Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Гейлер, И. Ю. Попов, Баллистический транспорт в наноструктурах: явнорешаемые модели, *ТМФ*, 1996, том 107, номер 1, 12–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1134>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 15:00:10

В. А. Гейлер, И. Ю. Попов

БАЛЛИСТИЧЕСКИЙ ТРАНСПОРТ В НАНОСТРУКТУРАХ: ЯВНОРЕШАЕМЫЕ МОДЕЛИ

С помощью теории самосопряженных расширений строится достаточно широкий класс явнорешаемых моделей баллистического транспорта в наноструктурах. В полученных моделях коэффициент прохождения $T(E)$ имеет простую зависимость как от параметров моделируемого устройства, так и от параметров внешнего магнитного поля. Приведены примеры моделей квантовых точек, в которых поведение $T(E)$, а следовательно, и проводимости носит осцилляционный характер.

1. ВВЕДЕНИЕ

Успехи в технологии изготовления двумерных систем носителей заряда (гетеропереходов и МОП-структур), а также структур с дополнительным латеральным конфайнментом в таких системах (квантовых каналов и квантовых точек) вызвали появление нового раздела физики конденсированного состояния: физики полупроводниковых наноструктур, называемой также мезоскопией [1]. Сочетание чрезвычайно высокой чистоты изготовления и совершенства кристаллической структуры нанoeлектронных устройств с низкой плотностью свободных носителей заряда (которой к тому же можно управлять, изменяя напряжение затвора) привело к двум принципиально важным свойствам электронного газа в обсуждаемых системах: во-первых, это большая длина свободного пробега электронов ($\sim 10^{-3}$ см); во-вторых, относительно большая длина волны Ферми ($\sim 4 \cdot 10^{-6}$ см). Обе эти величины сравнимы с размерами нанoeлектронных устройств, и тем самым в упомянутых устройствах реализуется режим электронного баллистического транспорта, при котором рассеяние на примесях играет пренебрежимо малую роль. В силу этого стандартный подход к теории электропроводности, основанный на решении уравнения Больцмана с учетом столкновения с примесными центрами, становится неприменимым. В этом случае проводимость σ хорошо описывается формализмом Ландауэра–Бюттикера, в рамках которого σ непосредственно выражается через коэффициенты прохождения $T(E)|_{E=E_F}$ каналов наноструктуры [2–6] (здесь E_F – энергия Ферми). В простейшем случае одного канала (и одной моды) известная формула Ландауэра принимает вид [2]

$$\sigma = (e^2/h)T(1 - T)^{-1}. \quad (1)$$

Коэффициент прохождения T существенно зависит не только от размера, но и от геометрии наноструктуры. Кроме того, в сужениях квантовых каналов сильное влияние на значение T может оказывать эффект туннелирования через одиночную примесь при

нахождении E_F вблизи резонанса Брейта–Вигнера (экспериментально это явление обнаружено в [7, 8] и теоретически исследовалось в [9–12] и др.). Совокупность указанных выше обстоятельств приводит к тому, что адекватным математическим аппаратом построения моделей баллистического транспорта в нанoeлектронных устройствах становится теория потенциалов нулевого радиуса с внутренней структурой [13, 14], поскольку в рамках этой теории могут быть введены параметры, учитывающие существенные черты явлений переноса заряда в низкоразмерных системах. Несколько таких моделей было предложено авторами ранее [15–17]. Здесь мы предлагаем некоторую достаточно общую схему конструирования явнорешаемых моделей нанoeлектронного устройства с двумя контактами, коэффициент прохождения которого оказывается элементарно зависящим как от параметров самого устройства, так и от параметров внешних полей. По предложенной нами схеме довольно просто может быть найден, например, коэффициент прохождения изолированной квантовой точки, цепочки и периодического массива квантовых точек, мезоскопических колец и тому подобных микроелектронных устройств (как в отсутствие, так и при наличии внешнего магнитного поля). Эту схему нетрудно обобщить на случай многотерминальных нанoeлектронных устройств, на чем мы здесь подробно останавливаться не будем.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Условное изображение моделируемого устройства представлено на рисунке. Гильбертово пространство “внутренних состояний” устройства обозначим $\mathcal{H}_d$ (например, в случае квантовой точки можно взять $\mathcal{H}_d = L^2(\mathbf{D}_\varepsilon)$, где $\mathbf{D}_\varepsilon$ – диск в плоскости $\mathbf{R}^2$ достаточно малого радиуса ε). Пространство состояний каналов $\mathcal{H}_+ = L^2(\mathbf{R}_+)$, $\mathcal{H}_- = L^2(\mathbf{R}_-)$. Таким образом, пространство $\mathcal{H}$ состояний системы представляет собой прямую сумму

