулевыми собственными значениями).

В соответствии с (1.12), (2.2) функционал $\mathcal{G}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{G} + \mathcal{P}\Lambda(\mathcal{G} + G) + \mathcal{P}Q(\mathcal{G} + G) = \mathcal{P}K(\mathcal{G} + G). \quad (2.4)$$

Учитывая, далее, что согласно (1.27)

$$\mathcal{P}Q = 0, \quad \mathcal{P}K = 0, \quad Q\mathcal{P} = 0,$$

придем к следующему уравнению для $\mathcal{G}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{G} + \mathcal{P}\Lambda\mathcal{G} + \mathcal{P}\Lambda G = 0. \quad (2.5)$$

Входящий в это уравнение функционал $G(t)$ согласно (1.29) определяется из интегрального уравнения

$$G(t) = \int_0^\infty d\tau (1 - \mathcal{P}) \exp(-Q\tau)(K - \Lambda)(G(t - \tau) + \mathcal{G}(t - \tau)). \quad (2.6)$$

При получении последнего уравнения мы воспользовались соотношением:

$$(1 - \mathcal{P}) \exp(-Qt)G(0) \xrightarrow{t \gg \tau_r} 0,$$

а также тем, что в уравнении (1.29) подынтегральное выражение содержит быстро убывающую при $t \gg \tau_r$ экспоненту, вследствие чего интегрирование по τ может быть распространено до ∞ . Последнее утверждение следует из того, что действие оператора $\exp(-Q\tau)$ на произвольный функционал $G(u_a)$ согласно (1.27) определяется формулой:

$$\exp(-Q\tau)G(u_a) = G(\exp(-\lambda_a\tau)u_a). \quad (2.7)$$

На гидродинамическом этапе эволюции системы ($t \gg \tau_r$) характерные размеры пространственных неоднородностей (по всем пространственным координатам корреляционных функций) велики по сравнению с длиной свободного пробега частиц, что позволяет развить теорию возмущений по всем пространственным градиентам параметров сокращенного описания. Параметрами сокращенного описания на флуктуационно-гидродинамическом этапе эволюции являются корреляционные функции гидродинамических величин

$$\xi_{\alpha_1 \dots \alpha_S}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S; t) = \int d\mathbf{p}_1 \dots \int d\mathbf{p}_S \zeta_{\alpha_1}(\mathbf{p}_1) \dots \zeta_{\alpha_S}(\mathbf{p}_S) g_S(x_1, \dots, x_S; t), \quad (2.8)$$

которые и определяют производящий функционал $\mathcal{G}$ (этот функционал мы будем называть гидродинамическим функционалом). Действительно, функции $\chi_\alpha(\mathbf{p})$ и $\zeta_\alpha(\mathbf{p})$ связаны между собой соотношением

$$A_{\alpha\beta}\chi_\beta(\mathbf{p}) = \zeta_\alpha(\mathbf{p}). \quad (2.9)$$

Откуда, согласно (1.20)

$$A_{\alpha\beta}A_{\gamma\beta} = (\zeta_\alpha, \zeta_\gamma) = -\frac{\partial\zeta_\alpha}{\partial Y_\gamma},$$

где $\zeta_\alpha = \int d\mathbf{p} \zeta_\alpha(\mathbf{p})f_0(\mathbf{p})$. Матрица $\partial\zeta_\alpha/\partial Y_\beta$ является симметричной и положительно определенной. Считая матрицу A также симметричной, имеем

$$A^2 = -\frac{\partial\zeta}{\partial Y}. \quad (2.10)$$

Выбирая в функционале $\mathcal{G}$ в качестве функционального аргумента вместо функций $u_\alpha(\mathbf{x})$ функции

$$v_\alpha(\mathbf{x}) = A_{\alpha\beta}^{-1}u_\beta(\mathbf{x}), \quad (2.11)$$

имеем согласно (1.24), (2.8)

$$\mathcal{G}(u_\alpha; t) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \int d\mathbf{x}_1 \cdots \int d\mathbf{x}_S v_{\alpha_1}(\mathbf{x}_1) \cdots v_{\alpha_S}(\mathbf{x}_S) \xi_{\alpha_1 \dots \alpha_S}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S; t) \equiv \mathcal{G}(v_\alpha; t), \quad (2.12)$$

что и доказывает наше утверждение (по повторяющимся индексам $\alpha_1, \dots, \alpha_S$ предполагается суммирование).

При решении уравнения (2.6) мы воспользуемся методом теории возмущений, предполагая пространственные градиенты параметров сокращенного описания малыми. Это соответствует развитию формальной итерационной процедуры по оператору Λ (см. (1.27)). Чтобы получить замкнутое уравнение движения для гидродинамического производящего функционала $\mathcal{G}(t)$ с точностью до членов, квадратичных по Λ , функционал $G(t)$ должен быть найден с точностью до членов первого порядка по Λ :

$$G(t) = G_0(t) + G_1(t) + \dots, \quad (2.13)$$

где $G_n \sim \Lambda^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Уравнение для определения $G_0(t)$ в соответствии с (2.6) имеет вид

$$G_0(t) = \mathcal{K}(G_0(t) + \mathcal{G}(t)), \quad (2.14)$$

где $\mathcal{K} = \phi_0 K$ и

$$\phi_z = \int_0^\infty d\tau (1 - \mathcal{P}) \exp(-Q\tau) \exp(-z\tau), \quad \phi_0 = \phi_z|_{z \rightarrow +0}, \quad (2.15)$$

откуда

$$G_0 = (1 - \mathcal{K})^{-1} \mathcal{K} \mathcal{G} \quad (2.16)$$

(мы учли при этом, что согласно (2.5) $\frac{\partial}{\partial t}G_0 \sim \Lambda$, $\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{G} \sim \Lambda$).

Аналогичным образом, развивая итерационную процедуру для уравнения (2.6) (с использованием уравнения (2.5)), легко показать, что и функционалы $G_1(t), G_2(t), \dots$ (см. (2.13)) зависят от времени только через посредство производящего функционала $\mathcal{G}(t)$. Это положение и доказывает гипотезу о функциональной зависимости многочастичных функций распределения при $t \gg \tau_r$ от флуктуационно-гидродинамических параметров.

Замечая, далее, что $G_0 + \mathcal{G} = (1 - \mathcal{K})^{-1}\mathcal{G}$, мы придем согласно (2.5) к уравнению движения для производящего функционала $\mathcal{G}(t)$ с точностью до членов первого порядка по Λ :

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{G}(t) = -\mathcal{P}\Lambda(1 - \mathcal{K})^{-1}\mathcal{G}(t) + \dots \quad (2.17)$$

Это уравнение содержит в себе цепочку уравнений флуктуационной гидродинамики в пренебрежении диссипативными процессами.

