Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Антонов, С. В. Борисенок, В. И. Гирина, Ренормализационная группа в теории развитой турбулентности. Проблема инфракрасно-существенных поправок к уравнению Навье–Стокса, *ТМФ*, 1996, том 107, номер 1, 47–63

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1137>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 17:34:24

Н. В. Антонов, С. В. Борисенок, В. И. Гирина
**РЕНОРМАЛИЗАЦИОННАЯ
ГРУППА В ТЕОРИИ РАЗВИТОЙ
ТУРБУЛЕНТНОСТИ. ПРОБЛЕМА
ИНФРАКРАСНО-СУЩЕСТВЕННЫХ
ПОПРАВOK К УРАВНЕНИЮ НАВЬЕ–СТОКСА**

В рамках ренормгруппового подхода к стохастической теории развитой турбулентности рассматривается проблема возможных ИК-существенных поправок к уравнению Навье–Стокса. Сформулирован точный критерий “реальной ИК-существенности” поправок. В соответствии с ним выполнена проверка ИК-существенности для некоторых семейств составных операторов. Все они оказались реально ИК-несущественными при любых значениях РГ-параметра разложения ε , что подтверждает отсутствие кроссовера и возможность экстраполяции результатов РГ-анализа, справедливых при асимптотически малых ε , в область физических значений $\varepsilon > 2$.

1. ВВЕДЕНИЕ

В стохастической формулировке теории изотропной развитой турбулентности несжимаемой вязкой жидкости рассматривается уравнение Навье–Стокса с внешней случайной силой [1, 2]

$$\mathcal{D}_t \varphi_i = \nu_0 \Delta \varphi_i - \partial_i p + f_i, \quad \mathcal{D}_t \equiv \partial_t + (\varphi \cdot \partial). \quad (1)$$

Здесь φ – поперечное (в силу условия несжимаемости $\partial_i \varphi_i = 0$) векторное поле скорости, p и f – давление и поперечная случайная сила в расчете на единицу массы (все эти величины зависят от $x \equiv t, \mathbf{x}$), ν_0 – коэффициент вязкости, Δ – лапласиан. Сила f считается гауссово-распределенной с нулевым средним и коррелятором

$$\langle f_i(x) f_j(x') \rangle = \frac{1}{(2\pi)^d} \delta(t - t') \int d\mathbf{k} P_{ij}(\mathbf{k}) d(k) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}, \quad (2)$$

в котором $P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ – поперечный проектор, d – размерность пространства $\mathbf{x}$, $d(k)$ – некоторая функция $k \equiv |\mathbf{k}|$ и параметров модели. Случайная сила имитирует компенсирующую диссипацию накачку энергии в систему от взаимодействия с

крупномасштабными движениями. Средняя мощность накачки W связана с функцией $d(k)$ в (2) соотношением

$$W = \frac{(d-1)}{2(2\pi)^d} \int d\mathbf{k} \cdot d(k). \quad (3)$$

В реалистической модели накачка должна быть инфракрасной (ИК), т.е. основной вклад в интеграл (3) должен набираться от области малых $k \leq m$, где $m \equiv L^{-1}$ – обратный внешний масштаб турбулентности.

Функция $d(k)$ в (2) может быть выбрана в виде

$$d(k) = D_0 k^{4-d-2\varepsilon} h(m/k), \quad h(0) = 1, \quad D_0 \equiv g_0 \nu_0^3, \quad (4)$$

где g_0 – затравочная константа связи (“заряд”), h – произвольная достаточно гладкая функция, $\varepsilon > 0$ – параметр, аналогичный $\varepsilon = 4 - d$ в теории критического поведения [3]. В отличие от последней, где физическое значение $\varepsilon = 1$ единственно (оно отвечает реальному трехмерному пространству), в модели (4) вся область $\varepsilon > 2$ соответствует реальной ИК-накачке. При $0 < \varepsilon < 2$ накачка (4) ультрафиолетовая (УФ), тогда в (3) подразумевается УФ-обрезание на величине порядка обратной диссипационной длины $k_d \equiv l_d^{-1} = (W/\nu_0^3)^{1/4}$.

Стохастическая задача (1)–(4) допускает формулировку в виде некоторой мультипликативно-ренормируемой квантово-полевой модели [4]. Соответствующие уравнения ренормгруппы (РГ) имеют в области физических значений параметров $D_0, \nu_0 > 0$ ИК-устойчивую неподвижную точку. Это позволяет использовать аппарат РГ для изучения ИК-поведения теории (обоснование колмогоровского скейлинга, расчет критических размерностей простых полей и составных операторов в виде ε -разложений и др.).

В ряде работ, например [4–6], в различном контексте обсуждались возможные границы применимости результатов, полученных на основе метода РГ, связанные с предполагаемым возникновением при $\varepsilon \geq 2$ дополнительных ИК-существенных параметров теории. Поясним кратко суть проблемы.

Уравнение Навье–Стокса имеет феноменологический характер, и в его правую часть можно в принципе ввести не нарушающую галилееву инвариантность добавку вида $aF(\varphi)$, где “составной оператор” $F(\varphi)$ содержит старшие степени скорости и производных, “источник” a – некоторая функция параметров теории (обсуждение явного вида и физической природы подобных добавок см., например, в [7–9]). При этом в корреляционных функциях появляется дополнительный аргумент, который в ИК-асимптотике приобретает вид $\xi \simeq ak^{-\Delta_a}$, где k – волновое число, Δ_a – критическая размерность величины a , вычисляемая методом РГ в виде ряда по ε .

Добавка aF и величины a , F называются “ИК-существенными по Вильсону”, если $\Delta_a > 0$, и несущественными при $\Delta_a < 0$. Для существенной добавки аргумент ξ в ИК-асимптотике $k \rightarrow 0$ неограниченно возрастает. Поэтому такое “взаимодействие” нельзя рассматривать как малое возмущение, а необходимо учитывать с самого начала при РГ-анализе теории, что может полностью изменить критический режим.

При асимптотически малых ε любая добавка такого рода заведомо несущественна, но с ростом ε она может в принципе стать существенной при некотором конечном значении $\varepsilon = \varepsilon_c$. Тогда при переходе через ε_c будет происходить полная смена критического

режима (“кроссовер”), поскольку новая нелинейность при $\varepsilon > \varepsilon_c$ становится более важной, чем исходная. Если бы такое явление для некоторого оператора F имело место при $0 < \varepsilon \leq 2$, то это означало бы, что исходная модель (1) непригодна для описания ИК-асимптотики в области реальной ИК-накачки $\varepsilon > 2$.

Это серьезная проблема, существующая и в теории критического поведения. Фактически речь идет об обосновании одного из главных постулатов РГ-теории – возможности экстраполяции справедливых для малых ε результатов в область реальных $\varepsilon \sim 1$. Полное решение задачи явно выходит за пределы возможностей современной теории, поскольку оно требует точного знания всех критических размерностей Δ_a , связанных с разрешенными по симметрии составными операторами F , тогда как практически эти размерности известны лишь для простейших операторов и лишь в форме начальных отрезков ε -разложений. Поэтому возможность экстраполяции на реальное значение ε остается в теории критического поведения правдоподобной гипотезой, справедливость которой оправдывается лишь результатами.

Такой вопрос для модели (1)–(4) был впервые поставлен в работе [4], где обсуждались допустимые по галилеевой инвариантности классы добавочных операторов $F_1 \equiv (\nabla_t \varphi)^n$, $F_2 \equiv \partial(\partial\varphi)^n$. Выполнив оценку по величине канонических размерностей d_a (вместо неизвестных точных критических размерностей $\Delta_a = d_a + O(\varepsilon)$), авторы [4] нашли, что все операторы F_2 становятся существенными непосредственно на границе $\varepsilon = 2$. Оценка по каноническим размерностям, конечно, не является удовлетворительной, что отмечалось и в [4]: во-первых, из-за вклада аномалий величины d_a и Δ_a могут сильно отличаться; во-вторых, канонические размерности d_a (в отличие от критических Δ_a) зависят от формы записи исходных уравнений (в работе [4] амплитудный множитель D_0 в корреляторе случайной силы с помощью растяжения полей был переведен в коэффициент при нелинейности в уравнении (1), что и придало критическим размерностям зависимость от ε).