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_- \oplus \mathcal{H}_d \oplus \mathcal{H}_+.$$

Если каналы заперты (т.е. если контакты $C_\pm$ разомкнуты), то гамильтониан системы H^0 представляет собой прямую сумму

$$H^0 = H_- \oplus H_d \oplus H_+.$$

Здесь $H_\pm$ есть оператор $-d^2/dx^2$ в пространстве $L^2(\mathbf{R}_\pm)$ с условием Неймана в точке 0 (что соответствует отсутствию тока через соответствующие контакты $C_\pm$); H_d – гамильтониан заряженной частицы в нанoeлектронном устройстве D . Выбор конкретного вида оператора H_d зависит, разумеется, от свойств устройства D и каждый раз является предметом специального анализа; примеры такого выбора будут приведены в разделе 3 статьи. Резольвенты операторов H^0 , H_- , H_d , H_+ обозначим через $R^0(\zeta)$, $R_-(\zeta)$, $R_d(\zeta)$, $R_+(\zeta)$, соответственно.

Включение контактов будем моделировать с помощью процедуры “сужения – расширения” [13, 14]. Пусть $S_\pm$ – симметричный оператор, полученный сужением оператора $H_\pm$ на область $\mathcal{D}(S_\pm) = \{\varphi \in \mathcal{D}(H_\pm) : \varphi(0) = 0\}$. Рассмотрим также симметричный

оператор S_d в пространстве $\mathcal{H}_d$ с индексами дефекта $(2, 2)$, являющийся сужением оператора H_d . Дефектные элементы оператора S_d будем отождествлять с контактами $C_\pm$ в наноустройстве, их выбор обусловлен физической интерпретацией пространства $\mathcal{H}_d$ и гамильтониана H_d и в каждом конкретном случае также является предметом специального анализа. Важно отметить, что оператор S_d не обязательно плотно определен; в частности, так будет, если $\mathcal{H}_d$ – конечномерное пространство (содержательные примеры такой ситуации разобраны в [13, 14]). Наконец, обозначим

$$S = S_- \oplus S_d \oplus S_+.$$

Гамильтониан устройства с включенными контактами следует искать среди самосопряженных расширений оператора S [13]. С этой целью воспользуемся формулой Крейна, описывающей резольвенты всех самосопряженных расширений заданного симметричного оператора S с помощью резольвенты некоторого его фиксированного самосопряженного расширения [14, 18, 19]. Введем для этого “стандартные” дефектные пространства [19]

$$\mathcal{G}_- = \mathcal{G}_+ = \mathbf{C}, \quad \mathcal{G}_d = \mathbf{C}^2.$$

Контакт проводника $\mathbf{R}_-$ с устройством осуществляется через базисные элементы $1 \in \mathcal{G}_-$ и $(1, 0) \in \mathcal{G}_d$, соответственно. Аналогично контакт проводника $\mathbf{R}_+$ с устройством осуществляется через базисные элементы $1 \in \mathcal{G}_+$ и $(0, 1) \in \mathcal{G}_d$. Обозначим через $G_\pm(x, y; \zeta)$ функцию Грина оператора $H_\pm$. Тогда отображение

$$\Gamma_\pm(\zeta): \mathcal{G}_\pm \rightarrow L^2(\mathbf{R}_\pm),$$

определяемое путем

$$\mathbf{C} \ni \xi \mapsto G_\pm(x, 0; \zeta)\xi \in L^2(\mathbf{R}_\pm),$$

представляет собой Γ -функцию Крейна пары операторов $(S_\pm, H_\pm)$. Отвечающая этой паре $\mathcal{Q}$ -функция Крейна $Q_\pm(\zeta)$ имеет вид $Q_\pm(\zeta) = G_\pm(0, 0; \zeta)$. Обозначим через $\Gamma_d(\zeta)$ и $Q_d(\zeta)$ соответственно Γ -функцию и $\mathcal{Q}$ -функцию пары операторов (S_d, H_d) :