Найдем теперь $G_1(t)$. Согласно (2.6) имеем

$$\begin{aligned} G_1(t) = & - \int_0^\infty d\tau (1 - \mathcal{P}) \exp(-Q\tau) \Lambda(G_0 + \mathcal{G}) + \\ & + \int_0^\infty d\tau (1 - \mathcal{P}) \exp(-Q\tau) K \left(G_1 - \tau \left(\frac{\partial}{\partial t} G_0 \right)_1 - \tau \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{G} \right)_1 \right), \end{aligned} \quad (2.18)$$

где $(\frac{\partial}{\partial t}G_0)_1$, $(\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{G})_1$ — величины $\frac{\partial}{\partial t}G_0$, $\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{G}$, вычисленные в первом приближении по Λ . Учитывая (2.16), (2.17), имеем

$$(1 - \mathcal{K})G_1 = - \left(\phi_0 + \phi'_0 K (1 - \mathcal{K})^{-1} \mathcal{P} \right) \Lambda (1 - \mathcal{K})^{-1} \mathcal{G}, \quad \phi'_0 = \frac{\partial \phi_z}{\partial z} \Big|_{z=0}.$$

Поэтому, замечая, что

$$\phi'_0 K = -\phi_0^2 K = -\phi_0 \mathcal{K},$$

получим

$$G_1 = -(1 - \mathcal{K})^{-1} \phi_0 (1 - (1 - \mathcal{K})^{-1} \mathcal{P}) \Lambda (1 - \mathcal{K})^{-1} \mathcal{G}, \quad (2.19)$$

и, следовательно, согласно (2.5) уравнение движения для $\mathcal{G}$ с учетом членов второго порядка по Λ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{G} + \mathcal{P}\Lambda(1 - \mathcal{K})^{-1} (1 - \phi_0 (1 - (1 - \mathcal{K})^{-1} \mathcal{P}) \Lambda (1 - \mathcal{K})^{-1}) \mathcal{G} = 0. \quad (2.20)$$

Таким образом, нами получено уравнение движения для гидродинамического производящего функционала с учетом диссипативных процессов, которое содержит в себе в соответствии с (2.12) всю цепочку уравнений диссипативной флуктуационной гидродинамики.

3. УРАВНЕНИЯ ФЛУКТУАЦИОННОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Проанализируем теперь полученное уравнение (2.20). Так как функциональные операторы, входящие в (2.20), действуя на полином s -й степени от функциональных аргументов $u_{\alpha_1}(\mathbf{x}_1), \dots, u_{\alpha_S}(\mathbf{x}_S)$, не повышают степени этого полинома, то уравнение (2.20)

допускает решения, в которых производящий функционал $\mathcal{G}$ не содержит корреляционных гидродинамических функций порядка выше чем s (s фиксировано).

При $s = 1$ решение уравнения (2.20) следует искать в виде

$$\mathcal{G} = \int d\mathbf{x} v_\alpha(\mathbf{x}) \zeta_\alpha(\mathbf{x}; t), \quad (3.1)$$

где в соответствии с (2.8) $\zeta_\alpha(\mathbf{x}; t) = \int d\mathbf{p} \delta f(x, t) \zeta_\alpha(\mathbf{p})$ — отклонение плотностей гидродинамических параметров от их равновесных значений. С учетом (3.1), (1.28), (2.15) уравнение (2.20) приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{G} + \mathcal{P} \Lambda \mathcal{G} - \mathcal{P} \Lambda \phi_0 \Lambda \mathcal{G} = 0. \quad (3.2)$$

Легко показать, что это уравнение соответствует уравнениям обычной гидродинамики вязкой жидкости. В самом деле, как следует из (1.27), (3.1), слагаемое $\mathcal{P} \Lambda \mathcal{G}$ в (3.2) может быть записано в форме

$$\mathcal{P} \Lambda \mathcal{G} = \frac{\partial \zeta_{\alpha k}}{\partial \zeta_\beta} \int d\mathbf{x} v_\alpha(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta v_\beta(\mathbf{x})}, \quad (3.3)$$

где

$$\zeta_{\alpha k} = \int d\mathbf{p} f_0(\mathbf{p}) \frac{p_k}{m} \zeta_\alpha(\mathbf{p}) \quad (3.4)$$

— плотности потоков гидродинамических величин. Мы учли при этом, что

$$\frac{\delta \mathcal{G}}{\delta u_\alpha(\mathbf{x})} = \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta v_\beta(\mathbf{x})} A_{\beta\alpha}^{-1}$$

и

$$\left(\zeta_\beta, \frac{p_k}{m} \zeta_\gamma \right) A_{\gamma\alpha}^{-2} = \frac{\partial \zeta_{\beta k}}{\partial Y_\gamma} \frac{\partial Y_\gamma}{\partial \zeta_\alpha} = \frac{\partial \zeta_{\beta k}}{\partial \zeta_\alpha}.$$

Преобразуем теперь квадратичные по Λ слагаемые в (3.2). Учитывая (2.7) и используя явный вид операторов Λ , ϕ_0 (см. (1.27), (2.15)), имеем

$$\phi_0 \Lambda \mathcal{G} = \sum_r \lambda_r^{-1} \left(\chi_r, \frac{p_i}{m} \chi_\beta \right) \int d\mathbf{x} u_r(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta u_\beta(\mathbf{x})}.$$

Воспользовавшись далее формулами (1.27), (2.3), (2.10), (2.11), квадратичное по Λ слагаемое в (3.2) можно привести к виду

$$-\mathcal{P} \Lambda \phi_0 \Lambda \mathcal{G} = \eta_{\alpha\beta;ij} \int d\mathbf{x} v_\alpha(\mathbf{x}) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta v_\beta(\mathbf{x})}, \quad (3.5)$$

где

$$\eta_{\alpha\beta;ij} = \sum_r \left(\zeta_\alpha, \frac{p_i}{m} \chi_r \right) \lambda_r^{-1} \left(\chi_r, \frac{p_j}{m} \zeta_\beta \right) \frac{\partial Y_\gamma}{\partial \zeta_\beta}. \quad (3.6)$$