В работах [5, 6] обсуждались нелокальные ИК-существенные при $\varepsilon \geq 2$ операторы, которые возникают как добавки к уравнению (1) при использовании РГ в форме рекурсионных соотношений Вильсона [6] или близкой к ней техники итерационного усреднения по модам околосеточных масштабов [7]. В квантово-полевой формулировке РГ такие добавки не возникают благодаря мультипликативной ренормируемости модели.

В настоящей работе мы рассмотрим вопрос об ИК-существенных поправках в модели (1)–(4) более подробно, отметим существенные отличия от теории критического поведения и получим ряд точных результатов для критических размерностей Δ_a .

В разделе 2 приводятся необходимые сведения о квантово-полевой формулировке, ренормировке и решении уравнений РГ модели (1)–(4), в разделе 3 рассматриваются общие соотношения для составных операторов.

В разделе 4 вопрос об ИК-существенных параметрах в теории турбулентности рассмотрен в общем виде. Показано, что наличие в задаче нескольких существенно различных характерных масштабов (внешний и внутренний масштабы турбулентности, межмолекулярное расстояние) приводит к специфическому для теории турбулентности механизму “подавления” ИК-существенности параметров: формально существенный параметр может тем не менее не порождать в корреляционных функциях растущего аргумента. Получено в общем виде условие “реальной ИК-существенности” параметров,

которое оказывается менее жестким, чем условие “формальной ИК-существенности” ($\Delta_a < 0$): реально существенный параметр обязательно является и формально существенным, но не наоборот.

В разделе 5 рассмотрены поправки к уравнению (1), порождаемые всевозможными составными операторами $F = \nabla_t^n \varphi^m$ (с произвольным размещением производных ∇_t на полях φ), включая семейство $F_1 = (\nabla_t \varphi)^n$ работы [4]. Связанные с ними критические размерности удается найти точно, используя галилееву инвариантность задачи. Все такие поправки становятся формально ИК-существенными в интервале $9/4 \leq \varepsilon \leq 3$, но остаются реально несущественными при любых конечных ε .

В разделе 6 исследовано семейство векторных галилеево-инвариантных операторов канонической размерности 5, порождающих младшие по размерности поправки к уравнению (1). Использование галилеевой инвариантности и уравнений Швингера позволяет из 8 связанных с ними размерностей Δ_a найти точно 4; остальные найдены в первом порядке ε -разложения путем прямых вычислений в однопетлевом приближении. Хотя один из этих операторов становится формально существенным еще до достижения границы $\varepsilon = 2$ области ИК-накачки, все они являются реально несущественными при любых значениях ε .

Полученные результаты позволяют надеяться, что в области ИК-накачки существует некоторый, пусть конечный, интервал $2 < \varepsilon < \varepsilon_c$, в котором реально ИК-существенных операторов нет и модель (1)–(4) тем самым является пригодной для описания ИК-асимптотик развитой турбулентности на основе метода РГ, а результаты РГ-анализа при асимптотически малых ε тем самым можно экстраполировать в область конечных $\varepsilon \sim 1$, $\varepsilon < \varepsilon_c$.

2. КВАНТОВО-ПОЛЕВАЯ ФОРМУЛИРОВКА. УРАВНЕНИЯ РГ

Стохастическая задача (1)–(4) эквивалентна квантовой теории двух поперечных векторных полей $\Phi \equiv \varphi, \varphi'$ с функционалом действия [4]

$$S(\Phi) = \frac{1}{2} \varphi' D^f \varphi' + \varphi' [-\mathcal{D}_t \varphi + \nu_0 \Delta \varphi], \quad (5)$$

в котором D^f – коррелятор (2) с функцией (4). Нужные суммирования по индексам полей и интегрирования по их аргументам $x = t, \mathbf{x}$ в (5) и аналогичных формулах ниже подразумеваются.

В модели (5) для каждой величины F можно ввести две независимые канонические размерности – импульсную d_F^k и частотную d_F^ω , а по ним – суммарную $d_F = d_F^k + 2d_F^\omega$ [10]. По определению $d_{\mathbf{X}}^k = d_t^k = -1$, $d_t^\omega = d_{\mathbf{X}}^\omega = 0$, а размерности прочих величин находятся из требования безразмерности (импульсной и частотной отдельно) всех членов действия (4). Сведения о размерностях приводятся в табл. 1 (в нее включены и ренормированные параметры, которые появятся ниже).

Таблица 1

F	φ	φ'	m, μ	ν, ν_0	g_0	g
d_F^k	-1	$d + 1$	1	-2	2ε	0
d_F^ω	1	-1	0	1	0	0
d_F	1	$d - 1$	1	0	2ε	0

Модель (5) логарифмична (суммарная размерность константы связи g_0 равна нулю) при $\varepsilon = 0$, УФ-расходимости имеют вид полюсов по ε в корреляционных функциях полей $\Phi = \varphi, \varphi'$. Для их полного устранения при всех $d > 2$ достаточно одного контрчлена $\varphi' \Delta \varphi$ [4], что эквивалентно мультипликативной ренормировке вида

$$\nu_0 = \nu Z_\nu, \quad g_0 = g \mu^{2\varepsilon} Z_g, \quad Z_g = Z_\nu^{-3}. \quad (6)$$

Здесь μ – ренормировочная масса в схеме минимальных вычитаний (MS), g, ν – ренормированные аналоги параметров g_0, ν_0 , $Z = Z(g, \varepsilon, d)$ – константы ренормировки. Их связь в (6) – следствие отсутствия ренормировки вклада с D^f в (5); ренормировки полей и “массы” $m_0 = m$ не требуется. Ренормированное действие имеет вид

$$S_R(\Phi) = \frac{1}{2} \varphi' D^f \varphi' + \varphi' [-\mathcal{D}_t \varphi + \nu Z_\nu \Delta \varphi], \quad (7)$$

коррелятор D^f в (7) выражен через g, ν, μ , при этом $g_0 \nu_0^3 = g \nu^3 \mu^{2\varepsilon}$ в силу (6). По константам ренормировки (6) находятся РГ-функции – β -функция $\beta \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu g$ и аномальная размерность $\gamma_\nu \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_\nu$, где $\tilde{\mathcal{D}}_\mu \equiv \mu \frac{\partial}{\partial \mu}$ при фиксированных g_0, ν_0 . В однопетлевом приближении имеем [10]

$$\gamma_\nu(g) = ag + O(g^2), \quad a = \frac{(d-1)}{4(d+2)} \frac{S_d}{(2\pi)^d}, \quad (8)$$

где $S_d \equiv 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ – площадь поверхности единичной сферы в d -мерном пространстве.