$$\begin{aligned} \Gamma_d(\zeta): \mathbf{C}^2 &\rightarrow \mathcal{H}_d, \\ Q_d(\zeta): \mathbf{C}^2 &\rightarrow \mathbf{C}^2. \end{aligned}$$

Оператор $Q_d(\zeta)$ задается матрицей

$$\begin{bmatrix} Q_d^{11}(\zeta) & Q_d^{12}(\zeta) \\ Q_d^{21}(\zeta) & Q_d^{22}(\zeta) \end{bmatrix},$$

в которой $Q_d^{ij}(\zeta) = \overline{Q_d^{ji}(\zeta)}$ при вещественных ζ . Введем также следующие обозначения для дефектных элементов оператора S_d :

$$\Gamma_d^-(\zeta) = \Gamma_d(\zeta)(1, 0); \quad \Gamma_d^+(\zeta) = \Gamma_d(\zeta)(0, 1).$$

Для пары операторов (S, H^0) Γ -функция и $\mathcal{Q}$ -функция задаются прямыми суммами

$$\begin{aligned} \Gamma(\zeta) &= \Gamma_-(\zeta) \oplus \Gamma_d(\zeta) \oplus \Gamma_+(\zeta), \\ Q(\zeta) &= Q_-(\zeta) \oplus Q_d(\zeta) \oplus Q_+(\zeta). \end{aligned}$$

Как упоминалось выше, гамильтониан системы с включенными контактами мы рассматриваем как самосопряженное расширение оператора S . Обозначим это расширение через H , а его резольвенту — через $R(\zeta)$. Согласно формуле Крейна

$$R(\zeta) = R^0(\zeta) - \Gamma(\zeta)[Q(\zeta) + A]^{-1}\Gamma^*(\bar{\zeta}), \quad (2)$$

где A — эрмитова 4×4 -матрица (оператор в пространстве $\mathcal{G} = \mathcal{G}_- \oplus \mathcal{G}_d \oplus \mathcal{G}_+$), параметризующая самосопряженные расширения оператора S . В соответствии с изложенной выше интерпретацией дефектных элементов включение контактов означает включение “взаимодействия” между элементами $\Gamma_-(\zeta) \cdot 1$ и $\Gamma_d^-(\zeta)$, а также между элементами $\Gamma_+(\zeta) \cdot 1$ и $\Gamma_d^+(\zeta)$, соответственно. Поэтому матрицу A в формуле Крейна надо выбрать в виде

$$\begin{bmatrix} \mu_- & \alpha_- & 0 & 0 \\ \alpha_- & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_+ \\ 0 & 0 & \alpha_+ & \mu_+ \end{bmatrix},$$

где α_- и α_+ — вещественные величины, характеризующие “идеальные” контакты $C_{\pm}$, а вещественные же величины μ_- и μ_+ характеризуют степень отклонения контакта C_- (соответственно C_+) от идеального. Например, при $\mu_+ > 0$ движущаяся в проводнике $\mathbf{R}_+$ заряженная частица испытывает отталкивание от контакта C_+ , а при $\mu_+ < 0$ — притяжение. Таким образом, матрица $Q(\zeta) + A$ имеет следующую структуру:

$$\begin{bmatrix} \tilde{Q}_-(\zeta) & \alpha_- & 0 & 0 \\ \alpha_- & Q_d^{11}(\zeta) & Q_d^{12}(\zeta) & 0 \\ 0 & Q_d^{21}(\zeta) & Q_d^{22}(\zeta) & \alpha_+ \\ 0 & 0 & \alpha_+ & \tilde{Q}_+(\zeta) \end{bmatrix},$$