Подставляя (3.3), (3.5) в (3.2), имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{G} + \frac{\partial \zeta_{\alpha i}}{\partial \zeta_{\beta}} \int d\mathbf{x} v_{\alpha}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta v_{\beta}(\mathbf{x})} + \eta_{\alpha\beta;ij} \int d\mathbf{x} v_{\alpha}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta v_{\beta}(\mathbf{x})} = 0. \quad (3.7)$$

Вспоминая, что $\mathcal{G}(t)$ определяется формулой (3.1), легко видеть, что это уравнение тождественно обычным линеаризованным уравнениям гидродинамики вязкой жидкости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \zeta_{\alpha}(\mathbf{x}, t) + \hat{T}_{\alpha\beta} \zeta_{\beta}(\mathbf{x}, t) &= 0, \\ \hat{T}_{\alpha\beta} &= \frac{\partial \zeta_{\alpha i}}{\partial \zeta_{\beta}} \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta_{\alpha\beta;ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \equiv T_{\alpha\beta} \left(i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Мы видим, что тензор $\eta_{\alpha\beta;ij}$ представляет собой тензор кинетических коэффициентов вязкой жидкости. (Заметим, что формулы (3.3), (3.5) справедливы для произвольного функционала $\mathcal{G}$.)

Найдем теперь уравнения флуктуационной гидродинамики с учетом только парных флуктуаций, т.е. при $s = 2$. В этом случае гидродинамический производящий функционал $\mathcal{G}(t)$ дается выражением

$$\mathcal{G}(t) = \int d\mathbf{x} v_{\alpha}(\mathbf{x}) \zeta_{\alpha}(\mathbf{x}; t) + \frac{1}{2} \int d\mathbf{x}_1 \int d\mathbf{x}_2 v_{\alpha_1}(\mathbf{x}_1) v_{\alpha_2}(\mathbf{x}_2) \xi_{\alpha_1 \alpha_2}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t). \quad (3.9)$$

Поэтому в уравнении (2.20) можно заменить $(1 - \mathcal{K})^{-1}$ на $1 + \mathcal{K}$. В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{G} + \mathcal{P} \Lambda (1 - \phi_0 \Lambda) \mathcal{G} + \mathcal{P} \Lambda \mathcal{K} \mathcal{G} - \mathcal{P} \Lambda (\mathcal{K} \phi_0 \Lambda + \phi_0 (\Lambda \mathcal{K} - \mathcal{K} \mathcal{P} \Lambda)) \mathcal{G} = 0. \quad (3.10)$$

Второе слагаемое в этом уравнении нами уже вычислено (см. (3.3), (3.5)). Рассмотрим теперь слагаемое $\mathcal{P} \Lambda \mathcal{K} \mathcal{G}$. Согласно (2.15) величина $\mathcal{K} \mathcal{G}$ может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} \mathcal{G} &= \int_0^{\infty} d\tau (1 - \mathcal{P}) \exp(-Q\tau) \sum_a \int d\mathbf{x} u_a(\mathbf{x}) K_{a; \alpha_1 \alpha_2} \frac{\delta^2 \mathcal{G}}{\delta u_{\alpha_1}(\mathbf{x}) \delta u_{\alpha_2}(\mathbf{x})} = \\ &= \sum_r \lambda_r^{-1} K_{r; \alpha_1 \alpha_2} \int d\mathbf{x} u_r(\mathbf{x}) \frac{\delta^2 \mathcal{G}}{\delta u_{\alpha_1}(\mathbf{x}) \delta u_{\alpha_2}(\mathbf{x})}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где $K_{r; \alpha_1 \alpha_2}$ определяется формулой (1.28). Действуя на это выражение оператором $\mathcal{P} \Lambda$, с учетом (3.9), (1.27), (2.7) получим

$$\mathcal{P} \Lambda \mathcal{K} \mathcal{G} = \sum_r \left(\chi_{\alpha}, \frac{p_i}{m} \chi_r \right) \lambda_r^{-1} K_{r; \alpha_1 \alpha_2} \int d\mathbf{x} u_{\alpha}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\delta^2 \mathcal{G}}{\delta u_{\alpha_1}(\mathbf{x}) \delta u_{\alpha_2}(\mathbf{x})}, \quad (3.12)$$

где (см. (1.28))

$$\begin{aligned} K_{r; \alpha_1 \alpha_2} &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{p}' \int d\mathbf{p}'' \int d\mathbf{p} \chi_r(\mathbf{p}) K(\mathbf{p}; \mathbf{p}', \mathbf{p}'') f_0(\mathbf{p}') f_0(\mathbf{p}'') \times \\ &\times (\chi_{\alpha_1}(\mathbf{p}') \chi_{\alpha_2}(\mathbf{p}'') + \chi_{\alpha_1}(\mathbf{p}'') \chi_{\alpha_2}(\mathbf{p}')). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Так как

$$\chi_{\alpha_1}(\mathbf{p}')\chi_{\alpha_2}(\mathbf{p}'') + \chi_{\alpha_1}(\mathbf{p}'')\chi_{\alpha_2}(\mathbf{p}') = (\chi_{\alpha_1}(\mathbf{p}') + \chi_{\alpha_1}(\mathbf{p}''))(\chi_{\alpha_2}(\mathbf{p}') + \chi_{\alpha_2}(\mathbf{p}'')) - \\ - \chi_{\alpha_1}(\mathbf{p}')\chi_{\alpha_2}(\mathbf{p}') - \chi_{\alpha_1}(\mathbf{p}'')\chi_{\alpha_2}(\mathbf{p}''),$$

то согласно (1.5) выражение в круглых скобках в (3.13) можно заменить на $-\chi_{\alpha_1}(\mathbf{p}') \times \chi_{\alpha_2}(\mathbf{p}') - \chi_{\alpha_1}(\mathbf{p}'')\chi_{\alpha_2}(\mathbf{p}'')$. В результате согласно (1.15) получим

$$K_{r;\alpha_1\alpha_2} = -\frac{1}{2} \left(\chi_r, \hat{Q} \chi_{\alpha_1} \chi_{\alpha_2} \right),$$

или, учитывая эрмитовость оператора $\hat{Q}$,

$$K_{r;\alpha_1\alpha_2} = \frac{1}{2} \lambda_r (\chi_r, \chi_{\alpha_1} \chi_{\alpha_2}). \quad (3.14)$$