Уравнения РГ для корреляционных функций $G_n = \langle \Phi \dots \Phi \rangle$ имеют вид

$$\mathcal{D}_{\text{РГ}} G_n = 0, \quad \mathcal{D}_{\text{РГ}} \equiv \mathcal{D}_\mu + \beta(g) \partial_g - \gamma_\nu(g) \mathcal{D}_\nu, \quad (9)$$

где $\mathcal{D}_y \equiv y \partial / \partial y$ для любой переменной y . Они имеют ИК-устойчивую неподвижную точку $g_* = 2\varepsilon/3a + O(\varepsilon^2)$, в которой $\beta(g_*) \equiv 0$, $\beta'(g_*) > 0$. Вытекающее из (6) соотношение $\beta = g(-2\varepsilon + 3\gamma_\nu)$ позволяет определить $\gamma_\nu^* \equiv \gamma_\nu(g_*) = 2\varepsilon/3$ точно (без поправок $\varepsilon^2, \varepsilon^3$ и т.д.). Критические размерности простых полей и времени выражаются через единственную аномальную размерность γ_ν^* и так же определяются точно: $\Delta_\varphi = 1 - 2\varepsilon/3$, $\Delta_{\varphi'} = d - 1 + 2\varepsilon/3$, $\Delta_t = -\Delta_\omega = -2 + 2\varepsilon/3$ [4, 10].

Рассмотрим решение уравнений РГ (9) на примере одновременного парного коррелятора скорости $G \equiv G_2 = \langle \varphi \varphi \rangle$ в $\mathbf{k}$ -представлении. По векторным индексам он кратен поперечному проектору, который для краткости будем опускать. Из соображений размерности в ренормированных переменных имеем (см. табл. 1)

$$G = \nu^2 k^{3-d} R(s, g, u), \quad s \equiv k/\mu, \quad u \equiv m/k, \quad (10)$$

где R – функция полностью безразмерных аргументов. Из уравнений РГ (9) для коррелятора (10) вытекает следующее “РГ-представление”:

$$G = \bar{\nu}^2 k^{3-d} R(1, \bar{g}, u), \quad (11)$$

в котором “инвариантные переменные” $\bar{g} = \bar{g}(s, g)$, $\bar{\nu} = \bar{\nu}(s, g, \nu)$ – первые интегралы уравнений (9), нормированные при $s = 1$ на g, ν , соответственно (тождество $\bar{u} = u$ следует из отсутствия в операторе $\mathcal{D}_{\text{РГ}}$ вклада $\mathcal{D}_m$). Инвариантные переменные связаны с

исходными затравочными g_0, ν_0 точными соотношениями

$$g_0 k^{-2\varepsilon} = \bar{g} Z_g(\bar{g}), \quad \nu_0 = \bar{\nu} Z_\nu(\bar{g}) \quad (12)$$

с теми же, что в (6), константами ренормировки.

Известно, что $\bar{g} \rightarrow g_*$ при $k \rightarrow 0$, поэтому ИК-асимптотика коррелятора (11) имеет вид

$$G \simeq \bar{\nu}_*^2 k^{3-d} R(1, g_*, u), \quad \bar{\nu}_* \equiv (D_0/k^{2\varepsilon} g_*)^{1/3}, \quad (13)$$

где выражение $\bar{\nu}_*$ для ИК-асимптотики величины $\bar{\nu}$ следует из (12) и связи констант ренормировки в (6).

3. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ СОСТАВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Под составным оператором $F \equiv F(x; \Phi)$ в дальнейшем понимается, как правило, локальный оператор, т.е. моном или полином, построенный из полей $\Phi = \varphi, \varphi'$ и их производных в одной точке $x = t, \mathbf{x}$, например $\varphi^n(x), \varphi'(x) \nabla_t \varphi(x)$ и т.п. (функциональный аргумент Φ для краткости будем обычно опускать). Из-за совпадения аргументов полей корреляционные функции с участием таких операторов содержат дополнительные УФ-расходимости, устранимые дополнительной процедурой УФ-ренормировки составных операторов. Операторы в общем случае ренормируются со смешиванием. Пусть $F_\alpha(x)$, $\alpha = 1, \dots, N$, – некоторый замкнутый относительно ренормировки набор операторов. УФ-конечными являются корреляционные функции ренормированных операторов $F_\alpha^R(x) \equiv [F_\alpha(x)]_R$, связанных с исходным набором формулой матричной мультипликативной ренормировки

$$F_\alpha(x) = \sum_{\beta=1}^N Z_{\alpha\beta} F_\beta^R(x), \quad (14)$$

или в матричной форме $F = Z_F F^R$, где $Z_F = \{Z_{\alpha\beta}\}$ – $N \times N$ -матрица констант ренормировки. По ней находится матрица аномальных размерностей

$$\gamma_F = Z_F^{-1} \tilde{\mathcal{D}}_\mu Z_F \quad (15)$$

и матрица критических размерностей набора F_α [10]

$$\Delta_F = d_F^k + \Delta_\omega d_F^\omega + \gamma_F^* = d_F - \gamma_\nu^* d_F^\omega + \gamma_F^*, \quad (16)$$

отвечающая скейлингу при фиксированных значениях затравочных параметров g_0, ν_0 . Здесь d_F^k, d_F^ω, d_F – диагональные матрицы канонических размерностей операторов F_α (равных сумме соответствующих размерностей составляющих F полей и производных) и $\gamma_F^* \equiv \gamma_F(g_*)$ – матрица (15) в неподвижной точке РГ.

Критические размерности семейства $\{F_\alpha\}$ суть собственные числа матрицы (16). Определенными критическими размерностями обладают некоторые конкретные линейные комбинации ренормированных операторов – “базисные” операторы

$$F_\alpha^{\text{bas}} = \sum_{\beta=1}^N U_{\alpha\beta} F_\beta^R, \quad (17)$$

где матрица $U_F = \{U_{\alpha\beta}\}$ такова, что $\Delta'_F = U_F \Delta_F U_F^{-1} + m \partial_m U_F \cdot U_F^{-1}$ диагональна.

В дальнейшем будем всегда считать, что диагональные элементы U_F равны единице. При таком дополнительном условии матрица U_F в (17) определяется однозначно (в отсутствие случайного вырождения), поэтому однозначно определены соответствие $F_\alpha \leftrightarrow F_\alpha^{\text{bas}}$ и понятие “ассоциированная с данным F_α критическая размерность”:

$$\Delta_\alpha \equiv \Delta_{\text{as}}[F_\alpha] \equiv \Delta[F_\alpha^{\text{bas}}]. \quad (18)$$

Пусть полный набор $\{F_\alpha\}$ разбит на два независимых поднабора $\{F_\beta\}$ и $\{F_\gamma\}$ таким образом, что любой оператор F_γ не примешивается к любому F_β . Тогда матрица Z_F является блочно-треугольной ($Z_{\beta\gamma} = 0$) и таковы же Δ_F и U_F . Следовательно, размерности Δ_β и соответствующие F_β^{bas} полностью определяются блоком $Z_{\beta\beta'}$, тогда как блок $Z_{\gamma\gamma'}$ определяет размерности Δ_γ , но не операторы F_γ^{bas} (последние содержат примесь F_β , определяемую элементами $U_{\gamma\beta}$).

С другой стороны, в разложении полных наборов $\{F_\alpha\}$ или $\{F_\alpha^R\}$ по базису $\{F_\alpha^{\text{bas}}\}$, операторы F_β^{bas} дают вклад в общем случае во все F_α , тогда как F_γ^{bas} входят только в разложения F_γ . В частности, если оператор типа F_γ единствен, то вклад ассоциированной с ним размерности Δ_γ возникает лишь в разложении самого F_γ и отсутствует во всех остальных F_β . Если при этом $Z_{\gamma\gamma} = 1$, то размерность Δ_γ дается формулой типа (16) с $\gamma_F^* = 0$, т.е. сводится к простой сумме критических размерностей составляющих моном F_γ полей и производных. Примером являются все “исключительные” операторы, обсуждаемые в разделе 5.