здесь $\tilde{Q}_{\pm}(\zeta) = Q_{\pm}(\zeta) + \mu_{\pm}$. Явный вид матрицы $[Q(\zeta) + A]^{-1}$ находится элементарно:

$$[Q(\zeta) + A]^{-1} = \det[Q(\zeta) + A]^{-1}B,$$

где B представляет собой 4×4 -матрицу, присоединенную к матрице $Q(\zeta) + A$. Простые вычисления дают

$$\det(Q + A) = \tilde{Q}_- \tilde{Q}_+ (\det Q_d) - \alpha_-^2 \tilde{Q}_+ Q_d^{22} - \alpha_+^2 \tilde{Q}_- Q_d^{11} + \alpha_-^2 \alpha_+^2.$$

Выпишем также элементы матрицы B :

$$\begin{aligned} B_{11} &= \tilde{Q}_+ (\det Q_d) - \alpha_+^2 Q_d^{11}, & B_{12} &= B_{21} = \alpha_- (\alpha_+^2 - \tilde{Q}_+ Q_d^{22}), & B_{13} &= \alpha_- \tilde{Q}_+ Q_d^{12}, \\ B_{14} &= -\alpha_- \alpha_+ Q_d^{12}, & B_{22} &= \tilde{Q}_- (\tilde{Q}_+ Q_d^{22} - \alpha_+^2), & B_{23} &= -\tilde{Q}_- \tilde{Q}_+ Q_d^{12}, \\ B_{24} &= \alpha_+ \tilde{Q}_- Q_d^{12}, & B_{31} &= \alpha_- \tilde{Q}_+ Q_d^{21}, & B_{32} &= -\tilde{Q}_- \tilde{Q}_+ Q_d^{21}, \\ B_{33} &= \tilde{Q}_+ (\tilde{Q}_- Q_d^{11} - \alpha_-^2), & B_{34} &= B_{43} = \alpha_+ (\alpha_-^2 - \tilde{Q}_- Q_d^{11}), & B_{41} &= -\alpha_- \alpha_+ Q_d^{21}, \\ B_{42} &= \alpha_+ \tilde{Q}_- Q_d^{21}, & B_{44} &= \tilde{Q}_- (\det Q_d) - \alpha_-^2 Q_d^{22}. \end{aligned}$$

Зафиксируем теперь значение энергии $E > 0$, $E = k^2$ и рассмотрим в правом канале $\mathbf{R}_-$ приходящую к устройству D волну $\tilde{\varphi}(x) = \exp(ikx)$. Ей соответствует решение φ уравнения $H^0 \varphi = E \varphi$, имеющее вид

$$\varphi = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся “параметрическим” описанием оператора H (см., например, [18]). Тогда из формулы (2) получаем, что при $\text{Im } \zeta > 0$ вектор ψ , определенный равенством

$$\psi = \varphi - \Gamma(\zeta)[Q(\zeta) + A]^{-1}\Gamma^*(\bar{\zeta})(H^0 - \zeta)\varphi, \quad (3)$$

удовлетворяет соотношению

$$(H^0 - \zeta)\varphi = (H - \zeta)\psi. \quad (4)$$

Переходя в (3), (4) к пределу $\zeta \rightarrow E$, найдем решение ψ уравнения $H\psi = E\psi$, являющееся суперпозицией приходящих и уходящих волн в каналах $\mathbf{R}_{\pm}$. Для этого нам потребуется оператор $\Gamma_{-}^*(\bar{\zeta})$. Тривиальные вычисления показывают, что он имеет вид

$$\Gamma_{-}^*(\bar{\zeta})\varphi = \int_{\mathbf{R}_{-}} G_{-}(0, x; \zeta)\varphi(x) dx,$$

где $\varphi \in L^2(\mathbf{R}_{-})$. Следовательно, при $\text{Im } \zeta > 0$

$$\Gamma_{-}^*(\bar{\zeta})(H_{-} - \zeta)\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(0) = 1,$$