Подставляя это выражение в (3.12) и используя условие полноты (1.22), найдем

$$\mathcal{P} \Lambda \mathcal{K} \mathcal{G} = \frac{1}{2} \left(\left(\chi_\alpha, \frac{p_i}{m} \chi_{\alpha_1} \chi_{\alpha_2} \right) - \left(\chi_\alpha, \frac{p_i}{m} \chi_\beta \right) (\chi_\beta, \chi_{\alpha_1} \chi_{\alpha_2}) \right) \times \\ \times \int d\mathbf{x} u_\alpha(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\delta^2 \mathcal{G}}{\delta u_{\alpha_1}(\mathbf{x}) \delta u_{\alpha_2}(\mathbf{x})}. \quad (3.15)$$

Используя соотношения

$$\left(\chi_\alpha, \frac{p_i}{m} \chi_{\alpha_1} \chi_{\alpha_2} \right) = A_{\alpha\beta}^{-1} A_{\alpha_1\beta_1}^{-1} A_{\alpha_2\beta_2}^{-1} \frac{\partial^2 \zeta_{\beta i}}{\partial Y_{\beta_1} \partial Y_{\beta_2}}, \\ (\chi_\beta, \chi_{\alpha_1} \chi_{\alpha_2}) = A_{\beta\gamma}^{-1} A_{\alpha_1\gamma_1}^{-1} A_{\alpha_2\gamma_2}^{-1} \frac{\partial^2 \zeta_\gamma}{\partial Y_{\gamma_1} \partial Y_{\gamma_2}}, \quad (3.16)$$

следующие из (2.9), (3.4), (1.9), и учитывая (2.10), (2.11), имеем

$$\mathcal{P} \Lambda \mathcal{K} \mathcal{G} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \zeta_{\alpha i}}{\partial \zeta_{\alpha_1} \partial \zeta_{\alpha_2}} \int d\mathbf{x} v_\alpha(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\delta^2 \mathcal{G}}{\delta v_{\alpha_1}(\mathbf{x}) \delta v_{\alpha_2}(\mathbf{x})}. \quad (3.17)$$

При этом мы использовали формулу

$$\frac{\partial Y_{\beta_1}}{\partial \zeta_{\alpha_1}} \frac{\partial Y_{\beta_2}}{\partial \zeta_{\alpha_2}} \frac{\partial^2 \zeta_\gamma}{\partial Y_{\beta_1} \partial Y_{\beta_2}} = - \frac{\partial^2 Y_\beta}{\partial \zeta_{\alpha_1} \partial \zeta_{\alpha_2}} \frac{\partial \zeta_\gamma}{\partial Y_\beta}.$$

Поступая так же, как и при выводе формул (3.3), (3.5), (3.17), оставшиеся слагаемые в уравнении (3.10) можно преобразовать к виду

$$-\mathcal{P} \Lambda (\mathcal{K} \phi_0 \Lambda + \phi_0 (\Lambda \mathcal{K} - \mathcal{K} \mathcal{P} \Lambda)) \mathcal{G} = \frac{1}{2} \frac{\partial \eta_{\alpha\alpha_1;ij}}{\partial \zeta_{\alpha_2}} \int d\mathbf{x} v_\alpha(\mathbf{x}) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\delta^2 \mathcal{G}}{\delta v_{\alpha_1}(\mathbf{x}) \delta v_{\alpha_2}(\mathbf{x})}. \quad (3.18)$$

Подробный вывод этого выражения приводить не будем из-за громоздких выкладок. Отметим лишь, что в ходе вычислений необходимо воспользоваться формулой

$$K_{r,r'\alpha} = \left(\chi_{r'}, \frac{\partial \hat{Q}}{\partial Y_\alpha} \chi_r \right),$$

которую можно получить исходя из определений (1.3), (1.16) величин $K(\mathbf{p}; \mathbf{p}', \mathbf{p}'')$, $Q(\mathbf{p}', \mathbf{p}'')$. (Заметим, что формулы (3.17), (3.18) справедливы для произвольного функционала $\mathcal{G}$.)

Используя (3.17), (3.18), можно получить уравнение для производящего функционала $\mathcal{G}(t)$ при учете только парных корреляций:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{G}(t) + \frac{\partial \zeta_{\alpha i}}{\partial \zeta_\beta} \int d\mathbf{x} v_\alpha(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta v_\beta(\mathbf{x})} + \eta_{\alpha\beta;ij} \int d\mathbf{x} v_\alpha(\mathbf{x}) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta v_\beta(\mathbf{x})} + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \zeta_{\alpha i}}{\partial \zeta_{\alpha_1} \partial \zeta_{\alpha_2}} \int d\mathbf{x} v_\alpha(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\delta^2 \mathcal{G}}{\delta v_{\alpha_1}(\mathbf{x}) \delta v_{\alpha_2}(\mathbf{x})} + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial \eta_{\alpha\alpha_1;ij}}{\partial \zeta_{\alpha_2}} \int d\mathbf{x} v_\alpha(\mathbf{x}) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\delta^2 \mathcal{G}}{\delta v_{\alpha_1}(\mathbf{x}) \delta v_{\alpha_2}(\mathbf{x})} = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Отсюда немедленно следуют (см. (3.9)) уравнения для гидродинамических параметров $\zeta_\alpha(\mathbf{x}, t)$ и их флуктуаций $\xi_{\alpha_1\alpha_2}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \zeta_\alpha(\mathbf{x}, t) + \hat{T}_{\alpha\beta} \zeta_\beta(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{2} \frac{\partial \hat{T}_{\alpha\beta}}{\partial \zeta_\gamma} \xi_{\beta\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; t), \\ \frac{\partial}{\partial t} \xi_{\alpha_1\alpha_2}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) + \hat{T}_{\alpha_1\beta}(\mathbf{x}_1) \xi_{\beta\alpha_2}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) + \hat{T}_{\alpha_2\beta}(\mathbf{x}_2) \xi_{\alpha_1\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) = 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Получим теперь уравнения, описывающие эволюцию длинноволновых флуктуаций в общем случае. Влияние диссипативных процессов на гидродинамику длинноволновых флуктуаций учитывать пока не будем. Уравнение движения (2.17) для гидродинамического функционала $\mathcal{G}(t)$ (см. (2.12)) запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{G} = -\mathcal{P} \Lambda \underline{\mathcal{G}}, \quad \underline{\mathcal{G}} \equiv (1 - \mathcal{K})^{-1} \mathcal{G}. \quad (3.21)$$