По величине d_F все мономы группируются в конечные семейства. Если к семейству с данным d_F присоединить все “младшие” семейства с меньшими размерностями $d_F - 2$, $d_F - 4$ и т.д., получим замкнутую систему, все мономы в которой могут смешиваться при ренормировке только между собой. Но если интересоваться лишь критическими размерностями, ассоциированными с операторами канонической размерности d_F , “младшие” операторы можно игнорировать, поскольку они являются “операторами типа F_β ” (“старшие” с d_F к ним не примешиваются). При этом вычисление $\gamma\gamma'$ -элементов матриц Z_F и γ_F , не зависящих от параметра m , можно проводить прямо в “безмассовой” теории с $m = 0$, получаемой заменой $h \rightarrow 1$ в функции (4). (Заметим, что это отнюдь не означает существования конечного предела $m \rightarrow 0$ в самих корреляционных функциях.) По тем же причинам можно не рассматривать операторы – производные вида ∂F (операторы, не сводящиеся к производным, не могут к ним примешиваться).

4. ФОРМАЛЬНО И РЕАЛЬНО ИК-СУЩЕСТВЕННЫЕ ПАРАМЕТРЫ

Добавка $a_0 \tilde{F}(x; \varphi)$ к правой части стохастического уравнения (1) порождает добавку ΔS к функционалу действия (5):

$$\Delta S = a_0 \int dx F(x; \Phi), \quad F(x; \Phi) \equiv \varphi'(x) \tilde{F}(x; \varphi). \quad (19)$$

Предположим для простоты, что составной оператор $F \equiv \varphi' \tilde{F}$ мультипликативно ренормируем, $F = Z_F F^R$. Равенство $a F^R = a_0 F$ можно считать определением ренорми-

рованного источника a , что при обычной форме записи $a_0 = aZ_a$ эквивалентно равенству $Z_a = Z_F^{-1}$ для констант ренормировки и $\gamma_a = -\gamma_F$ для аномальных размерностей (15). Отсюда, а также из требования канонической и критической безразмерности форм

$$\int dx \cdot a_0 F = \int dx \cdot a F^R$$

вытекают “теневые” соотношения для размерностей оператора F и источника a :

$$d_a^k + d_F^k = d, \quad d_a^\omega + d_F^\omega = 1, \quad \Delta_a + \Delta_F = d + \Delta_\omega. \quad (20)$$

В операторе $D_{\text{РГ}}$ в (9) появляется дополнительное слагаемое $-\gamma_a D_a$, а в представлении (10) для коррелятора – безразмерный аргумент $\xi \equiv a/(k^{d_a} \nu^{d_a^\omega})$. В РГ-представлении (11) он заменяется соответствующей инвариантной переменной $\bar{\xi} = \bar{a}/(k^{d_a} \bar{\nu}^{d_a^\omega})$, в которой $\bar{\nu}$ – инвариантная вязкость (см. раздел 2) и $\bar{a}$ – инвариантный аналог затравочной переменной a_0 . Они связаны аналогичным (12) соотношением

$$a_0 = \bar{a} Z_a(\bar{g}). \quad (21)$$

Поведение инвариантной переменной $\bar{a}$ при $k \rightarrow 0$ находится с помощью следующего асимптотического выражения для констант ренормировки:

$$Z_a(\bar{g}) \cong_{k \rightarrow 0} C g_0^{-\gamma_a^*/2\varepsilon} k^{\gamma_a^*} \quad (22)$$

(здесь и далее C обозначает несущественные коэффициенты, зависящие в общем случае от параметров ε , d и явного вида функции h в (4)). Заметим, что асимптотическое выражение (13) для $\bar{\nu}$ получается из (12), (22) с учетом точного равенства $\gamma_\nu^* = 2\varepsilon/3$.

Из (13), (22) для ИК-асимптотики $k \rightarrow 0$ инвариантной переменной $\bar{\xi}$ находим

$$\bar{\xi} \cong C a_0 g_0^{-d_a^\omega/3 + \gamma_a^*/2\varepsilon} \cdot \nu_0^{-d_a^\omega} k^{-\Delta_a}, \quad (23)$$

где Δ_a дается выражением (16) с заменой $F \rightarrow a$.

Аргумент $\bar{\xi}$ неограниченно возрастает при $k \rightarrow 0$ и фиксированных значениях параметров a_0, g_0, ν_0 , если $\Delta_a > 0$ – это и есть условие (формальной) ИК-существенности поправки $a_0 \tilde{F}$, параметра a_0 и оператора F . В задачах теории критического поведения, где параметры типа a_0, g_0 выражаются через один и тот же характерный масштаб (имеющий порядок межмолекулярного расстояния l_0), а ИК-асимптотика отвечает области $kl_0 \ll 1$, условия формальной и реальной существенности совпадают. В теории турбулентности дело обстоит иначе из-за наличия нескольких характерных масштабов; для более аккуратной оценки величины $\bar{\xi}$ необходимо принять во внимание следующие дополнительные соображения:

1. Нас интересует не абсолютная асимптотика $k \rightarrow 0$, а инерционный интервал $m \ll k \ll k_d$ и “энергосодержащая область” $k \leq m$, где $m = L^{-1}$ и $k_d = l_d^{-1} = (W/\nu_0^3)^{1/4}$ – обратные внешний и внутренний масштабы турбулентности. В дальнейшем при оценках полагаем $k = m$.

2. Из выражений (3), (4) в области ИК-накачки $\varepsilon > 2$ для g_0 получаем следующую оценку через характерные масштабы турбулентности, см. [11]: $g_0 \cong C m^{2\varepsilon} (k_d/m)^4$.

3. По физическому смыслу добавка $a_0 \tilde{F}$ к уравнению Навье–Стокса определяется только микроструктурой жидкости и не имеет отношения к характеристикам турбулентного течения. Поэтому в представлении $a_0 \cong k_0^{d_a} \nu_0^{d_a^\omega}$, следующим из соображений размерности, волновое число $k_0 = l_0^{-1}$ не связано с характерными турбулентными масштабами и имеет порядок обратного межмолекулярного расстояния, т.е. $k_0 \gg k_d \gg m$. Для оценок по порядку величины можно принять $l_0 \cong \nu_0/v_0$, где v_0 – скорость звука в жидкости (равная по порядку величины скорости теплового движения молекул).

Подставив эти оценки для a_0 , g_0 в (23) и выразив результат через два безразмерных параметра – число Маха $\text{Ma} \equiv v/v_0$ и число Рейнольдса $\text{Re} \equiv v/m\nu_0$, где $v \sim (W/m)^{1/3}$ – среднеквадратичная скорость, получаем

$$\bar{\xi} \cong C(\text{Ma})^{-d_a} (\text{Re})^{d_a - d_a^\omega + 3\gamma_a^*/2\varepsilon}. \quad (24)$$

Использование приближения несжимаемой жидкости подразумевает выполнение условия $\text{Ma} \ll 1$, поэтому первый множитель в (24) всегда мал (с помощью данных табл. 1 и соотношений (20) нетрудно убедиться, что для поправок $a_0 \tilde{F}$, содержащих старшие по сравнению с (1) степени скорости и производных, обязательно $d_a \leq -2$). Поэтому аргумент $\bar{\xi}$ может быть большим, только если второй множитель в (24) велик, откуда с учетом $\text{Re} \gg 1$ получаем условие реальной ИК-существенности параметра a :

$$\tilde{\Delta}_a \equiv d_a - d_a^\omega + 3\gamma_a^*/2\varepsilon = d_a + 3(-d_a^\omega \gamma_\nu^* + \gamma_a^*)/2\varepsilon > 0. \quad (25)$$

Сравнение выражений (16) и (25) приводит к соотношению $\tilde{\Delta}_a = d_a + 3(\Delta_a - d_a)/2\varepsilon$. Из него, в частности, следует, что если некоторый оператор и соответствующий источник a с ростом ε становятся формально существенными при некотором значении $\varepsilon = \varepsilon_c > 2$ (т.е. $\Delta_a = 0$ при $\varepsilon = \varepsilon_c$), то они при этом продолжают оставаться реально несущественными, т.к. $\tilde{\Delta}_a = (1 - 3/2\varepsilon)d_a < 0$ при $\varepsilon = \varepsilon_c$, и могут стать реально существенными лишь при некотором $\varepsilon'_c > \varepsilon_c$. В следующих разделах мы встретим примеры операторов, которые, становясь формально существенными при некоторых конечных ε_c , остаются реально несущественными при любых значениях ε .