поэтому

$$\lim_{\zeta \rightarrow E} \Gamma^*(\bar{\zeta})(H^0 - \zeta)\varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и тем самым

$$\begin{aligned} \lim_{\zeta \rightarrow E} [Q(\zeta) + A]^{-1}\Gamma^*(\bar{\zeta})(H^0 - \zeta)\varphi &= \det[Q(\zeta) + A]^{-1} \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ B_{31} \\ B_{41} \end{pmatrix}, \\ \lim_{\zeta \rightarrow E} \Gamma(\zeta) \det[Q(\zeta) + A]^{-1}\Gamma^*(\bar{\zeta})(H^0 - \zeta)\varphi &= \\ &= \det[Q(E) + A]^{-1} \begin{pmatrix} B_{11}G_{-}(x, 0; E) \\ B_{21}\Gamma_d^{-}(E) + B_{31}\Gamma_d^{+}(E) \\ B_{41}G_{+}(x, 0; E) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Окончательно ψ имеет вид

$$\psi = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - [\det(Q(E) + A)]^{-1} \begin{pmatrix} B_{11}G_{-}(x, 0; E) \\ B_{21}\Gamma_d^{-}(E) + B_{31}\Gamma_d^{+}(E) \\ B_{41}G_{+}(x, 0; E) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

По поводу формулы (5) заметим следующее. Формально $\mathcal{Q}$ -функция $Q(\zeta)$ не определена на спектре оператора H^0 , поэтому символом $Q(E)$ мы обозначаем $\lim_{\zeta \rightarrow E} Q(\zeta)$, который, как будет видно из дальнейшего, существует во всех практически важных случаях.

Явный вид функции Грина $G_{\pm}$ хорошо известен:

$$G_{\pm}(x, y; \zeta) = i(2k)^{-1} [\exp(ik|x - y|) + \exp(\pm ik(x + y))],$$

где $\zeta = k^2$, $\text{Im } k \geq 0$. Таким образом,

$$G_{\pm}(x, 0; E) = ik^{-1} \exp(\pm ikx) \quad \text{при } \pm x > 0. \quad (6)$$

Обозначим проекцию решения ψ на пространство каналов $L^2(\mathbf{R}_-) \oplus L^2(\mathbf{R}_+)$ через $\tilde{\psi}$. Из (5) и (6) получаем асимптотики

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(x) &\sim \exp(ikx) + C \exp(-ikx) \quad \text{при } x \rightarrow -\infty, \\ \tilde{\psi}(x) &\sim -ik^{-1} \det[Q(\zeta) + A]^{-1} B_{41} \exp(ikx) \quad \text{при } x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Тем самым для коэффициента прохождения $T(E)$ получаем следующую формулу, которую можно рассматривать как основной результат настоящей статьи:

$$T(E) = \frac{|B_{41}|^2}{E |\det[Q(E) + A]|^2}. \quad (7)$$

В большинстве практически важных случаев оператор H_d имеет чисто точечный спектр, состоящий из собственных значений λ_n конечной или бесконечной кратности. В этом случае элементы матрицы $Q_d(E)$ определены при всех E , $E \neq \lambda_n$, причем диагональные элементы вещественны при вещественных значениях E . Поэтому формула (7) принимает вид

$$T(E) = \frac{E \alpha_-^2 \alpha_+^2 |Q_d^{21}(E)|^2}{E F_1^2(E) + F_2^2(E)}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} F_1(E) &= \alpha_-^2 Q_d^{22}(E) + \alpha_+^2 Q_d^{11}(E) + (\mu_- + \mu_+) \det Q_d, \\ F_2(E) &= \det Q_d + E(\alpha_-^2 \mu_+ Q_d^{22} + \alpha_+^2 \mu_- Q_d^{11} - \mu_- \mu_+ \det Q_d - \alpha_-^2 \alpha_+^2). \end{aligned}$$

Отметим частный случай формулы (8), соответствующий значениям $\mu_{\pm} = 0$ (идеальные контакты):

$$T(E) = \frac{E \alpha_-^2 \alpha_+^2 |Q_d^{21}(E)|^2}{E(\alpha_-^2 Q_d^{22}(E) + \alpha_+^2 Q_d^{11}(E))^2 + (\det Q_d(E) - E \alpha_-^2 \alpha_+^2)^2}. \quad (9)$$

Формулой (9) мы ограничимся при разборе примеров в разделе 3.

