Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Вакуленко, Решение условий Вирасоро для ДКП-иерархии, *ТМФ*, 1996, том 107, номер 1, 21–26

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1135>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 15:53:42

В. И. Вакуленко

РЕШЕНИЕ УСЛОВИЙ ВИРАСОРО ДЛЯ ДКП-ИЕРАРХИИ

Рассмотрены уравнения ДКП-иерархии с точки зрения теории Сигала–Вильсона.
Как следствие найдена τ -функция, удовлетворяющая условиям Вирасоро.

Относительно недавно была установлена связь между специальными решениями КП-иерархии и топологическими минимальными моделями. Оказывается, свободная энергия A_{n-1} модели Ландау–Гинзбурга, взаимодействующей с топологической гравитацией, совпадает с логарифмом некоторой τ -функции n -редуцированной иерархии КП. Эта τ -функция выделяется с помощью условий Вирасоро $L_k \tau = 0$, $k \geq -1$.

Подобная связь с интегрируемыми уравнениями выглядит еще более удивительной в свете геометрической интерпретации корреляционных функций в модели Ландау–Гинзбурга [1]: логарифм τ -функции должен быть производящей функцией для индексов пересечения некоторых циклов на пространстве модулей кривых. Эта производящая функция (соответствующая случаю топологической гравитации без материи) была вычислена в [2], что дало возможность доказать гипотезу Виттена для энергии A_1 модели Ландау–Гинзбурга.

В связи с этим представляется естественным поиск τ -функций для обобщенных уравнений типа КП (в смысле [3]), удовлетворяющих условиям Вирасоро. В данной работе предлагается решение этой задачи для иерархий, отвечающих алгебрам из серии D. В пункте 1 дано определение τ -функции и функции Бейкера, описана связь между ними и выведено билинейное уравнение Хироты. Определения и доказательства аналогичны приведенным в работах [4] и [5] для обычного уравнения КП. Представленное в настоящей работе описание ДКП-иерархии, насколько известно автору, является новым. В пункте 2 мы вычисляем базисные векторы, соответствующие искомой точке грассманиана, следуя процедуре, изложенной в [6].

1. Пусть H – бесконечномерное векторное пространство с базисом, состоящим из столбцов вида $\begin{pmatrix} x^k \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ y^k \end{pmatrix}$, $k \in \mathbf{Z}$. Определим на H билинейную форму:

$$\left\langle \begin{pmatrix} f_1(x) \\ h_1(y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_2(x) \\ h_2(y) \end{pmatrix} \right\rangle = \int \frac{dx}{x} f_1(x) f_2(-x) - \int \frac{dy}{y} h_1(y) h_2(-y), \quad (1)$$

где предполагается нормировка $\int \frac{dx}{x} = 1$.

Пространство H допускает разложение на подпространства H_+ и H_- , изотропные относительно формы (1). Базис H_+ состоит из векторов вида

$$e_k^+ := \begin{pmatrix} x^k \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_k^- := \begin{pmatrix} 0 \\ y^k \end{pmatrix}, \quad k > 0, \quad e_0^+ := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а базис H_- —

$$e_{-k}^+ := \begin{pmatrix} x^{-k} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_{-k}^- := \begin{pmatrix} 0 \\ y^{-k} \end{pmatrix}, \quad k > 0, \quad e_0^- := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Относительно формы (1) выполнены следующие соотношения:

$$(e_n^+)^* = (-1)^n e_{-n}^+, \quad (e_n^-)^* = (-1)^n e_{-n}^-, \quad n \neq 0, \\ (e_0^+)^* = 1/2 e_0^-, \quad (e_0^-)^* = 1/2 e_0^+.$$

Назовем грассманианом типа D (DGr) множество подпространств $W \subset H$, таких что:

- 1) W изотропно,
- 2) $pr_+ : W \rightarrow H_+$ имеет конечномерные ядро и коядро.