Подчеркнем так же, что ИК-существенность поправки $a \tilde{F}$ определяется критической размерностью входящего в действие оператора $\varphi' \tilde{F} \equiv F$, которая вовсе не обязательно сводится к сумме размерностей множителей φ' и F .

5. СЛЕДСТВИЯ ГАЛИЛЕЕВОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ. ПОПРАВКИ ВИДА $\nabla_t^n \varphi^m$

Рассмотрим обобщенные галилеевы преобразования полей $\Phi(x) \rightarrow \Phi_v(x)$ с произвольной переменной скоростью $v \equiv \{v_i(t)\}$, достаточно хорошо убывающей при $|t| \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \varphi_v(x) &= \varphi(x_v) - v(t), & \varphi'_v(x) &= \varphi'(x_v), \\ x &\equiv (t, \mathbf{x}), & x_v &\equiv (t, \mathbf{x} + \mathbf{u}(t)), & \mathbf{u}(t) &= \int_{-\infty}^t dt' \mathbf{v}(t'). \end{aligned} \quad (26)$$

Строгой галилеевой инвариантностью будем называть равенства типа $H(\Phi) = H(\Phi_v)$ для функционала и $F(x, \Phi_v) = F(x_v, \Phi)$ для составного оператора, если они выполняются для произвольного преобразования (26), а просто галилеевой инвариантностью — те же свойства, но выполняющиеся для обычных преобразований с $v = \text{const}$, $u = vt$. Строго инвариантными являются лишь операторы, построенные из инвариантных сомножителей φ' , $\partial\varphi$ и их ковариантных $(\partial$ и $\nabla_t)$ производных, например $\partial\varphi \cdot \partial\varphi$, $\varphi' \nabla_t \partial\varphi$. Сомножитель $\nabla_t \varphi$ инвариантен, но не строго, а “сомножители” φ и ∂_t неинвариантны.

Хотя функционал действия (7) инвариантен лишь нестрого, поскольку для него $S_R(\Phi_v) = S_R(\Phi) + \varphi' \partial_t v$, это не мешает использовать обобщенные преобразования (26) для получения точной информации о критических размерностях различных составных операторов, см. [12–15]. Ниже мы приведем наиболее простую и общую формулировку следствий галилеевой инвариантности, полученную в [13] (см. также [14]).

В общем случае в компактных обозначениях $F(x; \Phi) \equiv F(x)$, $F(x; \Phi_v) \equiv F_v(x)$ имеем

$$F_v(x) = F(x_v) + \sum_{k \geq 1} v^k F_k(x_v) + \dots, \quad (27)$$

где многоточием обозначены возможные вклады с производными v по t . Нарушающая галилееву инвариантность добавка — некоторый полином по скорости $v(t)$ и ее производным, коэффициенты типа F_k — локальные (для локального F) операторы младшей размерности, у них подразумеваются векторные индексы, сворачивающиеся с индексами v . Для любого конкретного F нетрудно написать полное выражение (27), в нем всегда конечное число вкладов. Как показано в [13], операция ренормировки $F \rightarrow F^R$ в схеме MS перестановочна с преобразованием (26):

$$(F^R)_v(x) = (F_v)^R(x) = F^R(x_v) + \sum_{k \geq 1} v^k F_k^R(x_v) + \dots, \quad (28)$$

$$(\text{контрчлены } F(x))_v = \text{контрчлены } (F_v(x)).$$

Второе равенство для вклада операторных контрчленов к F следует из первого и определения $F^R = F + \text{контрчлены } F$.

Рассмотрим некоторые следствия соотношений (28).

1. Для любого (строго) инвариантного оператора F соответствующий ренормированный оператор F^R и сумма контрчленов также (строго) инвариантны. Таким образом, ассоциированные с инвариантными операторами критические размерности и базисные элементы F^{bas} полностью определяются смешиванием инвариантных операторов между собой (т.е. они являются “операторами типа F_β ”, см. раздел 3).

2. Если F неинвариантен, но нарушающие галилееву инвариантность вклады F_v УФ-конечны, то сумма его контрчленов инвариантна, т.е. $F^R = F + \text{инвариантные контрчлены}$. (Пример: $F = \varphi \Delta \varphi$, для него $F_v = F - v \Delta \varphi$, добавка $-v \Delta \varphi$ УФ-конечна.)

3. Будем называть базисный элемент F (моном или полином) некоторого полного набора $\{F_\alpha\}$ “исключительным”, если в его галилеевом преобразовании (27) есть “исключительный” УФ-конечный вклад, который не может порождаться никаким другим неренормированным базисным элементом из того же набора. Тогда F не может быть

контрчленом, т.е. не может примешиваться при ренормировке ни к самому себе, ни к другим элементам. Тем самым он является в наборе $\{F_\alpha\}$ единственным “оператором типа F_γ ”, а соответствующий элемент матрицы Z_F равен единице, $Z_{\gamma\gamma} = 1$. Поэтому ассоциированная с F критическая размерность равна простой сумме составляющих его “сомножителей” (полей и производных), см. раздел 3. (Следует заметить, что понятие исключительности может зависеть от выбора базиса в наборе $\{F_\alpha\}$; практически наиболее удобным является выбор, при котором возникает наибольшее число исключительных элементов.)

Рассмотрим теперь конкретные поправки $a_0 \tilde{F}(x, \varphi)$ к уравнению (1), порождаемые всевозможными операторами вида $\tilde{F} = \nabla_t^n \varphi^m$ (подразумевается произвольное размещение производных ∇_t на полях φ). Дальнейшие рассуждения верны для любых значений m, n и любых вариантов свертки по векторным индексам; однако по физическому смыслу добавок к уравнению Навье–Стокса нас сейчас интересуют (нестрого) галилеево-инвариантные векторные операторы, для которых m нечетно и выполнено условие $n \geq m$ (на каждое поле φ действует хотя бы одна производная). Кроме того, следует исключить из рассмотрения оператор с $n = m = 1$, поскольку он не является поправкой, а присутствует в исходном уравнении (1).

В функционале действия (5) такие добавки порождают вклады типа (19) с $F = \varphi' \nabla_t^n \varphi^m$. Нетрудно видеть, что все такие операторы являются исключительными, т.к. порождают в вариации (27) исключительные УФ-конечные слагаемые вида $\varphi' \partial_t^n v^m$ (запись символическая). Поэтому для ассоциированных с ними размерностей $\Delta_F(n, m) \equiv \Delta_{as}[\varphi' \nabla_t^n \varphi^m]$ по общему правилу (см. выше) находим

$$\begin{aligned} \Delta_F(n, m) &= \Delta_{\varphi'} + n\Delta_\omega + m\Delta_\varphi = \\ &= (d - 1 + 2n + m) + (2\varepsilon/3)(1 - n - m), \end{aligned} \quad (29)$$

а для размерностей $\Delta_a(n, m)$ соответствующих им источников из соотношений (20) получаем

$$\Delta_a(n, m) = (3 - 2n - m) + (2\varepsilon/3)(n + m - 2). \quad (30)$$

Нетрудно проверить, что все такие поправки становятся формально ИК-существенными ($\Delta_a(n, m) = 0$) при $\varepsilon_c = 3(2n + m - 3)/2(n + m - 2)$; все эти критические значения ε лежат в интервале $9/4 \leq \varepsilon \leq 3$, т.е. уже в области ИК-накачки $\varepsilon > 2$. Более того, все они оказываются реально несущественными при любых конечных ε , поскольку, как можно убедиться с помощью формулы (25), для них $\tilde{\Delta}_a(n, m) = 1 - n < 0$.