3. ПРИМЕРЫ

В этом разделе мы приведем примеры применения формул (1) и (9). Пример 1 представляет собой весьма грубую модель двумерной электронной системы, находящейся в квантующем магнитном поле. Несмотря на некоторую примитивность в этой модели на элементарном уровне можно выявить следующее важное свойство систем, проявляющих целочисленное холловское квантование [20, 21]: в то время, когда холловская проводимость σ_{xy} остается на плато, продольная проводимость σ_{xx} обращается в нуль. Это происходит при пиннинге уровня Ферми между уровнями Ландау (т.е. при целом числе заполнения расплывшихся уровней Ландау). Это свойство имеет место и в нашей модели, а именно, в ней $T(E) = 0$, когда E совпадает с одним из уровней Ландау. В соответствии с формулой Ландауэра (1) это означает обращение в нуль проводимости σ_{xx} рассматриваемой системы, когда E_F проходит уровень Ландау. Примеры 2 и 3 на

модельном уровне демонстрируют осцилляционный характер проводимости квантовых точек (см. обзоры [1] и [22]). Эти осцилляции связаны с изменением уровня Ферми E_F , являющимся результатом изменения числа электронов в системе или изменения напряженности внешнего магнитного поля.

1. Рассмотрим двумерную электронную систему, находящуюся в однородном квантовом магнитном поле напряженности $\vec{B}$, перпендикулярном ее плоскости. Пренебрегая конечностью размеров системы, отождествим ее с плоскостью $\mathbf{R}^2$. Контакты расположим симметрично относительно точки $(0, 0)$ в точках $\vec{r}_1 = (-a, 0)$ и $\vec{r}_2 = (a, 0)$. В рассматриваемом случае оператор H_d представляет собой оператор Ландау, т.е. самосопряженный оператор в $L^2(\mathbf{R}^2)$, определяемый следующим дифференциальным выражением:

$$(-\hbar^2/2m)[(\partial/\partial x_1 + i\pi\xi x_2)^2 + (\partial/\partial x_2 - i\pi\xi x_1)^2], \quad (10)$$

где ξ – число квантов потока магнитного поля через единичную площадку плоскости $\mathbf{R}^2$ (см., например, [23]). Спектр этого оператора чисто точечный и состоит из бесконечно вырожденных уровней Ландау – собственных чисел

$$\varepsilon_l = (l + 1/2)\hbar\omega_c, \quad l = 0, 1, \dots,$$

где $\omega_c = |eB|/cm$ – циклотронная частота. В этом случае элементы матрицы $Q_d(E)$ известны [23, 24], а именно,

$$Q_d^{11}(E) = Q_d^{22}(E) = -(m/2\pi\hbar^2)[\psi(1/2 - E/\hbar\omega_c) + \log(\pi|\xi|a^2) + 2C_E]. \quad (11)$$

В формуле (11) $\psi(x)$ – логарифмическая производная Γ -функции Эйлера, C_E – постоянная Эйлера. Для внедиагональных элементов матрицы Q_d имеем $Q_d^{jk}(E) = G_d(\vec{r}_j, \vec{r}_k; E)$, где G_d – функция Грина оператора H_d , которая имеет вид

$$G_d(\vec{r}, \vec{r}'; E) = (m/2\pi\hbar^2)\Gamma(1/2 - E/\hbar\omega_c) \exp[-\pi i \xi \vec{r} \wedge \vec{r}' - \pi|\xi|(\vec{r} - \vec{r}')^2/2] \times \\ \times \Psi(1/2 - E/\hbar\omega_c, 1; \pi|\xi|(\vec{r} - \vec{r}')^2), \quad (12)$$

где $\Psi(a, c; x)$ – вырожденная гипергеометрическая функция. Тем самым

$$Q_d^{12}(E) = Q_d^{21}(E) = (m/2\pi\hbar^2)\Gamma(1/2 - E/\hbar\omega_c) \times \\ \times \exp[-2\pi|\xi|a^2]\Psi(1/2 - E/\hbar\omega_c, 1; 4\pi|\xi|a^2). \quad (13)$$

Формулы (11)–(13) показывают, что при $E = \varepsilon_l$ функции $Q_d^{11}(E)$ и $Q_d^{12}(E)$ имеют полюсы с разными вычетами (за исключением специально подобранных значений a , которыми мы по понятным причинам пренебрегаем). Тем самым числитель в (9) имеет полюс второго порядка, а знаменатель – четвертого. Отсюда вытекает, что $T(E) = 0$, как только $E = \varepsilon_l$.