Функциональный оператор $\mathcal{K}$ согласно (1.27), (2.15) определяется взаимодействием между частицами. Нами было показано, что величина $\mathcal{P} \Lambda \mathcal{K} \mathcal{G}$ (см. (3.17)) не зависит от взаимодействия между частицами. Аналогичным образом можно показать, что функционал $\mathcal{P} \Lambda \mathcal{K}^2 \mathcal{G}$ также не зависит от взаимодействия между частицами. По этой причине можно надеяться, что аналогичная ситуация имеет место и в общем случае. Чтобы показать это, найдем неформальное решение уравнения

$$(1 - \mathcal{K}) \underline{\mathcal{G}} = \mathcal{G}. \quad (3.22)$$

С этой целью рассмотрим трилинейный функционал $K(u; v, w)$, определяемый формулой

$$K(u; v, w) = \int d\mathbf{p} \int d\mathbf{p}' \int d\mathbf{p}'' u(\mathbf{p}) K(\mathbf{p}; \mathbf{p}', \mathbf{p}'') v(\mathbf{p}') w(\mathbf{p}''), \quad (3.23)$$

где ядро $K(\mathbf{p}; \mathbf{p}', \mathbf{p}'')$ дается выражением (1.3) (см. также [21]). Ясно, что (см. (1.28))

$$K(\chi_a; f_0 \chi_b, f_0 \chi_c) = K_{a;bc}.$$

Введенный таким образом функционал $K(u; v, w)$ в соответствии с (1.8), (1.16) обладает свойствами

$$K(\chi_\alpha; v, w) = 0, \quad K(u; f_0, f_0) = 0, \quad K(u; f_0 v, f_0) = \frac{1}{2} (u, \widehat{Q}v). \quad (3.24)$$

Используя (1.22), (2.9), легко убедиться также в справедливости следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \sum_r \int d\mathbf{p} K(u; f_0 \chi_r, w) \chi_r(\mathbf{p}) g(\mathbf{p}) &= K(u; g, w) - K\left(u; \frac{\partial f_0}{\partial \zeta_\alpha}, w\right) \int d\mathbf{p} \zeta_\alpha(\mathbf{p}) g(\mathbf{p}); \\ K_{a;b\gamma} &= A_{\gamma\delta} K\left(\chi_a; f_0 \chi_b, \frac{\partial f_0}{\partial \zeta_\delta}\right); \quad K_{a;\alpha\beta} = A_{\alpha\delta} A_{\beta\lambda} K\left(\chi_a; \frac{\partial f_0}{\partial \zeta_\delta}, \frac{\partial f_0}{\partial \zeta_\lambda}\right); \\ K\left(u; \frac{\partial f_0}{\partial \zeta_\alpha} \frac{\partial f_0}{\partial \zeta_\beta}\right) &= \frac{1}{2} \sum_a \lambda_a u_a \left(\chi_a, \frac{\partial^2 f_0}{\partial \zeta_\alpha \partial \zeta_\beta} \frac{1}{f_0}\right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Функциональный оператор K , определяемый выражением (1.27), может быть представлен в виде

$$K = K_- + K_0 + K_+, \quad (3.26)$$

где операторы K_- , K_0 , K_+ в соответствии с (3.23)–(3.25) даются формулами

$$\begin{aligned} K_- &= \sum_{rr'} \int d\mathbf{x} K(u(\mathbf{x}); f_0 \chi_r, f_0 \chi_{r'}) \frac{\delta^2}{\delta u_r(\mathbf{x}) \delta u_{r'}(\mathbf{x})}, \\ K_0 &= 2 \sum_r \int d\mathbf{x} K\left(u(\mathbf{x}); f_0 \chi_r, \frac{\partial f_0}{\partial \zeta_\beta}\right) \frac{\delta}{\delta v_\beta(\mathbf{x})} \frac{\delta}{\delta u_r(\mathbf{x})}, \\ K_+ &= \int d\mathbf{x} K\left(u(\mathbf{x}); \frac{\partial f_0}{\partial \zeta_\alpha}, \frac{\partial f_0}{\partial \zeta_\beta}\right) \frac{\delta^2}{\delta v_\alpha(\mathbf{x}) \delta v_\beta(\mathbf{x})} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_r \lambda_r \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{p} u_r(\mathbf{x}) \chi_r(\mathbf{p}) \frac{\partial^2 f_0}{\partial \zeta_\alpha \partial \zeta_\beta} \frac{\delta^2}{\delta v_\alpha(\mathbf{x}) \delta v_\beta(\mathbf{x})}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Из определений (3.27) видно, что функциональный оператор K_0 , действуя на произвольный полином $u_r(\mathbf{x})$ (см. (1.23)), не меняет его степени, в то время как операторы K_- , K_+ , действуя на произвольный полином $u_r(\mathbf{x})$, соответственно понижают или повышают степень этого полинома.

В соответствии с (3.26), (3.27) функциональный оператор $\mathcal{K}$, определяемый выражениями (2.14), (2.15) и входящий в уравнение (3.22), может быть представлен в аналогичном виде:

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_- + \mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_+, \quad (3.28)$$

где

$$\mathcal{K}_0 = \int_0^\infty d\tau (1 - \mathcal{P}) \exp(-Q\tau) K_0, \quad \mathcal{K}_\pm = \int_0^\infty d\tau (1 - \mathcal{P}) \exp(-Q\tau) K_\pm. \quad (3.29)$$

Перейдем теперь непосредственно к решению уравнения (3.22). Искомый функционал $\underline{G}$ представим в виде ряда:

$$\underline{G} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n, \quad G_n \sim (u_r)^n. \quad (3.30)$$

Подставляя это разложение в уравнение (3.22) и используя (3.28), получим

$$G_n - \mathcal{K}_- G_{n+1} - \mathcal{K}_0 G_n - \mathcal{K}_+ G_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \\ G_0 = \mathcal{G}. \quad (3.31)$$

Для решения этого уравнения функционал G_n удобно представить в виде

$$G_n = \int dx_1 \cdots \int dx_n u(x_1) \dots u(x_n) G_n(x_1, \dots, x_n; v), \quad (3.32)$$

где величина $G_n(x_1, \dots, x_n; v)$ зависит только от функционального аргумента $v_\alpha(\mathbf{x})$ и не зависит от $u_r(\mathbf{x})$ (см. (1.23), (2.11)). Изучение действия функциональных операторов $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}^2$, $\mathcal{K}^3$ с учетом формул (3.24), (3.25) (см. также (2.14), (2.15), (3.28), (3.29)) на произвольный функционал, зависящий только от $v_\alpha(\mathbf{x})$, позволяет предположить, что решение уравнения (3.31) имеет вид

$$G_n = \sum_{s=2n}^{\infty} G_{n,s}; \quad G_{n,s} = \int dx_1 \cdots \int dx_n u(x_1) \dots u(x_n) G_{n,s}(x_1, \dots, x_n; v), \quad (3.33)$$