Таким образом, поправки вида $\nabla_t^n \varphi^m$ к уравнению (1), хотя и становятся формально существенными при не слишком больших значениях ε в интервале $[9/4; 3]$, остаются реально несущественными при любых ε и не препятствуют тем самым экстраполяции результатов РГ-анализа, полученных для асимптотически малых ε , в область сколь угодно больших реальных $\varepsilon > 2$.

6. ПОПРАВКИ, СВЯЗАННЫЕ С СОСТАВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ КАНОНИЧЕСКОЙ РАЗМЕРНОСТИ $d_F = 5$

В этом разделе мы рассмотрим младшие по размерности поправки к уравнению (1), порождаемые галилеево-инвариантными векторными локальными составными опера-

торами канонической размерности $d_F = 5$ (для слагаемых уравнения (1) $d_F = 3$, векторных операторов с $d_F = 4$ не существует). Имеются 8 независимых операторов нужного типа:

$$\begin{aligned} \Delta^2 \varphi_i, \quad \Delta \varphi_k \cdot \partial_k \varphi_i, \quad \Delta \varphi_k \cdot \partial_i \varphi_k, \quad \partial_s \varphi_m \cdot \partial_s \partial_m \varphi_i, \\ \nabla_t \Delta \varphi_i, \quad \nabla_t^2 \varphi_i, \quad \nabla_t \varphi_k \cdot \partial_i \varphi_k, \quad \nabla_t \varphi_k \cdot \partial_k \varphi_i. \end{aligned} \quad (31)$$

Они порождают в действии (5) добавки вида $\varphi'_i \tilde{F}_i$; согласно результатам раздела 4 именно критические размерности этих скалярных операторов с $d_F = d + 4$ определяют ИК-существенность поправок (31). Первые пять векторов в (31) отвечают строго инвариантным (см. раздел 5) операторам

$$\begin{aligned} F_1 = \varphi'_i \Delta^2 \varphi_i, \quad F_2 = \varphi'_i \Delta \varphi_k \cdot \partial_k \varphi_i, \quad F_3 = \varphi'_i \Delta \varphi_k \cdot \partial_i \varphi_k, \\ F_4 = \varphi'_i \partial_s \varphi_m \cdot \partial_s \partial_m \varphi_i, \quad F_5 = \varphi'_i \nabla_t \Delta \varphi_i, \end{aligned} \quad (32)$$

остальные три – не строго инвариантным:

$$F_6 = \varphi'_i \nabla_t^2 \varphi_i, \quad F_7 = \varphi'_i \nabla_t \varphi_k \cdot \partial_i \varphi_k, \quad F_8 = \varphi'_i \nabla_t \varphi_k \cdot \partial_k \varphi_i. \quad (33)$$

Мы не включаем в рассмотрение операторы-производные, например, допустимый по симметрии моном $\varphi'_k \cdot \partial_i \partial_k \varphi_s \cdot \partial_s \varphi_i = \partial_k [\varphi'_k \cdot \partial_i \varphi_s \cdot \partial_s \varphi_i]/2$, т.к. они порождают лишь исчезающие вклады в (19) и не нужны для определения критических размерностей нетривиальных (не сводящихся к производным) операторов (32), (33), см. раздел 3.

Критические размерности, ассоциированные с мономами (33), удается найти точно благодаря тому, что они не являются строго инвариантными. Сразу скажем, что все эти размерности совпадают и равны простым суммам критических размерностей входящих в F_6 – F_8 полей и производных, именно

$$\Delta_F = d + 4 - 4\varepsilon/3, \quad \Delta_a = -2 + 2\varepsilon/3, \quad \tilde{\Delta}_a = -1. \quad (34)$$

Из (34) ясно, что все они являются формально ИК-существенными при $\varepsilon > 3$ и реально несущественными при любых ε .

Моном F_6 был рассмотрен среди прочих в разделе 5. Рассмотрим галилеево преобразование (27) монома F_7 . Оно имеет вид (аргументы полей для краткости опускаются)

$$(F_7)_v = F_7 + \partial_t v_i \cdot \varphi'_k \partial_k \varphi_i. \quad (35)$$

Согласно (28) галилеево преобразование соответствующего ренормированного оператора F_7^R имеет вид

$$(F_7^R)_v = F_7^R + \partial_t v_i [\varphi'_k \partial_k \varphi_i]^R. \quad (36)$$

Обсудим теперь ренормировку входящего в (36) оператора $\varphi'_k \partial_k \varphi_i = \partial_k (\varphi'_k \varphi_i)$. Галилеева вариация $\varphi'_k v_i$ монома $\varphi'_k \varphi_i$ УФ-конечна, поэтому согласно следствию 2 к соотношениям (28) контрчлены к нему (строго) инвариантны. Из соображений размерности и тензорных свойств тогда имеем

$$[\varphi'_k \varphi_i]^R = \varphi'_k \varphi_i + C_1 \partial_k \varphi'_i + C_2 \partial_i \varphi'_k$$

(здесь и ниже C_i обозначают различные УФ-расходящиеся, т.е. содержащие полюсы по ε , коэффициенты), откуда

$$[\varphi'_k \partial_k \varphi_i]^R = \varphi'_k \partial_k \varphi_i + C_1 \Delta \varphi'_i. \quad (37)$$

Таким образом, галилеево преобразование оператора F_7 не является УФ-конечным, и этот оператор не является, строго говоря, исключительным в смысле раздела 5. Однако в данном случае оказывается достаточной лишь небольшая модификация рассуждений, приводящих к следствию 3. Действительно, из (35), (37) вытекает наличие в галилеевом преобразовании (36) оператора F_7^R слагаемого $\partial_t v_i \cdot \Delta \varphi'_i$ с УФ-расходящимся коэффициентом C , которое может порождаться лишь вкладом в F_7^R вида $\nabla_t \varphi_i \cdot \Delta \varphi'_i = \partial_s [\nabla_t \varphi_i \cdot \partial_s \varphi'_i] - \partial_s \nabla_t \varphi_i \cdot \partial_s \varphi'_i$, представимым в виде производной (первое слагаемое) и строго инвариантного монома (второе). Тем самым оператор F_2 оказывается исключительным с точностью до несущественного сейчас вклада производной, откуда по общему правилу (см. следствие 3) находится ассоциированная с ним размерность (34).

Доказательство для F_8 выполняется таким же образом. Поясним лишь равенство $[\varphi'_k \partial_i \varphi_k]^R = \varphi'_k \partial_i \varphi_k + C \Delta \varphi_i$ для монома, возникающего в аналогичном (36) преобразовании F_8 . Из соображений размерности, тензорной структуры и галилеевой инвариантности имеем $[\varphi'_k \partial_i \varphi_k]^R = C_1 \varphi'_k \partial_i \varphi_k + C_2 \nabla_t \varphi'_i + C_3 \Delta \varphi'_i$ с УФ-расходящимися коэффициентами C_i . Заметим теперь, что в силу поперечности полей производную в функционале взаимодействия $\varphi'(\varphi \partial)\varphi$ в (5) можно интегрированием по частям перебросить на поле φ' . Поэтому во всех диаграммах теории возмущений, определяющих контрчлены к рассматриваемому моному, производная будет выделяться на каждый внешний “хвост” φ' , и это поле будет входить в контрчлены только под знаком производной ∂ . Отсюда немедленно следует $C_1 = 1$, $C_2 = 0$.