В дальнейшем мы будем иметь дело только с подмножеством в DGr, состоящим из таких $W \subset H$, что $pr_+ : W \rightarrow H_+$ — изоморфизм. Как и в случае грассманиана, для DGr можно определить τ -функцию и функцию Бейкера.

Аналогом коммутативной группы Γ_+ будет группа отображений из H в H , состоящая из матриц вида

$$g(t, \tilde{t}) = \begin{pmatrix} \exp(\sum_{i=0}^{+\infty} t_{2i+1} x^{2i+1}) & 0 \\ 0 & \exp(\sum_{i=0}^{+\infty} \tilde{t}_{2i+1} y^{2i+1}) \end{pmatrix}.$$

Важно отметить, что билинейная форма (1) инвариантна относительно действия Γ_+ , т.е. $\Gamma_+ \subset O(H)$ (ортогональной группе H). Действие элементов группы Γ_+ на DGr определяется аналогично случаю Gr, при этом тот факт, что $\Gamma_+ \subset O(H)$, обеспечивает сохранение изотропности (свойство 1 в определении DGr).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $g \in \Gamma_+$. Тогда функцией Бейкера, отвечающей W , $W \subset \text{DGr}$, называется единственный элемент $\psi_W(g) \in W$, имеющий вид

$$\psi_W(g) = g \left(e_0^+ + \sum_{i>0} A_i^+ e_{-i}^+ + \sum_{i\geq 0} A_i^- e_{-i}^- \right)$$

Для определения τ -функции необходимо сделать несколько предварительных замечаний. Если $g^{-1} \in \Gamma_+$ и

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

— его разложение относительно $H = H_+ \oplus H_-$, тогда

$$(a^{-1}b) : H_- \rightarrow H_+$$

можно отождествить с элементом из $\wedge^2(H_+)$ (т.е. матрица $(a^{-1}b)$ антисимметрична). Далее, пусть $W \subset H$ является графиком отображения $S: H_+ \rightarrow H_-$. Тогда из изотропности следует, что S – антисимметричная матрица (точнее, элемент из $\wedge^2(H_-)$). В [4, гл. 12] показано, как для двух антисимметричных матриц A и B размера $k \times k$ определить выражение

$$Pf(1 + AB) := \det^{1/2}(1 + AB),$$

и доказана следующая полезная формула:

$$Pf(1 - AB) = 1 + \sum_{\sigma} Pf A_{\sigma} Pf B_{\sigma}, \quad (2)$$

где σ пробегает ненулевые подмножества множества $(1, \dots, k)$, а A_{σ} обозначает матрицу, составленную из строк и столбцов матрицы A с номерами, принадлежащими множеству σ . Теперь мы можем сформулировать следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. τ -функцией, отвечающей W , $W \in \text{DGr}$, называется выражение

$$\tau_W(g) = Pf(1 + (a^{-1}b)S).$$

Естественная редукция ДКП-иерархии получается при наложении условия (4) (см. ниже).

Как и в случае КП-иерархии, существует связь между τ -функцией и функцией Бейкера. Пусть

$$q(\mu) = \begin{pmatrix} \frac{1-x/\mu}{1+x/\mu} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_+, \quad \tilde{q}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1-y/\lambda}{1+y/\lambda} \end{pmatrix} \in \Gamma_+, \quad \psi_W(g) = g\tilde{\psi}_W.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ:

$$\tilde{\psi}_W(g)(\mu, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\tau_W(gq(\mu))}{\tau_W(g)} \\ \frac{\tau_W(g\tilde{q}(\lambda))}{\tau_W(g)} \end{pmatrix}.$$