где величина $G_{n,s}(x_1, \dots, x_n; v)$ дается выражением

$$G_{n,s}(x_1, \dots, x_n; v) = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{l_1 + \dots + l_n = s \\ l_i \geq 2}} \frac{1}{l_1! \dots l_n!} f_{\alpha_1 \dots \alpha_{l_1}}(\mathbf{p}_1) \dots f_{\gamma_1 \dots \gamma_{l_n}}(\mathbf{p}_n) \times \\ \times \mathcal{G}_{\alpha_1 \dots \alpha_{l_1}; \dots; \gamma_1 \dots \gamma_{l_n}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; v). \quad (3.34)$$

В (3.34) введены следующие обозначения:

$$f_{\alpha_1 \dots \alpha_l}(\mathbf{p}) \equiv \frac{\partial^l f_0(\mathbf{p})}{\partial \zeta_{\alpha_1} \dots \partial \zeta_{\alpha_l}}; \quad (3.35)$$

$$\mathcal{G}_{\alpha_1 \dots \alpha_{l_1}; \dots; \gamma_1 \dots \gamma_{l_n}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; v) \equiv \frac{\delta^{l_1 + \dots + l_n} \mathcal{G}}{\delta v_{\alpha_1}(\mathbf{x}_1) \dots \delta v_{\alpha_{l_1}}(\mathbf{x}_1) \dots \delta v_{\gamma_1}(\mathbf{x}_n) \dots \delta v_{\gamma_{l_n}}(\mathbf{x}_n)}.$$

(В функционале $G_{n,s}$ функции $u(x) = \sum_a u_a(\mathbf{x})\chi_a(\mathbf{p})$ можно, очевидно, заменить на $\sum_r u_r(\mathbf{x})\chi_r(\mathbf{p})$, так как $\int d\mathbf{p} \chi_\alpha(\mathbf{p}) f_{\alpha_1 \dots \alpha_l}(\mathbf{p}) = 0$ при $l \geq 2$.) Для доказательства сделанного предположения достаточно убедиться в том, что функционалы $G_{n,s}$ удовлетворяют уравнениям (см. (3.31))

$$-\mathcal{K}_0 G_{n,s-1} + G_{n,s} - \mathcal{K}_- G_{n+1,s} - \mathcal{K}_+ G_{n-1,s-2} = 0.$$

Используя свойства (3.25), (3.14) величин K , после простых, но громоздких выкладок можно убедиться в справедливости сделанного утверждения непосредственной подстановкой (3.33) в (3.31).

Используя, далее, формулы (3.31), (1.26), (3.34), (3.35), легко прийти к следующему представлению для функционала G_n (см. (3.33)):

$$G_n = \frac{1}{n!} \sum_{r_1 \dots r_n} \int dx_1 \dots \int dx_n u_{r_1}(\mathbf{x}_1) \dots u_{r_n}(\mathbf{x}_n) \times \\ \times \chi_{r_1}(\mathbf{p}_1) \dots \chi_{r_n}(\mathbf{p}_n) \hat{f}(x_1) \dots \hat{f}(x_n) \mathcal{G}(v), \quad (3.36)$$

в связи с чем выражение для функционала $\underline{G}$, являющегося решением уравнения (3.22), может быть записано в виде

$$\underline{G} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n = \left(\exp \left(\int dx \sum_r u_r(\mathbf{x}) \chi_r(\mathbf{p}) \hat{f}(x) \right) \right) \mathcal{G}(v), \quad (3.37)$$

где оператор $\hat{f}(x)$ определяется формулой

$$\hat{f}(x) = f_0 \left(\mathbf{p}; \zeta + \frac{\delta}{\delta v(\mathbf{x})} \right). \quad (3.38)$$

Для нахождения корреляционных функций $g_S(x_1, \dots, x_S)$ на гидродинамическом этапе эволюции заметим, что согласно (1.26), (2.10), (2.9)

$$\frac{\delta}{\delta u(\mathbf{x})} = \frac{\partial f_0(\mathbf{p})}{\partial \zeta_\alpha} \frac{\delta}{\delta v_\alpha(\mathbf{x})} + f_0(\mathbf{p}) \sum_r \chi_r(\mathbf{p}) \frac{\delta}{\delta u_r(\mathbf{x})}.$$

Кроме того, согласно (1.22), (2.9), (2.10)

$$\sum_r \chi_r(\mathbf{p}) \chi_r(\mathbf{p}') f_0(\mathbf{p}') = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') - \zeta_\alpha(\mathbf{p}) \frac{\partial f_0(\mathbf{p}')}{\partial \zeta_\alpha}.$$

Поэтому (см. (3.37))

$$g_S(x_1, \dots, x_S) \equiv \frac{\delta^S \underline{G}}{\delta u(x_1) \dots \delta u(x_S)} \Big|_{u=0} = \prod_{i=1}^S \left(\hat{f}(x_i) - f_0(\mathbf{p}_i) \right) \mathcal{G}(v) \Big|_{v=0}.$$

Так как для произвольного функционала $Q(\zeta(\mathbf{x}))$

$$Q\left(\zeta + \frac{\delta}{\delta v}\right) \mathcal{G}(v)|_{v=0} = \mathcal{G}\left(\frac{\delta}{\delta \zeta}\right) Q(\zeta),$$

то, как легко показать, для отклонений δf_S сглаженных многочастичных функций распределения от их равновесных значений $f_0(\mathbf{p}_1) \dots f_0(\mathbf{p}_S)$ имеет место формула

$$\delta f_S(x_1, \dots, x_S) = \mathcal{G}\left(\frac{\delta}{\delta \zeta}\right) \prod_{i=1}^S f_0(x_i),$$

где после выполнения функционального дифференцирования локально-равновесное распределение Максвелла $f_0(x) = \exp(-\zeta_\alpha(\mathbf{p})Y_\alpha(\mathbf{x}))$ следует отождествить с равновесным распределением $f_0(\mathbf{p})$.