Обратимся теперь к строго инвариантным операторам (32). По изложенным выше причинам удобно перейти от (32) к новому базису, у элементов которого (мы сохраним для них прежнее обозначение F_i) одна производная ∂ действует на каждое поле φ'_i :

$$\begin{aligned} F_1 &= \partial_i \varphi'_j \cdot \partial_i \varphi_k \cdot \partial_j \varphi_k, & F_2 &= \partial_i \varphi'_k \cdot \partial_j \varphi_k \cdot \partial_i \varphi_j, \\ F_3 &= \partial_j \varphi'_k \cdot \partial_i \varphi_j \cdot \partial_i \varphi_k, & F_4 &= \partial_i \varphi'_j \cdot \Delta \partial_i \varphi_j, \\ F_5 &= \partial_i \varphi'_j \nabla_t \partial_i \varphi_j. \end{aligned} \quad (38)$$

Можно непосредственно убедиться, что базис (38) сводится к (32) и так же замкнут относительно ренормировки (то и другое с точностью до производных).

Точные результаты для критических размерностей некоторых составных операторов можно получить с помощью уравнений Швингера для соответствующих производящих функционалов, см. работы [10, 12, 14]. Производящий функционал связанных корреляционных функций составного оператора $F(x)$ и любого числа полей $\Phi = \varphi, \varphi'$ в ренормированной теории имеет вид

$$\langle F \rangle_A = \frac{\int D\Phi F(x) e^{S_R(\Phi) + A\Phi}}{\int D\Phi e^{S_R(\Phi) + A\Phi}}, \quad (39)$$

где S_R – ренормированное действие (7), $A \equiv A^\varphi, A^{\varphi'}$ – источники полей $\Phi = \varphi, \varphi'$ и обозначено

$$A\Phi \equiv \int dx \{A_i^\varphi(x) \varphi_i(x) + A_i^{\varphi'}(x) \varphi'_i(x)\}.$$

Уравнения Швингера в широком смысле слова суть утверждения о равенстве нулю функционального интеграла от полной вариационной производной по переменной интегрирования, см., например, [15]. В данном случае рассмотрим равенство вида

$$0 = \int D\Phi \frac{\delta}{\delta\varphi_i(x)} \{ \Delta\varphi_i(x) e^{S_R(\Phi) + A\Phi} \}. \quad (40)$$

В обозначениях (39) равенство (40) можно переписать в виде

$$\langle G(x) \rangle_A + (d-1)\Delta\delta^{(d+1)}(x-y)|_{x=y} = -A_i^\varphi(x)\langle\Delta\varphi_i(x)\rangle, \quad (41)$$

где оператор $G(x)$ с точностью до производных имеет вид

$$G(x) \equiv F_2(x) - 2F_3(x) - \nu Z_\nu F_4(x) + F_5(x). \quad (42)$$

Формально бесконечное слагаемое в левой части равенства (41), содержащее $\delta^{(d+1)}(0)$, сокращает аналогичный УФ-расходящийся вклад в среднем $\langle G(x) \rangle$; при вычислениях в схеме MS они могут одновременно игнорироваться.

Объект в правой части (41) – УФ-конечный функционал с определенной размерностью $2 + \Delta_\varphi + \Delta[A^\varphi] = 2 + d + \Delta_\omega$ (критические размерности поля φ и его источника A^φ связаны теневым соотношением (20) в силу критической безразмерности формы $A\Phi$). Поэтому теми же свойствами обладает и локальный оператор $G(x)$ под знаком $\langle \dots \rangle_A$ в левой части (41), т.е. это УФ-конечный оператор типа (17) с определенной размерностью $\Delta[G] = 2 + d + \Delta_\omega = 4 + d - 2\varepsilon/3$. Отсюда для соответствующего источника с помощью соотношений (20), (25) находим $\Delta_a = \tilde{\Delta}_a = -2$, т.е. он является формально и реально ИК-несущественным при всех ε .

Удобно выполнить явно частичную диагонализацию матриц Z_F и γ_F , перейдя к базису $\bar{F}_\alpha$, где $\bar{F}_\alpha = F_\alpha$ для $\alpha = 1, 2, 3, 5$ и $\bar{F}_4 = G$ с G из (42). Тогда для матрицы $\bar{Z}_F$ в соотношении ренормировки (14) для базиса $\bar{F}$ УФ-конечность оператора $\bar{F}_4 = \bar{F}_4^R = \bar{F}_4^{\text{bas}}$ означает, что выполняются точные равенства $\bar{Z}_{44} = 1$, $\bar{Z}_{4\alpha} = 0$ ($\alpha \neq 4$), откуда по общему правилу (см. раздел 3) получаем $\Delta_4 = \Delta_{\text{as}}[F_4] = 4 + d - 2\varepsilon/3$ в согласии со сказанным выше.

Остальные матричные элементы $\bar{Z}_F$ были найдены путем прямого вычисления в однопетлевом приближении. Мы не будем приводить детали достаточно громоздких вычислений (пример таких вычислений см., например, в работе [14]) и сформулируем лишь результат.

В схеме MS матрица ренормировки имеет вид

$$Z_F = 1 + \sum_{k \geq 1} a_k / \varepsilon^k, \quad (43)$$

где 1 и a_k должны также пониматься как матрицы, в нашей модели в общем случае $a_k = a_k(g, \nu)$.

Из определений (15) и представления (43) для матрицы аномальных размерностей γ_F в силу ее УФ-конечности (т.е. отсутствия в ней полюсов по ε) находим (как и раньше, $D_g \equiv g\partial/\partial g$)

$$\gamma_F = -2D_g a_1. \quad (44)$$

Для обсуждавшейся выше матрицы $\bar{Z}_F = \{\bar{Z}_{\alpha\beta}\}$ расчет дает

$$\bar{Z}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \frac{g}{16\varepsilon} \cdot \frac{S_d}{(2\pi)^d \cdot d(d+2)(d+4)} \bar{A}_{\alpha\beta} + O(g^2), \quad (45)$$

где S_d – площадь поверхности единичной сферы в d -мерном пространстве и коэффициенты $\bar{A}_{\alpha\beta}$ зависят только от d :

$$\begin{aligned} \bar{A}_{11} &= 4d^3 + 2d^2 - 22d, & \bar{A}_{21} &= -2d^2 - 6d + 8, \\ \bar{A}_{12} &= 7d^3 + 3d^2 - 34d + 20, & \bar{A}_{22} &= 3d^3 + 5d^2 - 28d, \\ \bar{A}_{13} &= -6d^3 - 8d^2 + 34d - 40, & \bar{A}_{23} &= 2d^3 + 4d^2 - 18d - 8, \\ \bar{A}_{14} &= -4d^3 - 3d^2 + 20d - 20, & \bar{A}_{24} &= -d^3 - 2d^2 + 8d, \\ \bar{A}_{15} &= 6d^3 + 8d^2 - 34d + 12, & \bar{A}_{25} &= 2d^3 + 6d^2 - 12d - 16, \\ \bar{A}_{31} &= -4d^2 - 12d + 8, & \bar{A}_{51} &= -6d^2 + 14d + 16, \\ \bar{A}_{32} &= 2d^2 - 34d + 4, & \bar{A}_{52} &= -4d^3 - 18d^2 + 18d + 4, \\ \bar{A}_{33} &= 4d^3 - 4d^2 + 8d - 16, & \bar{A}_{53} &= 8d^3 + 22d^2 - 18d - 24, \\ \bar{A}_{34} &= d^3 - 3d^2 + 16d - 4, & \bar{A}_{54} &= 4d^3 + 13d^2 - 16d - 4, \\ \bar{A}_{35} &= 6d^2 - 22d - 4, & \bar{A}_{55} &= -3d^3 - 9d^2 + 8d + 20 \end{aligned} \quad (46)$$

(как сказано выше, $\bar{A}_{4\alpha} = 0$ при всех α в силу УФ-конечности $\bar{F}_4$). Из (44), (45) для $\gamma_F = \{\gamma_{\alpha\beta}\}$ находим

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{g}{8} \cdot \frac{S_d}{(2\pi)^d d(d+2)(d+4)} \bar{A}_{\alpha\beta} + O(g^2), \quad (47)$$

откуда для γ_F^* заменой $g \rightarrow g_*$ (см. раздел 2) получаем

$$\gamma_{\alpha\beta}^* = \frac{3\varepsilon}{4(d-1)(d+4)} \bar{A}_{\alpha\beta} + O(\varepsilon^2) \quad (48)$$

(для $\alpha = 4$ поправки порядка ε^2 и старше отсутствуют).