Доказательство аналогично данному в [5]. Достаточно вычислить $\tau_W(q(\mu))$ и $\tau_W(\tilde{q}(\lambda))$. Для $q(\mu)$ матрица $(a^{-1}b)$ имеет вид

$$a^{-1}b = \sum_{n>0} (-1)^n \mu^{-n} e_0^+ \wedge e_n^+,$$

и ее подматрицы с ненулевым пфаффианом – это в точности подматрицы размера 2×2 , отвечающие выбору подмножества $(e_0^+, e_n^+) \subset (e_0^+, e_1^+, \dots)$ ($n > 0$). Обозначим через ψ_n^+ ($n > 0$), ψ_0^+ элементы W , соответствующие векторам e_n^+ ($n > 0$), e_0^+ при отображении $1 + S: H_+ \rightarrow W$. Тогда если

$$\psi_0^+ = e_0^+ + \sum_{i>0} a_{0i}^+ e_{-i}^+ + \sum_{i>0} a_{0i}^- e_{-i}^-,$$

то, пользуясь формулой (2), получаем

$$\tau_W(g) = 1 + \sum_{i>0} a_{0i}^+ \mu^{-i}.$$

Аналогичные вычисления для $\tilde{q}(\lambda)$ завершают доказательство.

Так как

$$\frac{1 - x/\mu}{1 + x/\mu} = \exp \left(-2 \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-2k-1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right),$$

то связь между τ -функцией и функцией Бейкера можно записать следующим образом:

$$\tilde{\psi}_W(g(t, \tilde{t}))(\mu, \lambda) = \left(\frac{\tau \left(t_{2n+1} - \frac{2}{2n+1} \mu^{-2n-1}, \tilde{t} \right)}{\tau(t, \tilde{t})} \frac{\tau \left(t, \tilde{t}_{2n+1} - \frac{2}{2n+1} \lambda^{-2n-1} \right)}{\tau(t, \tilde{t})} \right). \quad (3)$$

Так как пространство $W \in \text{DGr}$ изотропно, то для любых $t, \tilde{t}, t', \tilde{t}'$

$$\langle \psi_W(t, \tilde{t}), \psi_W(t', \tilde{t}') \rangle = 0,$$

что с учетом (3) дает билинейное уравнение для τ -функции.

Уравнения ДКП-иерархии изучались с помощью представления свободными фермионами в работах [7], где были получены сходные формулы.

2. Алгебра $so(2n, \mathbf{C})$ порождается следующими образующими:

$$\begin{aligned} e_i &= E_{i+1,i} + E_{2n+1-i,2n-i}, & f_i &= E_{i,i+1} + E_{2n-i,2n+1-i}, \\ h_i &= C_i - C_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1, & e_n &= \frac{1}{2}(E_{n+1,n-1} + E_{n+2,n}), \\ f_n &= 2(E_{n-1,n+1} + E_{n,n+2}), & h_n &= C_{n-1} + C_n, \end{aligned}$$

где $E_{i,j}$ – матрица размера $2n \times 2n$ с единицей на (i, j) -месте и нулями в остальных, а $C_{i,j} = -E_{i,i} + E_{2n+1-i,2n+1-i}$. Пусть также $e_0 = \frac{1}{2}(E_{1,2n-1} + E_{2,2n})$ – элемент $so(2n, \mathbf{C})$, принадлежащий весовому подпространству, отвечающему старшему корню. Соответствующая билинейная форма на векторах $v_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)^t$ (единица на i -м месте) определяется так:

$$(v_i, v_j) = \sigma_i \delta_{i+j, 2n+1},$$

где σ_i – i -й элемент строки длиной $2n$:

$$(1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, (-1)^{n-1}, \dots, 1).$$