Учитывая явное выражение для функционального оператора Λ (см. (1.27)), а также формулы (2.9), (2.10), (3.4), имеем

$$\mathcal{P} \Lambda \underline{G} = \int d\mathbf{x} v_\alpha(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \exp\left(\frac{\delta}{\delta \zeta_\beta} \frac{\delta}{\delta v_\beta(\mathbf{x})}\right) \zeta_{\alpha i} \mathcal{G}(t; v),$$

вследствие чего уравнение движения (2.17) для гидродинамического производящего функционала $\mathcal{G}(t; v)$ без учета диссипативных процессов может быть записано в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{G}(t; v) + \int d\mathbf{x} v_\alpha(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \exp\left(\frac{\delta}{\delta \zeta_\beta} \frac{\delta}{\delta v_\beta(\mathbf{x})}\right) \zeta_{\alpha i} \mathcal{G}(t; v) = 0. \quad (3.39)$$

Изучение влияния диссипативных процессов на гидродинамику длинноволновых флуктуаций с учетом корреляторов более высокого порядка чем второй показывает, что уравнение движения для функционала $\mathcal{G}(t)$ в этом случае может быть записано в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{G}(t; v) + \int d\mathbf{x} v_\alpha(\mathbf{x}) \exp\left(\int d\mathbf{x}' \frac{\delta}{\delta \zeta_\beta(\mathbf{x}')} \frac{\delta}{\delta v_\beta(\mathbf{x}')}\right) T_\alpha(\mathbf{x}; \zeta(\mathbf{x}'))|_{\zeta(\mathbf{x})=\zeta} \mathcal{G}(t; v) = 0, \quad (3.40)$$

где

$$T_\alpha(\mathbf{x}; \zeta(\mathbf{x}')) \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\zeta_{\alpha i}(\zeta(\mathbf{x})) + \eta_{\alpha\beta;ij}(\zeta(\mathbf{x})) \frac{\partial \zeta_\beta(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right), \quad (3.41)$$

причем величины $\zeta_{\alpha i}(\zeta)$, $\eta_{\alpha\beta;ij}(\zeta)$ по-прежнему определяются выражениями (3.4), (3.6), в которых, однако, равновесное распределение Максвелла $f_0(\mathbf{p})$ (1.9) заменено локально-равновесным распределением:

$$f_0(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \exp(-Y_\alpha(\mathbf{x})\zeta_\alpha(\mathbf{p})).$$

Дальнейшее решение задачи об эволюции гидродинамических флуктуаций состоит в определении начальных условий $\xi_{\alpha_1 \dots \alpha_S}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S; 0)$ к уравнениям гидродинамики длинноволновых флуктуаций (3.40), если известно истинное начальное состояние системы. Исходя из общих положений статистической механики можно показать (см. [21]),

что если даже в начальный момент времени точные корреляционные функции равны нулю, с течением времени всегда разовьется такое состояние, в котором будут присутствовать длинные корреляции. Поэтому наиболее интересным представляется следующее начальное состояние системы при $t = 0$:

$$\delta f(\mathbf{p}; 0) = f_0(\mathbf{p})a(\mathbf{p}), \quad g_S = 0, \quad s \geq 2,$$

где $f_0(\mathbf{p})$ – равновесное распределение Максвелла (см. (1.9)), а $a(\mathbf{p})$ – произвольная функция импульса $\mathbf{p}$. Ясно, что в данном случае может идти речь только об эффективных начальных условиях для уравнений (3.40), так как последние справедливы только в области $t \gg \tau_r$. Основываясь на законах сохранения для цепочки уравнений ББГКИ, в [21] мы показали, что эти эффективные начальные условия имеют вид

$$\xi_{\alpha_1 \dots \alpha_S}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S; 0) = (-1)^s \frac{\partial \zeta_{\alpha_1}}{\partial Y_{\beta_1}} \dots \frac{\partial \zeta_{\alpha_S}}{\partial Y_{\beta_S}} \frac{\partial^s a}{\partial \zeta_{\beta_1} \dots \partial \zeta_{\beta_S}} \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \dots \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_S), \quad (3.42)$$

где

$$a \equiv \int d\mathbf{p} f_0(\mathbf{p})a(\mathbf{p}).$$

Используя решения линеаризованных уравнений флуктуационной гидродинамики (3.40) и начальные условия (3.42), нетрудно убедиться в том, что при учете только парных корреляций величина $\delta f(\mathbf{p}, t; a)$ в пространственно-однородном случае в области больших t определяется формулой [21]

$$\begin{aligned} \delta f(\mathbf{p}, t; a) \approx & -\frac{\partial f_0(\mathbf{p})}{\partial \zeta_\alpha} \frac{\partial a}{\partial Y_\alpha} + \frac{1}{2(2\pi)^{-3}} \frac{\partial^2 f_0(\mathbf{p})}{\partial \zeta_{\alpha_1} \partial \zeta_{\alpha_2}} \times \\ & \times \int d\mathbf{k} \left(e^{tT(\mathbf{k})} \frac{\partial \zeta}{\partial Y} \frac{\partial \zeta}{\partial Y} \frac{\partial^2 a}{\partial \zeta \partial \zeta} e^{t\tilde{T}(-\mathbf{k})} \right)_{\alpha_1 \alpha_2}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

где матрица $T_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$ представляет собой фурье-образ матрицы $\hat{T}_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ (см. (3.8)):

$$T_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = -ik_i \frac{\partial \zeta_{\alpha i}}{\partial \zeta_\beta} + k_i k_j \eta_{\alpha\beta; ij},$$

а величина $\tilde{T}(-\mathbf{k})$ – матрица, транспонированная по отношению к $T_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$.

Из формулы (3.43) следует, что гидродинамическая корреляционная функция

$$C_{ab} \equiv \int dx \langle a(x, t)b(0, 0) \rangle \equiv \int d\mathbf{p} \delta f(\mathbf{p}, t; a) \left(b(\mathbf{p}) - \frac{\partial b}{\partial \zeta_\alpha} \zeta_\alpha(\mathbf{p}) \right)$$

в области больших времен может быть представлена в виде

$$C_{ab} \approx \frac{1}{2(2\pi)^3} \frac{\partial^2 b}{\partial \zeta_{\alpha_1} \partial \zeta_{\alpha_2}} \int d\mathbf{k} \left(e^{tT(\mathbf{k})} \frac{\partial \zeta}{\partial Y} \frac{\partial \zeta}{\partial Y} \frac{\partial^2 a}{\partial \zeta \partial \zeta} e^{t\tilde{T}(-\mathbf{k})} \right)_{\alpha_1 \alpha_2}.$$

Исходя из этой формулы можно получить асимптотические выражения для корреляционных функций плотностей потоков аддитивных интегралов движения [4, 5, 7]. Например, корреляционная функция $C_\nu(t) = C_{t_{12}t_{12}}(t)$ потоков импульсов t_{ik} в области больших t дается выражением:

$$C_\nu(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{15Y_0^2} \left(\frac{7}{(8\pi\nu)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(8\pi\Gamma_S)^{\frac{3}{2}}} \right) t^{-\frac{3}{2}},$$