Поскольку для всех операторов $\bar{F}_\alpha$ канонические размерности $d_F = d + 4$, $d_F^\omega = 1$, $d_a = -2$, $d_a^\omega = 0$ одинаковы, матрицы Δ_F и γ_F^* отличаются на единичную матрицу и могут быть диагонализированы одновременно. В силу отмеченной выше блочной треугольности матрицы γ_F задача сводится к нахождению собственных чисел γ_α 4×4 -блока $\gamma_{\alpha\beta}^*$ с $\alpha, \beta \neq 4$. Они были найдены численно в интервале $2 \leq d \leq 4$; результаты (для $\varepsilon = 2$) представлены в табл.2. По ним с помощью формул (16), (20), (25) легко находятся критические размерности Δ_F , Δ_a , $\tilde{\Delta}_a$. Возникновение двух комплексных корней $\gamma_3 = \bar{\gamma}_5$ означает наличие осцилляций в ИК-асимптотике $k \rightarrow 0$ соответствующих инвариантных аргументов (23), ИК-существенность операторов $\bar{F}_3^{\text{bas}}$, $\bar{F}_5^{\text{bas}}$ определяется в этом случае вещественной частью величин Δ_a , $\tilde{\Delta}_a$. (Подобные осцилляции были обнаружены ранее в [16] при РГ-анализе турбулентности плазмы.) Отметим также, что в приближении (48) величины $\tilde{\Delta}_a$ не зависят от ε во всей области $\varepsilon > 2$, и для анализа ИК-существенности достаточно рассматривать значения $\tilde{\Delta}_a$ при $\varepsilon = 2$.

Таблица 2

d	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
γ_1	-2.88	-2.64	-2.49	-2.39	-2.31	-2.26	-2.21	-2.18	-2.14	-2.12
γ_2	0	0.42	0.66	0.80	0.88	0.93	0.96	0.99	0.99	1.00
$\text{Re}\gamma_{3,5}$	0.77	0.64	0.62	0.64	0.69	0.75	0.88	0.88	0.94	1.00

d	3	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	4
γ_1	-2.10	-2.08	-2.06	-2.04	-2.03	-2.01	-2.00	-1.99	-1.97	-1.94
γ_2	1.00	0.99	0.99	0.98	0.97	0.96	0.95	0.93	0.92	0.89
$\text{Re}\gamma_{3,5}$	1.06	1.11	1.17	1.21	1.27	1.31	1.36	1.40	1.44	1.51

По данным табл.2 нетрудно установить, что оператор $\bar{F}_1^{\text{bas}}$ для $d_c < d < 3.6$, где d_c – некоторое значение d в интервале $[2, 2.1]$, является при $\varepsilon = 2$ формально существенным (а значит, он становится существенным еще при $\varepsilon < 2$), оставаясь реально несущественным при любых $\varepsilon > 0$. Однако он становится формально и реально существенным еще при $\varepsilon < 2$ для $d < d_c$. Это еще одно подтверждение невозможности прямой экстраполяции результатов РГ-анализа для $d > 2$ в точку $d = 2$ (обсуждение других особенностей двумерного случая см. в [17]). Остальные операторы являются формально и реально несущественными при всех d . Необходимо подчеркнуть, что эти результаты, в отличие от всех обсуждавшихся ранее, получены на основе однопетлевого приближения и могут, в принципе, измениться при учете поправок ε^2 , ε^3 и т.д. в (48).

Итак, мы сформулировали критерий реальной ИК-существенности поправок к стохастическому уравнению Навье–Стокса (1) и выполнили в соответствии с ним проверку существенности для некоторых семейств составных операторов. Все они оказались реально несущественными для любых конечных ε . Это подтверждает возможность использования модели (1) для анализа ИК-асимптотики развитой турбулентности, а также экстраполяции результатов РГ-анализа в область реальной ИК-накачки $\varepsilon > 2$.

Авторы выражают признательность Л.Ц. Аджемяну за внимание к работе и полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект N^0 93-02-14515), а также Международного научного фонда (ISF) и Правительства Российской Федерации (грант R 63300).

Н.В. Антонов получал финансовую поддержку Ассоциации INTAS в рамках исследовательской программы Международного центра фундаментальной физики в Москве (грант INTAS N^0 93-2492), а также Правительства Санкт-Петербурга.

Список литературы

- [1] Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Т.2. М.: Наука, 1967.
- [2] McComb W.D. The Physics of Fluid Turbulence. Oxford: Clarendon, 1990.
- [3] Zinn-Justin J. Quantum Field Theory and Critical Phenomena. Oxford: Clarendon, 1989.
- [4] De Dominicis C., Martin P.C. // Phys.Rev. 1979. V. A29. №1. P. 419–422.
- [5] Yakhot V., Orszag S. // J. Sci. Comp. 1986. V. 1. №1. P. 3.
- [6] McComb W.D. // Phys.Rev. 1992. V. A46. №8. P. 4797–4812.
- [7] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.

- [8] *Куни Ф.М., Сторонкин Б.А.* // ТМФ. 1973. Т. 14. №2. С. 220–234.
- [9] *Климонтович Ю.Л.* Статистическая физика. М.: Наука, 1982.
- [10] *Аджемян Л.Ц., Васильев А.Н., Письмак Ю.М.* // ТМФ. 1983. Т. 57. №2. С. 268–281.
- [11] *Аджемян Л.Ц., Антонов Н.В., Васильев А.Н.* // ЖЭТФ. 1989. Т. 95. №4. С. 1272–1288.
- [12] *Аджемян Л.Ц., Васильев А.Н., Гнатич М.* // ТМФ. 1988. Т. 74. №2. С. 180–191.
- [13] *Антонов Н.В.* // Вестник СПбУ. Сер. физ., хим. 1992. Вып. 4. №25. С. 6–11.
- [14] *Аджемян Л.Ц., Антонов Н.В., Ким Т.Л.* // ТМФ. 1994. Т. 100. №3. С. 382–401.
- [15] *Васильев А.Н.* Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1976.
- [16] *Аджемян Л.Ц., Васильев А.Н., Гнатич М., Письмак Ю.М.* // ТМФ. 1989. Т. 78. №3. С. 368–383.
- [17] *Honkonen J., Nalimov M.Yu.* Helsinki University Preprint HU-TFT-93-54. Helsinki, 1993.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступила в редакцию
19.VI.1995 г.

N. V. Antonov, S. V. Borisenok, V. I. Girina

**RENORMALIZATION GROUP IN THE THEORY OF FULLY
DEVELOPED TURBULENCE. PROBLEM OF THE INFRARED
RELEVANT CORRECTIONS TO THE NAVIER–STOKES EQUATION**

Within the framework of the RG approach to the theory of fully developed turbulence we consider the problem of possible IR relevant corrections to the Navier–Stokes equation. We formulate an exact criterium of the “actual IR relevance” of the corrections. In accordance with this criterium we verify the IR relevance for certain classes of composite operators. All these operators turn out to be actually IR irrelevant for arbitrary values of the RG expansion parameter ε . This confirms the absence of the crossover and the possibility of extrapolation of the RG results (obtained for asymptotically small values of ε) to the physical range $\varepsilon > 2$.