Рассмотрим представление $Lso(2n, \mathbf{C})$ в пространстве $\tilde{V} = V \otimes \mathbf{C}[z, z^{-1}]$, где V – векторное пространство размерности $2n$. Пусть $\Lambda = \sum_{i=1}^n e_i + ze_0$ – циклический элемент (см. [8]). Существует $F \in Lso(2n, \mathbf{C})$: $[F, \Lambda] = 0$ и ортогональное разложение $\tilde{V} = \ker \Lambda \oplus \ker F$ относительно инвариантного скалярного произведения на $\tilde{V}$:

$$\langle u_i z^k, u_{i'} z^{k'} \rangle = \int dz z^{k+k'} (u_i, u_{i'}).$$

Изоморфизм $\tilde{V} \rightarrow \mathbf{C}[x, x^{-1}] \oplus \mathbf{C}[y, y^{-1}]$ (сохраняющий скалярное произведение) можно построить следующим образом. Векторы $u_0 = \frac{1}{2}v_1 + z^{-1}v_{2n}$, $u_1 = v_2, \dots$, $u_{n-2} = v_{n-1}$, $u_{n-1} = v_n + \frac{1}{2}v_{n+1}$, $u_n = v_{n+2}, \dots$, $u_{2n-3} = v_{2n-1}$ порождают $\ker F$;

$\Lambda u_i = u_{i+1}$, $i = 0, \dots, 2n-4$, $\Lambda^{2n-2} u_i = z u_i$. Аналогично векторы $\tilde{u}_0 = \frac{1}{2} v_1 - z^{-1} v_{2n}$, $\tilde{u}_1 = v_n - \frac{1}{2} v_{n+1}$ порождают $\ker \Lambda$. Вышеуказанный изоморфизм задается так:

$$u_i z^k \rightarrow x^{i+(2n-2)k}, \quad \tilde{u}_i z^k \rightarrow y^{i+2k}.$$

При этом скалярное произведение

$$\langle u_i z^k, u_{i'} z^{k'} \rangle = \int dz z^{k+k'} (u_i, u_{i'})$$

переходит в

$$\begin{aligned} (x^m, x^{m'}) &= \int \frac{dx}{x} x^m (-x)^{m'} = (-1)^m \delta_{m+m'}, \\ (y^m, y^{m'}) &= (-1)^{m+1} \delta_{m+m'}. \end{aligned}$$

Теперь нетрудно заметить, что пространство $\tilde{V}$ изоморфно пространству H :

$$u_i z^k \rightarrow \begin{pmatrix} x^{i+(2n-2)k} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{u}_i z^k \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ y^{i+2k} \end{pmatrix},$$

и скалярное произведение на $\tilde{V}$ переходит в скалярное произведение на H . Кроме того, групповые элементы вида $\exp(\sum t_{2i+1} \Lambda^{2i+1} + \sum \tilde{t}_{2j+1} F^{2j+1})$ переходят в

$$\begin{pmatrix} \exp \sum t_{2i+1} x^{2i+1} & 0 \\ 0 & \exp \sum \tilde{t}_{2j+1} y^{2j+1} \end{pmatrix} \in \Gamma_+,$$

а элемент алгебры Вирасоро

$$L_{-1} = \frac{d}{dz} + \frac{z^{-1}}{h} \rho \quad \left(h = 2n-2, \quad \rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} H_\alpha = \sum_{i=1}^n (n-i) C_i \right)$$

переходит в

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{hx^{h-1}} \frac{d}{dx} - \frac{1}{2} x^{-h} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{d}{dy} - \frac{1}{2} y^{-2} \end{pmatrix}.$$

Итак, нам надо найти пространство $W \in \text{DGr}$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$zW = \begin{pmatrix} x^h & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix} W \subset W \quad (4)$$

и $AW \subset W$, где матрица A соответствует оператору $L_{-1} + \Lambda$ (сдвиг условия Вирасоро обусловлен теми же причинами, что и для случая КП-иерархии, см. [6]) и равна

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{hx^{h-1}} \frac{d}{dx} - \frac{1}{2} x^{-h} + x & 0 \\ 0 & \frac{1}{2y} \frac{d}{dy} - \frac{1}{2} y^{-2} \end{pmatrix}.$$