2. Рассмотрим теперь коэффициент прохождения через квантовую точку произвольной формы. В этом случае $\mathcal{H}_d = L^2(\Omega)$, где Ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^2$ с кучочно-гладкой границей, а оператор H_d представляет собой лапласиан $-\Delta$ с условием Неймана на границе $\partial\Omega$. Обозначим через $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ последовательность всех собственных чисел задачи Неймана для области Ω , занумерованных с учетом кратности, а через (φ_n) – соответствующую ортонормальную последовательность собственных функций. Зафиксируем число ε_0 , $\varepsilon_0 < 0$, и пусть a_1 (соответственно a_2) – положение контакта C_-

(соответственно C_+) в области Ω . Следуя [15, 16, 25], мы приходим к таким значениям элементов матрицы $Q_d(E)$ при $E \geq 0$, $E \neq \lambda_n$:

$$Q_d^{jj}(E) = (E - \varepsilon_0) \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(a_j)|^2 (\lambda_n - E)^{-1} (\lambda_n - \varepsilon_0)^{-1}, \quad j = 1, 2, \quad (14)$$

$$Q_d^{jk}(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\varphi}_n(a_j) \varphi_n(a_k) (\lambda_n - E)^{-1}, \quad j \neq k. \quad (15)$$

Как и в примере 1, формулы (14), (15) приводят к осцилляциям величины $T(E)$, которая обращается в нуль при прохождении уровня Ферми E_F через значения энергии λ_n .

3. Кратко обсудим особенности коэффициента прохождения через квантовую точку, находящуюся в магнитном поле. В этом случае можно взять $\mathcal{H}_d = L^2(\Omega)$, где Ω – как в примере 2, а в качестве H_d взять оператор вида (11) с условиями Неймана на $\partial\Omega$. Затем можно воспользоваться формулами (14), (15). В этом случае основной интерес представляет зависимость $T(E)$ от напряженности магнитного поля B . Для этого достаточно знать зависимость от B собственных чисел λ_n . Поскольку в общем случае задача нахождения аналитического вида этой зависимости не разрешима, в теоретических исследованиях транспортных свойств квантовых точек в магнитном поле применяют модель, в которой потенциалом конфайнмента квантовой точки служит параболический потенциал $V(x_1, x_2) = (m\omega^2)(x_1^2 + x_2^2)/2$. Здесь $\omega = \hbar/mL^2$, где L – характерный размер квантовой точки. В этом случае $H_d = H_L + V$, где H_L – гамильтониан Ландау, т.е. самосопряженный оператор в $L^2(\mathbf{R}^2)$, определенный дифференциальным выражением (10). Собственные числа λ_n оператора H_d представляют собой уровни Фока–Дарвина

$$\varepsilon_{mn}(B) = (m + 1/2)\hbar\omega_- + (n + 1/2)\hbar\omega_+, \quad m, n = 0, 1, \dots,$$

где $\omega_{\pm} = (\sqrt{\omega_c^2 + 4\omega^2} \pm \omega_c)/2$ [22]. Расположение точек $\varepsilon_{mn}(B)$ на полуоси $\mathbf{R}_+$ регулярно, если отношение ω_-/ω_+ рационально, и иррегулярно в противном случае. В соответствии с этим зависимость T от напряженности поля B носит “хаотический” характер (см. [1, 22] и др.).

По поводу разобранных примеров необходимо сделать одно замечание. Уровень Ферми E_F в нашей модели определяется полным гамильтонианом H , поэтому он, вообще говоря, не совпадает с собственными числами оператора H_d . Тем самым в рассмотренных нами примерах проводимость не обращается тождественно в нуль.

В заключение авторы благодарят В.А.Маргулиса за обсуждение результатов настоящей статьи. За финансовую поддержку мы признательны РФФИ (гранты № 95-01-00439 и 95-02-04871) и ГК РФ по высшему образованию (грант № 94-2.7-1067).