где Γ_S – коэффициент затухания звука, ν – кинематическая вязкость. Отметим, что корреляционная функция $C_\nu(t)$ определяет коэффициент кинематической вязкости ν [26]

$$\nu = \frac{Y_0}{\varrho} \int_0^\infty d\tau C_\nu(\tau).$$

В заключение отметим, что общие нелинейные уравнения гидродинамики длинноволновых флуктуаций исходя из общих уравнений флуктуационной кинетики (1.1) получены нами в [21] методом, аналогичным методу Чепмена–Энскога. Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \zeta_\alpha(\mathbf{x}) &= -\exp\left(\mathcal{G}\left(\frac{\delta}{\delta\zeta}; \xi\right)\right) T_\alpha(\mathbf{x}; \zeta(\mathbf{x}')), \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{G}(v; \xi) &= -\left(\exp\left(\mathcal{G}\left(v + \frac{\delta}{\delta\zeta}; \xi\right) - \mathcal{G}(v; \xi)\right) - \exp\mathcal{G}\left(\frac{\delta}{\delta\zeta}; \xi\right)\right) \times \\ &\quad \times \int d\mathbf{x} v_\alpha(\mathbf{x}) T_\alpha(\mathbf{x}; \zeta(\mathbf{x}')), \end{aligned} \quad (3.44)$$

где

$$\mathcal{G}(u_\alpha; t) = \sum_{s=2}^{\infty} \frac{1}{s!} \int d\mathbf{x}_1 \cdots \int d\mathbf{x}_S v_{\alpha_1}(\mathbf{x}_1) \cdots v_{\alpha_S}(\mathbf{x}_S) \xi_{\alpha_1 \dots \alpha_S}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S; t)$$

– производящий функционал собственно корреляционных функций $\xi_{\alpha_1 \dots \alpha_S}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S; t)$; $s \geq 2$, а величина $T_\alpha(\mathbf{x}; \zeta(\mathbf{x}))$ по-прежнему дается выражением (3.41). Легко убедиться в том, что уравнения (3.44), будучи линеаризованными, объединяются в одно уравнение, полностью тождественное (3.40).

Заметим, наконец, что уравнения флуктуационной гидродинамики, полученные в [12] в феноменологическом подходе, основанном на усреднении уравнений обычной гидродинамики по случайным начальным условиям, тождественны уравнениям (3.44).

Список литературы

- [1] Мочин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. М.: Наука, 1965 (Ч.1); 1967 (Ч.2).
- [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
- [3] Климонтович Ю. Л. Турбулентное движение и структура хаоса. М.: Наука, 1990.
- [4] Alder B. I., Wainwright T. E. // Phys. Rev. 1970. V. A1. P. 18.
- [5] Dorfman J. R., Cohen E. G. D. // Phys. Rev. 1972. V. A6. P. 776.

- [6] *Зубарев Д. Н., Хазанов А. М.* // ТМФ. 1978. Т. 3. №1. С. 69.
- [7] *Пелетминский С. В., Плохов С. С., Приходько В. И.* // ТМФ. 1981. Т. 46. №2. С. 263.
- [8] *Ernst M. H., Dorfman J. R.* // J. Stat. Phys. 1975. V. 12. №4. P. 311.
- [9] *Пелетминский С. В., Соколовский А. И.* // УФЖ. 1992. Т. 37. №11. С. 1702.
- [10] *Новиков Е. А.* // ЖЭТФ. 1964. Т. 47. С. 1919.
- [11] *Моисеев С. С., Тур А. В., Яновский В. В.* // ЖЭТФ. 1976. Т. 71. С. 1063.
- [12] *Пелетминский С. В., Слюсаренко Ю. В.* // УФЖ. 1994. Т. 39. №1. С. 112.
- [13] *Morozov V. G.* // Physica. 1982. V. A 110. P. 201.
- [14] *Слюсаренко Ю. В.* // УФЖ. 1983. Т. 28. №5. С. 774.
- [15] *Zubarev D. N., Morozov V. G.* // Physica. 1983. V. A120. №3. P. 411.
- [16] *Oppenheim I., Sokolovsky A. I., Tseitlin M. Yu.* // Physica. 1986. V. A136. P. 1.
- [17] *Климонтович Ю. Л.* Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы. М.: Наука, 1975.
- [18] *Климонтович Ю. Л.* // ТМФ. 1971. Т. 9. №1. С. 109.
- [19] *Коган Ш. М.* // ТМФ. 1972. Т. 10. №1. С. 143.
- [20] *Гречаный О. А.* Стохастическая теория необратимых процессов. Киев: Наукова думка, 1989.
- [21] *Peletminsky S. V., Slusarenko Yu. V.* // Physica. 1994. V. A210. №1, 2. P. 165.
- [22] *Боголюбов Н. Н.* Проблемы динамической теории в статистической физике. М.-Л.: Гостехиздат, 1946.
- [23] *Иванченко Е. А., Красильников В. В., Слюсаренко Ю. В.* Метод собственных функций линеаризованного оператора столкновений и гидродинамический механизм затухания вторичных волн: Препринт 81-48 ХФТИ АН УССР. Харьков, 1981.
- [24] *Osager L.* // Phys. Rev. 1931. V. 37. P. 405; V. 38. P. 2265.
- [25] *Pao Y.* // Commun. Pure Appl. Math. 1974. V. 27. P. 407.
- [26] *Ахиезер А. И., Пелетминский С. В.* Методы статистической физики. М.: Наука, 1977.

Национальный научный центр
 "Харьковский физико-технический институт"
 e-mail: kfti@kfti.kharkov.ua

Поступила в редакцию
 6.IV.1995 г.

S. V. Peletminsky, Yu. V. Slusarenko

EIGENFUNCTION METHOD OF COLLISION BOLTZMANN INTEGRAL IN KINETIC THEORY OF LONG WAVE FLUCTUATIONS

Linearized general equations of long wave fluctuation kinetics are solved (by utilizing eigenfunctions and eigenvalues of the linearized collision Boltzmann integral) in the asymptotic field $t \gg \tau_r$ (τ_r is a relaxation time). A general form of linearized equations of fluctuation hydrodynamics is obtained. Effective initial conditions for the fluctuation hydrodynamics equations are derived for the case when arbitrary order fluctuations are absent at the initial instant. A time asymptotics of the one - particle distribution function is found in the fluctuation hydrodynamic evolution regime when the fluctuations of hydrodynamic quantities play an essential role. It is compared with the early obtained results of the "long hydrodynamic tails" theory.