Из этих требований можно получить, что вектор $\psi_0^+ \in W$ удовлетворяет уравнению

$$(A^{h+1} - Az + 1/2) \psi_0^+ = 0$$

и имеет вид

$$\psi_0^+ = \left(\frac{c_1 x^{h/2} \exp\left(\frac{-h}{h+1} x^{h+1}\right) \int \frac{dp}{p^{1/2}} \exp\left(px^h - \frac{p^{h+1}}{h+1}\right)}{c_2 y \int dp (y^2 + p)^{-1/2} \phi(p)} \right),$$

где $\phi(p)$ удовлетворяет уравнению $\partial^h \phi(p) = p\phi(p)$ и константы c_1 и c_2 выбираются из условия, чтобы вектор ψ_0^+ имел асимптотику $\begin{pmatrix} 1 + O(x^{-1}) \\ 1 + O(y^{-1}) \end{pmatrix}$.

Остальные элементы базиса W имеют вид

$$\psi_k^+ = A^k \psi_0^+, \quad k > 0, \quad \psi_{2k}^- = A^{-k} \psi_0^+, \quad \psi_{2k+1}^- = \begin{pmatrix} 0 \\ y^{2k+1} \end{pmatrix}.$$

Так как

$$A\psi_1^- = \left(\frac{1}{2y} \frac{d}{dy} - \frac{1}{2} y^{-2} \right) y = 0,$$

пространство W удовлетворяет условиям $zW \subset W$ и $AW \subset W$. Пользуясь уравнением для ψ_0^+ , можно показать, что пространство W изотропно, поэтому для него имеет смысл определение τ -функции, данное в пункте 1. Эта τ -функция и будет искомым решением условий Вирасоро.

Мне приятно выразить благодарность А.Д. Миронову за постановку задачи, А.В. Маршакову, А.Д. Миронову, С.М. Харчеву за полезные замечания и поддержку. Я благодарен П.Г. Гриневичу, который обратил мое внимание на работы [9] и [10], где рассмотрены алгеброгеометрические решения иерархии, сходной с ДКП (в статье [9] найдены условия на пару точек кривой и дивизор, обеспечивающие изотропность), а также указал на некоторые неточности, присутствовавшие в первоначальном варианте статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке ISF (грант MGK000) и РФФИ (грант 94-02-14365).

Список литературы

- [1] Witten E. // Nucl.Phys. 1990. V. B340. P. 281; 1992. V. B371. P. 191.
- [2] Концевич М. // Функц. анализ и его прилож. 1991. V. 25. №2. P. 50; // Commun. Math. Phys. 1992. V. 147. P. 1.
- [3] Дринфельд В.Г., Соколов В.В. // ВИНТИ. Совр. пробл. матем. 1984. Т. 24. С. 81-180.
- [4] Прессли А., Сигал Г. Группы петель. М.: Мир, 1990.
- [5] Segal G., Wilson G. // Publ. Math. IHES. 1985. V. 61. P. 5-65.
- [6] Kac V., Shwarz A. // Phys.Lett. 1991. V. B257. P. 329-334.
- [7] Date E., Jimbo M., Kashiwara M., Miwa T. // Physica. 1982. V. 4D. P. 343-365; // Publ.RIMS. 1982. V. 18. P. 1077-1110.
- [8] Кац В.Г. Бесконечномерные алгебры Ли. М.: Мир, 1993.
- [9] Весселов А.П., Новиков С.П. // ДАН СССР. 1984. V. 279. №1. P. 20-24; №4. P. 784-788.
- [10] Натанзон С.М. // Функц. анализ и его прилож. 1992. Т. 26. №1. С. 17-26.

Физический институт им. П.Н. Лебедева
Российской академии наук

Поступила в редакцию
6.VII.1995 г.

V. I. Vakulenko SOLUTION OF VIRASORO CONSTRAINTS FOR DKP HIERARCHY

Within the frame of Segal–Wilson theory we study the equations of DKP-hierarchy. As a consequence we obtained the τ -function satisfying Virasoro constraints.