Список литературы

- [1] Beenakker C.W.J., van Houten H. // Solid State Phys. V. 44 / Eds. H.Ehrenreich, D.Turnbull. New York: Academic Press, 1991. P. 1.
- [2] Landauer R. // IBM J. Res. Dev. 1957. V. 1. P. 223.
- [3] Landauer R. // Phil. Mag. 1970. V. 21. P. 863.
- [4] Büttiker M. // Phys. Rev. Lett. 1986. V. 57. P. 1761.
- [5] Büttiker M. // Electronic properties of multilayers and low-dimensional semiconductor structures / Eds. Chamberlain J. et al.. New York: Plenum Press, 1990. P. 51.
- [6] Büttiker M. // J. Phys. Condens. Matter. 1993. V. 5. P. 9369.

- [7] *McEuen P.L., Alphenaar B.W., Wheeler R.G. et al.* // Surf. Sci. 1990. V. 229. P. 312.
- [8] *Eugster C.C. et al.* // Phys. Rev. B. 1992. V. 46. P. 10146.
- [9] *Левинсон Я.Б., Лубин М.И., Сухоруков Е.В.* // Письма в ЖЭТФ. 1991. Т. 54. С. 405.
- [10] *Levinson Y.B., Lubin M.I., Sukhorukov E.V.* // Phys. Rev. B. 1992. V. 45. P. 11936.
- [11] *Geyler V.A.* // Proc. 2nd Int. Conf. Nanometer Scale Sci. and Technol. Part 3. Moscow, 1994. P. 834.
- [12] *Гейлер В.А., Маргулис В.А., Чучаев И.И.* // Письма в ЖЭТФ. 1993. Т. 58. С. 668.
- [13] *Павлов Б.* // ТМФ. 1984. Т. 59. №3. С. 345–353.
- [14] *Павлов Б.* // УМН. 1987. Т. 42. Вып. 6 С. 99.
- [15] *Попов И.Ю.* // ФТТ. 1994. Т. 36. С. 1918.
- [16] *Попов И.Ю., Попова С.Л.* // ЖТФ. 1994. Т. 64. №125 1. С. 23.
- [17] *Geyler V.A., Popov I.Yu.* // Phys. Lett. A. 1994. V. 187. P. 410.
- [18] *Альбеверьо С., Гестези Ф., Холден Х., Хæэг-Крон Р.* Решаемые модели в квантовой механике. М.: Мир, 1991.
- [19] *Крейн М.Г., Лангер Г.К.* // Функци. анализ и его прилож. 1971. Т. 5. №125 2. С. 59.
- [20] Квантовый эффект Холла. Сб. статей / Сост. А.Я.Шиж и Ю.В.Шмарцев. М.: Мир, 1986.
- [21] Квантовый эффект Холла / Ред. Р.Прендж и С.Гирвин. М.: Мир, 1989.
- [22] *Chakraborty T.* // Comments Cond. Matter Phys. 1992. V. B16. P. 35.
- [23] *Гейлер В.А.* // Алгебра и анализ. 1989. Т. 3. №3. С. 1.
- [24] *Гейлер В.А., Маргулис В.А.* // ТМФ. 1984. Т. 58. №3. С. 461–472.
- [25] *Киселев А.А., Павлов Б.* // ТМФ. 1994. Т. 100. №3. С. 354–366.

Мордовский государственный университет (Саранск),
 Санкт-Петербургский институт
 точной механики и оптики

Поступила в редакцию
 16.VI.1996 г.

V.A. Geyler, I. Yu. Popov
BALLISTIC TRANSPORT IN NANOSTRUCTURES:
EXPLICITLY SOLVABLE MODELS

A relatively wide class of explicitly solvable models of the ballistic transport in nanostructures is constructed by means of operator extension theory. In the obtained models the transmission coefficient $T(E)$ has a simple dependence on the modeled device parameters as well as on the parameters of an external magnetic field. Some examples of quantum point models are given, in which $T(E)$, and hence the conductance, exhibits an oscillatory behaviour.